

高等学校试用教材

建 筑 力 学

下 册

华南工学院《建筑力学》编写组

人 民 教 育 出 版 社

(续)

符 号	意 义	常用单位	符 号	意 义	常用单位
β	阻尼系数		δ^e	单元节点位移向量	
	动力系数		F^e	单元节点力向量	
ω	角速度	rad/s	$[K]^e$	单元刚度矩阵	
	自振频率	s ⁻¹	$\bar{\delta}^e$	单元坐标系中单元节点位移向量	
θ	干扰力频率	s ⁻¹	$\bar{F}^e$	单元坐标系中单元节点力向量	
ε	角加速度	rad/s ²	$\bar{K}^e$	单元坐标系中单元刚度矩阵	
λ	阻尼的对数递减量		δ, Δ	节点位移向量	
λ_0	换算长细比		F	节点外荷载向量	
μ	动力扩大系数		$[K]$	结构整体刚度矩阵	
κ	曲 率	m ⁻¹	$[T]$	坐标变换矩阵	
Π	势 能	N·m	$[K_{aa}]$	加约束条件后的结构刚度矩阵	
Π^*	总余能	N·m	$\tilde{P}$	等效节点荷载向量	
$\xi_1(u), \xi_2(u)$			P^e	直接作用在节点上的荷载向量	
$\xi_3(u), \eta_1(u)$	刚架稳定计算的函数值		$[D]$	弹性矩阵	
$\eta_2(u), \eta_3(u)$					

建筑力学包括理论力学、材料力学和结构力学三门力学的基本内容。本教材体系以建筑构件和结构为线索,按照强度、刚度、稳定等问题,从静力分析到动力分析进行阐述。

本教材分上、中、下三册出版。下册主要内容为结构静力计算的进一步研究(包括能量法、矩阵位移法和结构静力计算综论等),结构稳定计算,以及结构的动力计算(包括运动学和动力学的基本内容、结构的振动计算和结构抗震计算的基本原理等)。

本教材为高等学校工科工业与民用建筑专业试用教材,也可供建筑、水利类有关专业和有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

建筑力学

下册

华南工学院《建筑力学》编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖南省新华印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张19.75 字数440,000

1980年9月第1版 1982年3月湖南第2次印刷

印数 15,501—24,000

书号15012·0277 定价1.65元

主要符号表

(上、中册所列符号在本册中仍适用)

符 号	意 义	常用单位	符 号	意 义	常用单位
A	振 幅	m, cm	m	质 量	kg
	功	N·m	P_K	稳定计算的临界荷载	N, kN
a	加速度	m/s ²	$P(f)$	干扰力	N, kN
a_n	法向加速度	m/s ²	R	阻尼力	N
a_r	切向加速度	m/s ²	S	冲 量	m·kg·s ⁻¹
a_o	绝对加速度	m/s ²	S	距 离	m
a_s	牵连加速度	m/s ²	S_0	拱的计算长度	m
a_r	相对加速度	m/s ²	T	振动周期	s
C	结构影响系数			动 能	m ² ·kg·s ⁻² (N·m)
F_i	惯性力	N, kN	t	时 间	s, min, h
f	振动周期	S	U	应变能	N·m
	动 能	m ² ·kg·s ⁻² (N·m)	U^*	余 能	N·m
g	重力加速度	m/s ²	u_i	i 点沿 x 坐标轴方向的位移	m, cm
J_z, J_o	转动惯量	kg·m ²	V^*	反力余能	N·m
K, K_1, K_2	拱的稳定系数		v_i	i 点沿 y 坐标轴方向的位移	m, cm
K_D	动荷系数		v	速 度	m/s
K	动 量	m·kg·s ⁻¹	v_a	绝对速度	m/s
k	衰减系数		v_e	牵连速度	m/s
	动力系数		v_r	相对速度	m/s
k_{ij}	刚度系数		w	弧形杆上点的径向位移	m, cm
L_o	动量矩	m ² ·kg·s ⁻¹	y_j	静力挠度	m, cm
M	质点系质量	kg	α	地震影响系数	

