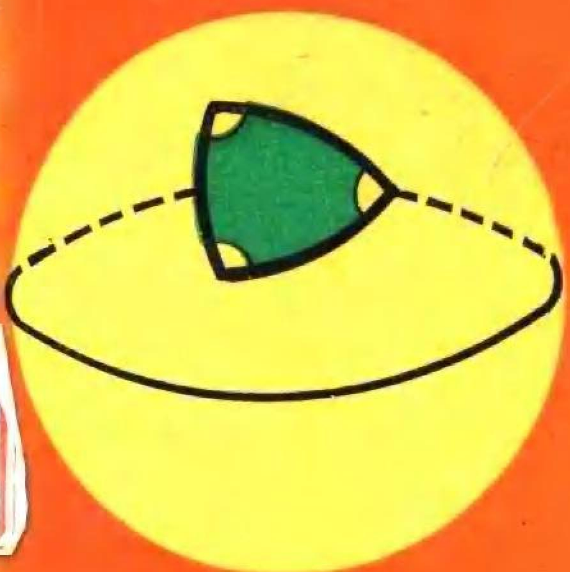
高等学校试用教材

微分几何

苏步青　胡和生
沈纯理　潘养廉　张国樑



高等学校试用教材

微分几何

苏步青　胡和生

沈纯理　潘养廉　张国樑

高等教育出版社

本书以经典微分几何为主，同时也适当地介绍一些整体微分几何的概念。经典微分几何主要是三维欧氏空间的曲线和曲面的局部性质的基本内容；整体微分几何内容包括平面和空间曲线的一些整体性质，以及曲面的一些整体性质，同时简单地介绍了微分流形和黎曼流形的一些概念。

全书共有三章和三个附录：第一章三维欧氏空间的曲线论（包括平面和空间曲线的一些整体性质），第二章曲面论讲三维欧氏空间中曲面的局部几何性质，第三章曲面的整体性质初步，这三章是本书的主要内容；附录1向量函数及其运算．附录2欧氏空间的点集拓扑，附录3简略介绍微分几何的发展史，这三个附录供学习本书时参考。

本书可供综合性大学数学专业作试用教材。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复"高等教育出版社"。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材
微分几何
苏步青　胡和生
沈纯理　潘养廉　张国樑
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装
*
开本850×1168　1/32　印张8.25　字数197,000
1979年6月第1版　1985年2月第1次印刷
印数00.001—2,830
书号13010·01071　定价2.30元
（精装本）

前　言

微分几何是以数学分析为工具来研究空间形式的一门数学分科，主要讨论光滑曲线与曲面的性质. 经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质，随着对物质运动认识的深入，十九世纪开始开展了高维空间微分几何的研究. 本世纪以来，整体微分几何的研究逐渐发展起来，近二、三十年来发展非常迅速，并且与微分方程、代数、拓扑相互渗透成为数学的一个重要分科. 微分几何在机械工程、力学、引力理论及理论物理等其他领域都有广泛应用.

本课程以经典微分几何为主，但同时也适当地介绍一些整体微分几何的概念. 教材中除必须讲授的内容外，还添加一些加"*"的材料，它们可作为讲授内容也可作为课外阅读参考材料. 各校可根据不同情况灵活掌握. 这些加"*"的材料，也是整体微分几何中难度较高的基本内容，可在有了欧氏空间的点集拓扑的初步知识(本书附录 2)后再学习.

在学习微分几何时，要力求了解与掌握几何概念与方法，注意培养几何直观和图形想像的能力，从具体到抽象的能力. 由于学习微分几何需要在数学上已有了一定的素养，因而本课程以三年级开设为宜. 但如果除去了加"*"内容，也可以安排在二年级下学期，而把加"*"内容作为讲座或选修课形式开设。

本教材共分三章:

第一章　三维欧氏空间的曲线论;

第二章　三维欧氏空间中曲面的局部几何性质;

第三章　曲面的整体性质初步。

本教材与过去的微分几何教材的区别主要是添加了一些整体的几何性质．例如，在曲线论中增加切线的旋转指标定理、计算曲线长度的Crofton公式以及凸曲线的整体性质等；对曲面的整体性质作了一定的讨论，首先讨论了曲面片与整块曲面的区别及联系，接着介绍了向量场奇点的指标定理、球面的刚性定理、整体曲面的Gauss-Bonnet公式、Hopf-Rinow定理等；最后引进了微分流形及黎曼流形的概念．此外，在第二章处理曲面的局部性质时，我们引用了活动标架法，同时充分利用和式约定，使叙述较简洁，几何概念更为清晰．

为使读者便于阅读起见，我们写了三个附录，其一是向量的微分与积分，其二是欧氏空间的点集拓扑，另一是微分几何的发展简史．

在本教材的编写过程中，得到南开大学、杭州大学、南京大学、郑州大学、北京师范大学及人民教育出版社的支持与帮助，提出了宝贵意见，特此谢意。

编　者

一九七九年四月

目　录

第一章　三维欧氏空间的曲线论

§1　曲线　曲线的切向量　弧长

物理学中，曲线常被看作质点运动的轨迹，时间 t 是描述质点运动的参数．在微分几何中，也常常采用参数方程来表示曲线．

设 $\{O; xyz\}$ 是 E^3 中的笛卡尔直角坐标系，

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1-1}$$

都是 t 的连续可微函数(今后我们总假定它们有三阶连续导数)，设这些函数的定义域是直线 R^1 中的一个区间 (a, b)（区间的端点 a 可以是 $-\infty$，b 可以是 $+\infty$），(1-1)式给出了从 (a, b) 到 E^3 中的一个连续可微映照

$$t \longrightarrow (x(t),\ y(t),\ z(t))$$

在这个映照下，t 被映到点 $P(x(t),\ y(t),\ z(t))$，$(a,\ b)$ 的象集就构成了 E^3 中的一条**连续可微曲线** C，简称**曲线**(见图 1)．我们把 t 称为曲线 C 的**参数**．(1-1)式就是曲线 C 的参数方程．今后常把(1-1)式写成向量形式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) \tag{1-2}$$

而把曲线上参数为 t 的点 P 称为点 $\boldsymbol{r}(t)$，简称为 t 点或 $P(t)$ 点．

按照参数增加的方向可以确定出曲线的正向(见图 1)．称向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dy(t)}{dt},\ \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

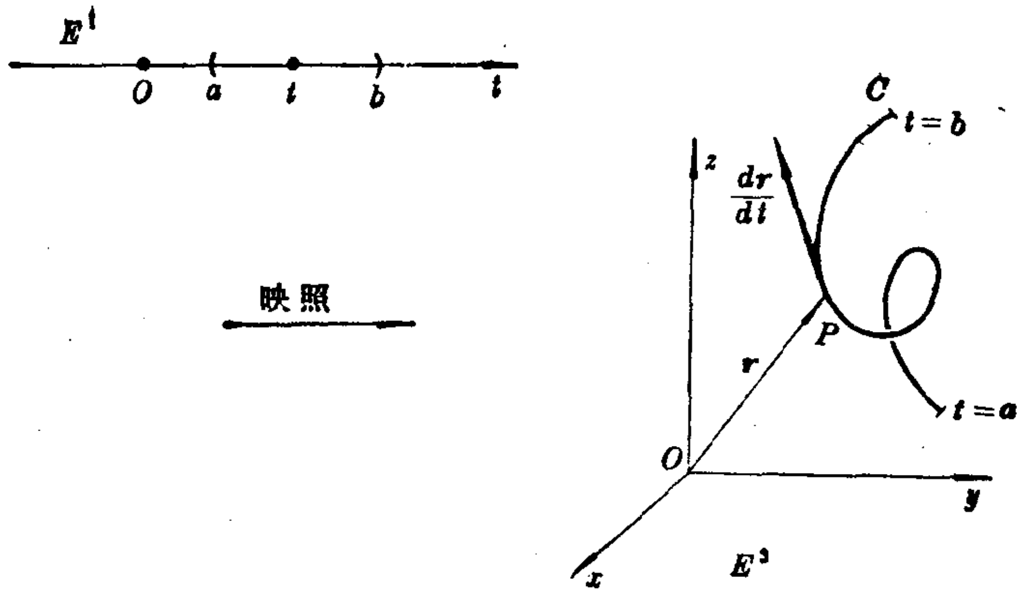


图 1

为曲线在 t 处的**切向量**. 如果在 $t=t_0$ 处 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t_0)}{dt}\neq\boldsymbol{0}$, 则称参数为 t_0 的点是曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**正则点**, 否则就称为**奇点**. 曲线 C 上所有点都是正则点时, 则称 C 为**正则曲线**.