目 录

主要符号表.....	1
------------	---

第六篇 结构静力计算的进一步研究

第二十四章 能量法.....	2
第一节 应变能与余能.....	2
第二节 卡氏定理.....	9
第三节 最小势能原理.....	16
第四节 最小余能原理.....	21
小结.....	24
思考题.....	25
习题.....	26
第二十五章 矩阵位移法.....	28
第一节 矩阵位移法的基本概念.....	28
第二节 平面桁架的分析.....	32
第三节 平面刚架的分析.....	54
第四节 平面刚架计算框图简介.....	67
第五节 矩阵位移法与最小势能原理.....	72
小结.....	83
思考题.....	84
习题.....	85
第二十六章 结构静力计算综论.....	86
第一节 静定结构和超静定结构的特征.....	86
第二节 超静定结构的计算方法.....	89
第三节 计算简图小结.....	94
小结.....	97
思考题.....	98

第七篇 结构稳定计算

第二十七章 结构稳定计算.....	100
第一节 结构稳定的概念.....	100
第二节 组合杆件的稳定.....	100
第三节 圆环在均布径向压力下的稳定性.....	108
第四节 拱的稳定.....	112
第五节 刚架的稳定.....	121

小结	128
思考题	128
习题	129

第八篇 结构的动力计算

第二十八章 点的运动	132
第一节 物体运动的概念	132
第二节 点的运动方程	132
第三节 点在直线运动中的速度和加速度	135
第四节 用矢量法表示点在曲线运动中的速度和加速度	139
第五节 点的速度和加速度在直角坐标轴上的投影	141
第六节 点的速度和加速度在自然轴上的投影	144
第七节 点的复合运动	150
小结	155
思考题	156
习题	157
第二十九章 刚体的运动	159
第一节 刚体的平动	159
第二节 刚体绕定轴的转动	161
第三节 刚体的平面运动 平面运动的分解和速度合成定理	166
第四节 用瞬心法求平面图形的速度	170
第五节 平面图形内各点的加速度	173
小结	175
思考题	176
习题	176
第三十章 质点运动微分方程及其应用	179
第一节 动力学的基本定律	179
第二节 质点运动微分方程及其基本问题	180
第三节 惯性力 达朗伯原理	184
第四节 质点的振动	188
小结	195
思考题	196
习题	196
第三十一章 动力学的普遍定理	198
第一节 质心运动定理	198
第二节 动量定理	201
第三节 动量矩定理	206
第四节 刚体绕定轴转动	212
第五节 动能定理	218
第六节 机械能量守恒定律	223
小结	227

思考题	229
习题	229
第三十二章 结构的振动计算	232
第一节 动力荷载 结构振动计算的意义及其特点	232
第二节 一个自由度体系不考虑阻尼作用的自由振动	233
第三节 一个自由度体系考虑阻尼作用的自由振动	238
第四节 一个自由度体系不考虑阻尼作用的强迫振动	241
第五节 一个自由度体系考虑阻尼作用的强迫振动	249
第六节 多个自由度体系的自由振动	252
第七节 多个自由度体系自振频率的近似计算法	259
第八节 多自由度体系的强迫振动	264
小结	271
思考题	274
习题	274
第三十三章 结构抗震计算原理简介	278
第一节 概述	278
第二节 单质点系在地震作用下的计算基本原理	280
第三节 地震荷载及其计算实例	282
第四节 多质点系地震荷载的简化计算方法	286
小结	290
思考题	291
习题	291
附录 I 矩阵代数的基本知识	292
附录 II $\xi_1(u)$、$\xi_2(u)$、$\xi_3(u)$、$\eta_1(u)$、$\eta_2(u)$、$\eta_3(u)$ 等函数数值	301
附录 III 习题答案	305

第六篇 结构静力计算的进一步研究

本篇内容在于总结前面各篇所学过的结构静力分析方法,并将先介绍另外两个分析法:能量法和矩阵位移法。

能量法是从能量的角度去阐述结构受力的状态,从而可求解结构的内力和位移未知值。它与力法、位移法的出发点截然不同,成为结构分析法中另一个主要途径。能量法是一个总的名称,其中又包括势能原理、余能原理、卡氏第一、第二定理等,每一定理都可作为一个方法求解一些问题。在学习这些定理时,必须首先弄清楚“变形能”、“余能”和“势能”等概念,以及它们的表达式;进而才可研究各个定理的建立过程及其应用场合。

如果说力法和位移法是属于古典理论,则能量法也不是什么新的方法,很早以前人们就已提出来了。但由于近年来有限单元法的发展,它与能量原理有密切关系,所以在这里我们把能量法作为一种基本理论进行介绍。