例 1 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ 的轨迹是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上间距为 $2\pi b$ 的一条**圆柱螺线**(图 2), 它是一条正则曲线.

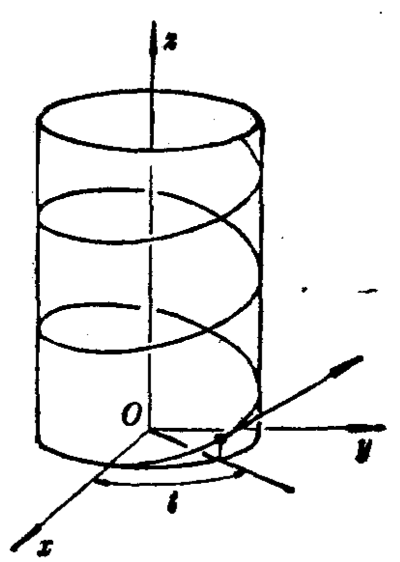


图 2

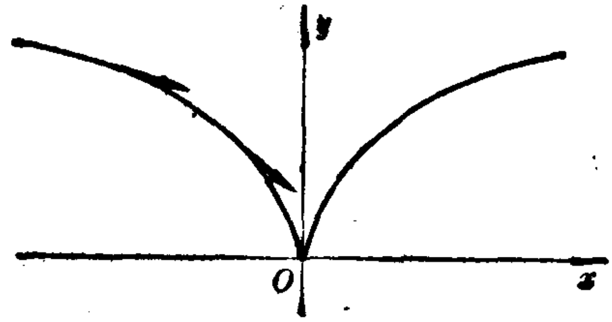


图 3

例2 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t^3, t^2, 0)$, $t\in E^1$, 在 $t=0$ 处,

$$\frac{d\boldsymbol{r}(0)}{dt}=(0, 0, 0)$$

所以 $t=0$ 点不是正则点(见图3).

如果采用另一个参数 $\bar{t}$, 则曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{t})$. 为了保证 t 和 $\bar{t}$ 一一对应,参数变换式 $\bar{t}=\bar{t}(t)$ 必须满足

$$\frac{d\bar{t}}{dt}\neq 0$$

为了使 t, $\bar{t}$ 的增加方向都相应于曲线的正向,则要求

$$\frac{d\bar{t}}{dt}>0 \tag{1-3}$$

于是由 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\bar{t}}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\dfrac{dt}{d\bar{t}}$ 知道,曲线 C 上一点如在取参数 t 时为正则点,则在取参数 $\bar{t}$ 时也必为正则点.

对于正则曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,称

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|dt \tag{1-4}$$

为曲线从参数 t_0 到 t 处的弧长,其中

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

是切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 的长度.

设曲线 C 上两点 P_0, P 在曲线的不同参数 t, $\bar{t}$ 的选取下, P_0 点的参数分别为 t_0, $\bar{t}_0$, 点 P 的参数分别为 t, $\bar{t}$. 令 $s(t)$ 是曲线从 t_0 到 t 的弧长, $\bar{s}(\bar{t})$ 为曲线从 $\bar{t}_0$ 到 $\bar{t}$ 的弧长. 设在参数变换下, $\dfrac{dt}{d\bar{t}}>0$, 则有

$$\begin{aligned} s(t)&=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}}\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{d\bar{t}}\cdot\frac{d\bar{t}}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{d\bar{t}}\right|d\bar{t}\\ &=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}}\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{d\bar{t}}\right|d\bar{t}=\bar{s}(\bar{t})\end{aligned}$$

因此弧长只依赖于曲线上的点 P_0、P，而与参数的选取无关。

显然，弧长 s 是 t 的可微函数，且

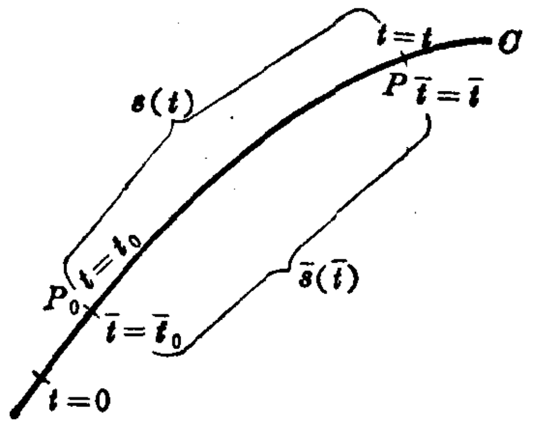


图 4

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| \quad (1\text{-}5)$$

对正则曲线，$\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\dfrac{ds}{dt}>0$，于是可取弧长 s 作为新的参数．这时由

$$1=\frac{ds}{ds}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right|$$

知道，以弧长为参数时曲线的切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ 为单位向量．反之，当切向量为单位向量时$\left(\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=1\right)$，从(1-4)式积出