第二十五章所介绍的矩阵位移法是专门分析杆件系统结构的有限单元法。通过这一章的学习,将使我们对有限单元法有一个基本的认识,并为将来研究二维平面问题或三维空间问题奠定了基础。在学习中,首先要理解单元刚度矩阵意义,继而研究结构总刚度的意义及其形成。这一章在推导公式的过程中,要用到矩阵代数运算的数学知识。为了帮助读者复习这方面内容,在本书附录 I 载有“矩阵代数简介”,以供参考。

应该指出,对于大型结构的分析,同时借助电子计算技术,有限单元法是一个很好的计算方法。问题愈复杂,愈将显示出这个方法的优越性,实际上它已成为近代结构分析中应用很广的一种新的计算方法。当然,在本书中,我们只能用一些简单的结构为例来说明其原理及计算步骤,作为这一方法的入门介绍。

在该章最后一节用能量原理建立刚度矩阵,这样,便把本篇两章书的内容联系起来了,也为进一步研究有限单元法打下了基础。

本篇最后一章是结构静力计算综论,对静定结构、超静定结构的特征、计算方法以及结构计算简图作一总结。

第二十四章 能 量 法

结构分析的任务是求解结构的内力和位移。在前面的章节中已经介绍了若干分析方法，这些方法的共同点是，根据结构的平衡条件、变形连续条件和物理条件(虎克定律)，直接建立问题的基本方程。此外，在分析的过程中，都采用了小变形以及材料服从虎克定律的基本假设，也就是说，我们只讨论了线性结构的问题。本章将介绍结构分析的另一重要方法——能量法。这种方法把平衡条件、变形连续条件和物理条件综合起来进行考虑，一般地说，它可以适用于线性结构与非线性结构。能量法的某些概念和定理在中册第十四章中曾经讨论过，在那里曾证明了线性弹性体中功的互等定理以及重要的能量原理之一的虚功原理，并且详细讨论了它在计算结构位移中的应用——单位力法，这是能量原理在结构分析中应用的一个重要方面。本章将着重讨论应变能、余能、势能以及卡氏定理、最小势能原理、最小余能原理等重要的概念和能量原理。

第一节 应变能与余能

一、应变能

应变能或称变形能。在上册第十一章阐述强度理论时曾涉及到这个概念。在本章里，为了系统地叙述能量法，所以也先来说明这个问题，并把它概念推广到非线性弹性体中。如图 24-1a 所示受轴向拉伸的杆件，设杆的材料是非线性弹性材料，其应力应变关系不是直线而是曲线，如图 24-1d 所示，于是荷载 P 和荷载作用点 B 的位移 Δ 之间的关系也是非线性的，如图 24-1b 所示。当荷载由 O 增大至 P_1 ，位移将由 O 增至 Δ_1 ，如果我们用 $P=P(\Delta)$ 表示力和位移之间的关系