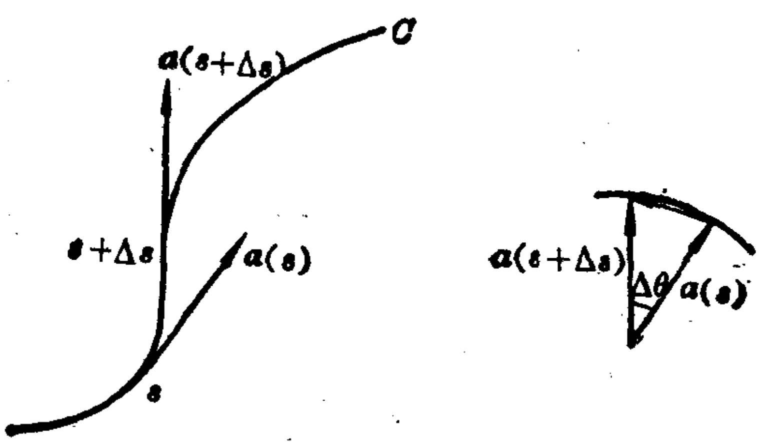
$$s=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\int_{t_0}^{t}dt=t-t_0$$

当式中 t_0 取 0 时，可看出 t 就是从 $t=0$ 处起算的弧长(见图 4)．

今后如无特别说明，曲线总是指正则曲线，而且 $\boldsymbol{r}(s)$ 中的 s 为弧长参数，并用"撇"表示关于 s 的导数，如

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\quad \boldsymbol{r}''(s)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

等等．



(a) (b)

图 5

下面我们证明一个定理.

定理 设曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ (s 是弧长参数) 的每点有一个单位向量 $\boldsymbol{a}(s)$ (见图 5(a)), 则有

$$|\boldsymbol{a}'(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

其中 $\Delta\theta$ 表示 $\boldsymbol{a}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{a}(s)$ 的夹角(见图 5(b)).

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}'(s)|&=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)}{\Delta s}\right|\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}\right|\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\end{aligned}$$

定理证毕.

习　题

1 计算下列曲线从 $t=0$ 起的弧长:

(1) 双曲螺线 $\boldsymbol{r}=(a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ bt)$

(2) 悬链线 $\boldsymbol{r}=\left(t,\ a\operatorname{ch}\frac{t}{a},\ 0\right)$

(3) 曳物线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,\ a\ln(\sec t+\operatorname{tg}t)-a\sin t,\ 0)$

2 求平面曲线的极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 下的弧长公式, 其中 ρ 为极径, θ 为极角.

3 用弧长参数表示圆柱螺线与双曲螺线.

4 设曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 不通过原点, $\boldsymbol{r}(t_0)$ 是 C 距原点最近的点. 且 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 正交于 $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

5 设 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是参数曲线, $\boldsymbol{m}$ 是固定向量. 若对任何 t, $\boldsymbol{r}'(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$, 且 $\boldsymbol{r}(0)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$, 证明对任何 t, $\boldsymbol{r}(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$.

6 设平面曲线 C 在同一平面内直线 l 的同侧，且与 l 相交于曲线 C 的正则点 P. 证明：直线 l 是曲线 C 在点 P 处的切线.

§2 主法向量与从法向量 曲率与挠率

对曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，用 $\boldsymbol{T}(s)$ 表示单位切向量，即

$$\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s) \tag{1-6}$$

由上节末的定理，我们可用 $|\boldsymbol{T}'(s)|=|\boldsymbol{r}''(s)|$ 来表示曲线上两邻近点 s, $s+\Delta s$ 的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$, $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$ 之间的夹角与 Δs 之比在 $\Delta s\to 0$ 时的变化情况，它度量了曲线上邻近两点的切向量的夹角对弧长的变化率，反映了曲线的"弯曲程度".

定义 称 $k(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|$ 为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在 s 点的曲率. 当 $k(s)\neq 0$ 时，其倒数 $\rho(s)=\dfrac{1}{k(s)}$ 称为曲线在 s 点的曲率半径.