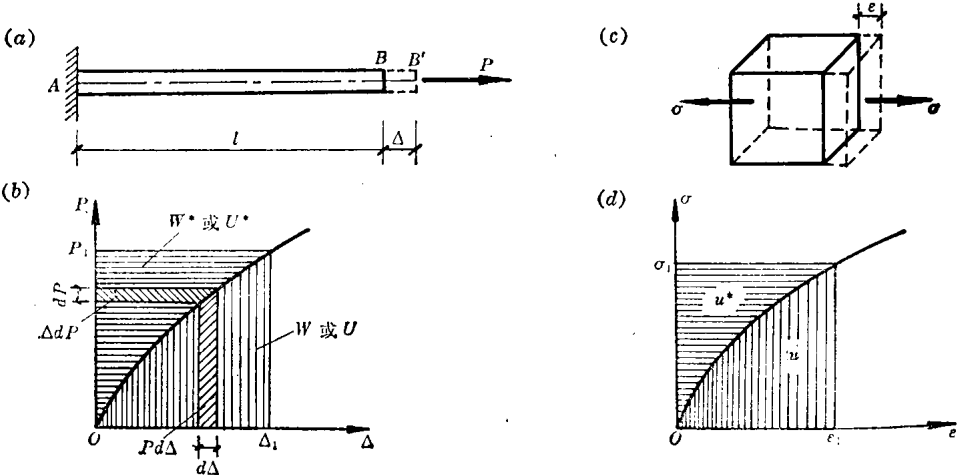


图 24-1

系(即以位移为自变量),在这一过程中外力所作的功为

$$W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta$$

它等于荷载位移曲线下面的一块面积(图 24-1b)。假设在加载或卸载的过程中无能量的损失,则荷载 P 所作的功就等于贮存在杆中的应变能,以符号 U 表示,即

$$U = W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta \quad (24-1)$$

为了表示组成杆件的材料本身所储存的应变能,我们常用到单位体积的应变能,记作 u ,它等于各边长均为 1 的体积微元上应力 σ 所作的功(图 24-1c),即

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \frac{P d\Delta}{Al} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \quad (24-2)$$

这也就是图 24-1d 中应力应变曲线下面的一块面积(如果材料是线性的,即 σ - ϵ 图是一直线,则积分的结果是 $\frac{1}{2}\sigma\epsilon$,即等于一三角形面积)。杆中总的应变能应当是单位体积应变能在杆的整个体积上积分,所以杆的应变能可写为

$$U = \int_V u dV \quad (24-3)$$

二、余能

我们把图 24-1b 的荷载位移曲线上面的一块面积定义为“余功 W^* ”或“余能 U^* ”,即

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \Delta dP \quad (24-4)$$

在计算余能时,往往以 $\Delta = \Delta(P)$ 来表示荷载位移关系,即以力作为自变量。算得的余能也常常表示成力的函数。余能是一个数学量,它不像应变能那样具有明显的物理意义,但从图中可以看出,它与应变能之和等于 $P_1\Delta_1$,即

$$U^* + U = P_1\Delta_1$$

类似地可以定义单位体积的余能 u^* 为

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon d\sigma \quad (24-5)$$

它等于图 24-1d 的应力应变曲线上面的一块面积,而杆的总余能就等于单位体积的余能 u^* 在整个体积上的积分:

$$U^* = \int_V u^* dV \quad (24-6)$$

在理解应变能和余能这两个概念时,要注意到应变能一般表示成位移的函数,而余能则表示成力的函数。这样的表示与它们的定义是一致的,而且也与后面一系列的原理和定理是一致的。

三、非线性结构的概念

作为一般性的讨论,上面我们定义应变能和余能时假设应力应变关系或荷载位移关系是非线性的,即以曲线而不是以直线表示这些关系。这种情况出现在非线性结构中。非线性的原因

一般有两种,一种可能是材料的非线性,即结构材料的应力应变关系不是直线,不满足虎克定律;另一种可能是由结构的变形引起,称为几何非线性。例如上册第十二章第五节讨论过的轴向受压与横向受弯联合作用的杆,由于杆的横向挠曲变形而改变了轴力的作用性质,也就是说由于挠曲而使本来只起压缩作用的轴力也引起弯矩(附加弯矩),于是杆产生附加弯曲。这时,纵使杆的材料仍然服从虎克定律,但外荷载与挠度的关系将是非线性的。

不管是存在材料非线性还是几何非线性,我们都假设材料保持弹性,即假设在卸载时,结构按原来的荷载位移关系恢复原来的形状而无残余变形,这就是所谓非线性弹性体。应当注意到,叠加原理只适用于线性结构,对于非线性结构,一般是不能用叠加原理的。

例题 24-1 设图 24-1 所示拉杆的荷载位移关系是 $P=C\sqrt{\Delta}$, 式中 C 为常数(图 24-2), 试计算杆中的应变能和余能。

解: 根据 $P=C\sqrt{\Delta}$, 从式(24-1)计算得应变能为

$$U=\int_0^{\Delta} P d\Delta=\int_0^{\Delta} C \sqrt{\Delta} d\Delta=\frac{2}{3} C \Delta^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3} P \Delta$$

为求余能, 我们把 $P=C\sqrt{\Delta}$ 变成 $\Delta=\frac{P^2}{C^2}$, 代入式(24-4)中算得余能为

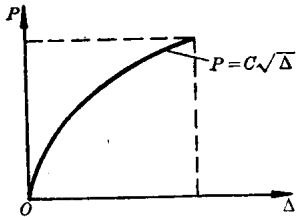
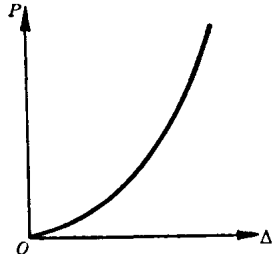


图 24-2

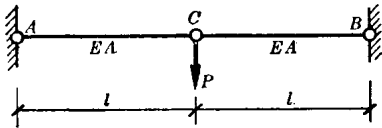
从图中也可看出, 由于给出的荷载位移关系 $P=C\sqrt{\Delta}$ 是一抛物线方程, 所以曲线下面与上面的面积自然分别为 $\frac{2}{3} P \Delta$ 和 $\frac{1}{3} P \Delta$ 。

例题 24-2 图 24-3a 所示结构由两根水平杆 AC 和 CB 组成, 各杆长为 l , 杆的材料为线性弹性, 其拉压刚度为 EA 。竖向荷载 P 作用于铰 C 处。试求荷载 P 与位移 Δ 之间的关系, 并计算体系的应变能和余能。

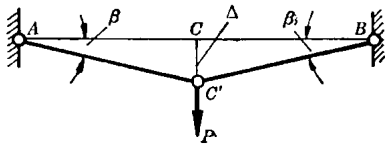
解: C 点的位移记作 Δ , 由图 24-3b 知两杆之伸长为

$$\Delta l = \overline{AC'} - \overline{AC} = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l = l \left(1 + \frac{\Delta^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} - l$$


(c)



(a)



(b)

图 24-3

把上式右端第一项按二项式展开, 略去高阶微量, 只取展开式的前面两项, 得

$$\Delta l \doteq l \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{l^2} \right) - l = \frac{\Delta^2}{2l} \tag{a}$$

由虎克定律得两杆中的轴力为

$$N = \sigma A = E \epsilon A = EA \frac{\Delta l}{l} \tag{b}$$

又由铰 C 分离体的平衡条件得

$$N = \frac{P}{2 \sin \beta}$$

由于 β 很小, $\sin \beta \approx \beta \approx \frac{\Delta}{l}$, 因此

$$N = \frac{Pl}{2\Delta} \quad (c)$$

解联立方程 (a)、(b)、(c), 消去其中的 N 和 Δl , 可得出荷载位移关系如下:

$$P = \frac{EA\Delta^3}{l^3} \quad \text{或} \quad \Delta = \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}}$$

这说明荷载位移关系是非线性的, 其荷载位移曲线如图 24-3c 所示。这是几何非线性的一个例子。

由式 (24-1) 算得体系的应变能为

$$U = \int_0^\Delta P d\Delta = \int_0^\Delta \frac{EA\Delta^3}{l^3} d\Delta = \frac{EA\Delta^4}{4l^3}$$

由式 (24-4) 算出体系的余能为

$$U^* = \int_0^P \Delta dP = \int_0^P \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} dP = \frac{3P^{4/3}l}{4\sqrt[3]{EA}}$$

上面以受拉杆为例给出了应变能和余能的定义。对于其它受力情况, 仍然可以用式 (24-1) 和 (24-4) 来计算应变能和余能, 因为式中的 P 和 Δ 实可看作是广义力和广义位移。例如两端受扭矩 M_K 作用的圆轴, 扭转角为 φ , 则圆轴的应变能是

$$U = \int_0^{\varphi_1} M_K d\varphi \quad (24-7)$$

其余能是

$$U^* = \int_0^{M_{K1}} \varphi dM_K \quad (24-8)$$

式中 M_K 和 φ 的关系可以是线性的, 亦可以是非线性的。

又如杆件受弯的情形, 考察其中微段 dx , 该微段的外力是一对力偶 M , 相应的广义位移是微段两侧截面的相对转角 $d\theta$ 。我们把杆的变形曲线的曲率记作 $\kappa = \frac{d\theta}{dx}$, 则 $d\theta = \kappa dx$ 。于是单位长度梁段的应变能和余能分别是

$$u = \int_0^{\kappa_1} M d\kappa \quad (24-9)$$

$$u^* = \int_0^{M_1} \kappa dM \quad (24-10)$$

整根杆的应变能和余能是单位长度上的能量沿杆的全长积分:

$$U = \int_0^l u dx \quad (24-11)$$

$$U^* = \int_0^l u^* dx \quad (24-12)$$

例题 24-3 如图 24-4a 所示, 由非线性弹性材料制成的矩形截面悬臂梁, 自由端受集中力 P 作用, 材料的应力应变关系为 $\sigma = C\sqrt{\epsilon}$, 其中 C 为常数, 且对拉压都适用。试计算梁的余能。

解: 由于梁中各横截面的弯矩不同, 应先用式 (24-10) 计算单位梁长的余能 u^* 。而要计算 u^* 又必须先推

导出弯矩 M 和曲率 κ 的关系式。

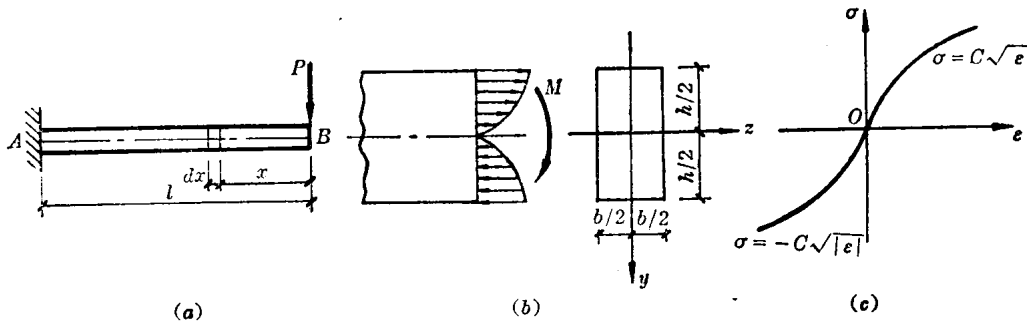


图 24-4

(1) 推导 $M-\kappa$ 关系

由平面假设可得到横截面上应变的分布规律为

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (a)$$

由题中给出的应力应变关系可得出应力的分布规律为

$$\sigma = C\sqrt{\varepsilon} = C\sqrt{\kappa y} \quad (b)$$

由于矩形截面有两个对称轴(z 和 y), 而且应力应变关系对拉和压都一样, 因此对称轴 z 仍然是中性轴, 应力分布上下对称(图 24-4b)。由平衡条件得

$$M = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma(b \cdot dy) \cdot y = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma y dy \quad (c)$$

把式(b)代入式(c), 经计算得

$$M = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} C\sqrt{\kappa y} \cdot y dy = \frac{\sqrt{2}bh^{5/2}C}{10} \kappa^{\frac{1}{2}}$$

因此

$$\kappa = \frac{50M^2}{b^2h^5C^2} \quad (d)$$

(2) 用式(24-10)计算单位杆长的余能

$$u^* = \int_0^M \kappa dM = \int_0^M \frac{50M^2}{b^2h^5C^2} dM = \frac{50M^3}{3b^2h^5C^2} \quad (e)$$

(3) 用式(24-12)计算杆的总余能

$$U^* = \int_0^l u^* dx = \int_0^l \frac{50M^3}{3b^2h^5C^2} dx = \int_0^l \frac{50P^3x^3}{3b^2h^5C^2} dx = \frac{25P^3l^4}{6b^2h^5C^2}$$

四、线性弹性结构的应变能和余能

上面我们举了一些非线性结构的例子讨论应变能和余能的概念。但由于实际遇到的大量问题是线性的, 因而有必要讨论一下线性弹性结构的应变能和余能。

设一线性弹性结构受外荷载 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 作用, 如图 24-5a 所示, 荷载作用点相应的位移是 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 。因为是线性结构, 任一荷载 P_i 与位移 Δ_i 有直线关系, 如图 24-5b 所示。这时力 P_i 的功和余功相等, 都等于图示的三角形面积, 即

$$W = W^* = \frac{1}{2} P_i \Delta_i$$

式中 P_i 和 Δ_i 是第 i 个荷载及其相应位移的最终值。把这些外力的功和余功求和, 就是结构的

应变能和余能

$$U = U^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (24-13)$$

线性结构的应变能和余能虽然在数值上相等，但概念上是两回事，应当注意它们在概念上的差别。式(24-13)同时用力 P 和位移 Δ 来表示 U 和 U^* ，而我们知道，应变能一般表达为位移的函数，余能则表达为力的函数，为此，我们要在式(24-13)中分别用位移来表示力以得到应变能表达式，以力来表示位移而得到余能表达式。

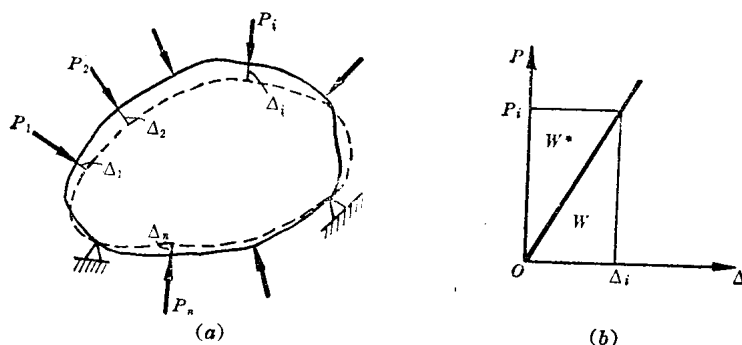


图 24-5

对于线性结构，每一个荷载 P_i 都可表示成位移的线性组合，即

$$P_i = k_{i1}\Delta_1 + k_{i2}\Delta_2 + \cdots + k_{in}\Delta_n = \sum_{j=1}^n k_{ij}\Delta_j \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n) \quad (24-14)$$

式中 k_{ij} 表示在 j 点产生单位位移时，在 i 点所需的力，把上式代入(24-13)，即可消去力，而得到以位移表示的应变能

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij}\Delta_i\Delta_j \quad (24-15)$$

同理，对线性结构，每一个位移也都可以表示成力的线性组合，即

$$\Delta_i = f_{i1}P_1 + f_{i2}P_2 + \cdots + f_{in}P_n = \sum_{j=1}^n f_{ij}P_j \quad (24-16)$$

式中 f_{ij} 表示 j 点作用单位力时，在 i 点产生的位移。把上式代入(24-13)，可消去位移，从而得到以力来表示的余能

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}P_iP_j \quad (24-17)$$

式(24-15)和(24-17)表明，对于线性结构，应变能和余能都可以表示成位移的二次函数，也可以表示为力的二次函数。

上面是从外功的角度讨论了线性结构的应变能，但在实际计算结构的应变能时，往往是从结构各杆件的内力或杆内各截面的位移出发求应变能的。下面就来推导杆受拉压、扭转和弯曲时的应变能表达式。

1. 轴向拉压应变能

先看轴向受拉压的杆, 前面已给出单位体积应变能的公式(24-2), 因 σ 与 ϵ 是直线关系, 所以

$$u = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

而轴向拉压杆横截面上的应力 σ 是均匀分布的, 所以杆的应变能为

$$U = \int_V u dV = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma \epsilon A dx$$

式中 A 是杆横截面面积。设轴力为 N , 弹性模量为 E , 则 $\sigma = \frac{N}{A} = E\epsilon$, 于是上式可写成

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l N \epsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA \epsilon^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx \quad (24-18)a$$

等号右边最后一个表达式中的 $\frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dx$ 表示 dx 微段的应变能, 即 $\frac{1}{2} N \left(\frac{N dx}{EA} \right)$, 它就是前面所说

以内力表示的应变能的形式, N 、 $\frac{N dx}{EA}$ 的意义可参看图 24-6a。

若轴力 N 沿杆长不变, 则应力 σ 和应变 ϵ 沿杆长是常数, 杆的伸长 $\Delta l = \epsilon l$, 由式(24-18)a得

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} \quad (24-18)b$$

2. 纯弯曲应变能

我们知道, 对于线性材料, 弯矩 M 和曲率 κ 之间的关系是

$$M = EI \kappa = EI \frac{d\theta}{dx}$$

或

$$\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

上式中 θ 是截面的转角, y 是挠度。

把上式代入式(24-9), 积分得单位长度杆段的应变能

$$u = \int_0^{\kappa} M d\kappa = \frac{1}{2} M \kappa = \frac{1}{2} EI \kappa^2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI}$$

把上式沿杆长积分, 得杆的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \quad (24-19)$$

等号右边最后一个表达式, 其中 $\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} M \left(\frac{M dx}{EI} \right)$ 是以内力 M 表示的微段 dx 的弯曲应变能,

可参看图 24-6b。

3. 剪切应变能

同理, 如图 24-6c 所示, 当杆的微段 