例 1 对于直线 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 为常向量，$|\boldsymbol{u}|=1$. 于是 $k\equiv 0$. 反之，若曲线 C 的曲率 $k=|\boldsymbol{r}''(s)|\equiv 0$，则从微分方程 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{0}$ 中解得 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是常向量，因而曲线 C 是直线. 所以直线的特征是 $k\equiv 0$.

例 2 对于圆周 $\boldsymbol{r}(s)=\left(r\cos\dfrac{s}{r},\ r\sin\dfrac{s}{r}\right)$，其中 r 为圆的半径. 这时 $k(s)=\dfrac{1}{r}$.

一般地说，如向量 $\boldsymbol{a}(s)$ 具有定长，则对 $\boldsymbol{a}(s)\cdot\boldsymbol{a}(s)=c$（常数）两边求导后就得到 $\boldsymbol{a}'(s)\cdot\boldsymbol{a}(s)=0$，即 $\boldsymbol{a}'(s)$ 与 $\boldsymbol{a}(s)$ 正交. 现在 $\boldsymbol{T}(s)$ 是单位向量，所以 $\boldsymbol{T}(s)$ 与它的导向量 $\boldsymbol{T}'(s)=\boldsymbol{r}''(s)$ 正交.

定义 当 $\boldsymbol{r}''(s)\neq\boldsymbol{0}$ 时，在 $\boldsymbol{T}'(s)=\boldsymbol{r}''(s)$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 称为曲线在 s 处的主法向量，于是有 $\boldsymbol{T}'(s)=k(s)\boldsymbol{N}(s)$. 通过点 $\boldsymbol{r}(s)$，由单位切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 所张成的平面称

为 s 处的**密切平面**. 单位向量 $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$ 称为点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的**从法向量**,它正交于密切平面. 通过点 $\boldsymbol{r}(s)$ 由 $\boldsymbol{T}(s)$ 与从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 所张成的平面称为点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的**从切平面**, 通过点 $\boldsymbol{r}(s)$, 由主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$ 与从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 所张成的平面称为 s 处的**法平面**(图 6).

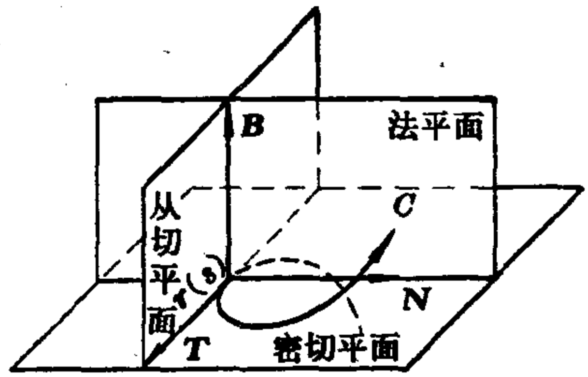


图 6

对 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{T}=0$ 求导, 得 $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{T}=0$. 又因 $\boldsymbol{B}$ 是单位向量, 所以 $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{B}=0$, 因此 $\boldsymbol{B}'(s)$ 平行于 $\boldsymbol{N}(s)$.

定义 设 $\boldsymbol{r}''\neq\boldsymbol{0}$, 则由 $\boldsymbol{B}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s)$ 所确定的函数 $\tau(s)$ 称为曲线在 s 处的**挠率**.

显然有

$$\tau(s)=-\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) \tag{1-7}$$

及
$$|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|$$

从上节末的定理知道, $|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|$ 度量了曲线上邻近两点的从法向量的夹角(即密切平面的夹角)对弧长的变化率.

由于曲线的弧长 s 与曲线的参数选取无关, 所以曲率 $k(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|$ 及挠率 $\tau(s)=-\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$ 都与曲线的参数选取无关.

定义 通过 $\boldsymbol{r}(s)$ 点, 以 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$ 或 $\boldsymbol{B}(s)$ 为方向的直线分别称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在 s 处的**切线**、**主法线**或**从法线**.

我们有下列定理.

定理 曲线是平面曲线的充要条件是曲线上每一点的挠率都为 0.

证明 必要性: 设曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 位于一个平面上, 设 $\boldsymbol{B}_0$ 是这个平面的法向量. 于是有 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(0))\cdot\boldsymbol{B}_0=0$. 两边求导后得到 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B}_0=0$, $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{B}_0=0$, 因此 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ 都与 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直, 所以 $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ 是

与常向量 $\boldsymbol{B}_0$ 平行的单位向量，故 $\boldsymbol{B}'(s)=\mathbf{0}$，即 $\tau=0$.

充分性：设 $\tau\equiv 0$（不妨设 $k\neq 0$，否则此曲线为直线，当然是平面曲线）．则 $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{B}_0$（常向量），因而

$$(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0)'=\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=0$$

即 $\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0$ 为常数，于是

$$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{r}(0)\cdot\boldsymbol{B}_0$$

即

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0))\cdot\boldsymbol{B}_0=0$$

所以 $\boldsymbol{r}(s)$ 为一平面曲线．定理证毕．

当曲线改变定向（即弧长的度量方向颠倒）时，曲率与挠率不变．事实上，此时弧长参数 $\bar{s}=s_0-s$，$d\bar{s}=-ds$，因此切向量 $\boldsymbol{T}$ 反向，而 $\boldsymbol{T}'$ 不变，从而曲率不变；从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 反向，而 $\boldsymbol{B}'(s)$ 不变，从而挠率不变．

例 3　求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(s)=(r\cos\omega s,\ r\sin\omega s,\ h\omega s)$ 的曲率和挠率，其中 r,h 及 $\omega=(r^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ 均为常数．

容易验证 $|\boldsymbol{r}'(s)|=1$ 所以 s 是弧长参数．

$$\boldsymbol{T}(s)=\omega(-r\sin\omega s,\ r\cos\omega s,\ h)$$

$$\boldsymbol{T}'(s)=-\omega^2 r(\cos\omega s,\ \sin\omega s,\ 0)$$

因此，曲率 $k(s)=\omega^2 r$.

$$\boldsymbol{N}(s)=(-\cos\omega s,\ -\sin\omega s,\ 0)$$

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\omega(h\sin\omega s,\ -h\cos\omega s,\ r)$$

$$\boldsymbol{B}'(s)=\omega^2 h(\cos\omega s,\ \sin\omega s,\ 0)$$

所以，挠率 $\tau(s)=\omega^2 h$．因而圆柱螺线的曲率、挠率均为常数．

例 4　一般螺线　如果一条曲线的切向量始终与一固定方向交于定角，则称此曲线为一般螺线．现在证明：曲率不等于零的曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 是一般螺线的充要条件为：$\dfrac{\tau(s)}{k(s)}=c$（常数）．

证明　必要性：设螺线的切向量与固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角 θ，

$|\boldsymbol{u}|=1$,则有 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\theta$.

因为 $k\neq 0$,由

$$0=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})'=\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}$$

知 $\boldsymbol{N}$ 正交于 $\boldsymbol{u}$. 这时,$\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{T}+y\boldsymbol{B}$,其中

$$x=\cos\theta,\quad y=\pm\sin\theta$$

则
$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}'=\cos\theta\, k\boldsymbol{N}\mp\sin\theta\,\tau\boldsymbol{N}$$

即
$$k\cos\theta=\pm\tau\sin\theta$$

从而
$$\frac{\tau}{k}=\pm\operatorname{ctg}\theta=\pm c\text{(常数)}$$

充分性:设 $\tau=ck$, c 为常数. 取 θ 使 $\operatorname{ctg}\theta=c$, $0<\theta<\pi$. 设 $\boldsymbol{u}=\cos\theta\boldsymbol{T}+\sin\theta\boldsymbol{B}$, 计算可得 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\theta$, 即 $\boldsymbol{u}$ 是一固定向量,且与 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切向量成定角 θ,所以 $\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线. 命题证毕.

在例 3 中,挠率是按定义直接计算得到的,实际上,成立如下的公式

$$\tau(s)=(\boldsymbol{r}'(s),\ \boldsymbol{r}''(s),\ \boldsymbol{r}'''(s))/|\boldsymbol{r}''(s)|^2 \tag{1-7'}$$

这是因为,由 $\boldsymbol{r}''=k\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{r}'''=k'\boldsymbol{N}+k\boldsymbol{N}'$,再由 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{N}=0$ 就可得

$$\tau=-\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}'\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}'\cdot(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{N})$$

$$=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{k^2}=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2}$$

这里 $(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')$ 表示三个向量 $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}''$, $\boldsymbol{r}'''$ 的混合积.

当不以弧长 s 为参数时,读者可利用

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{dt}\frac{dt}{ds}$$

及其导数的式子,不难推得在任意参数下,曲率及挠率的计算公式: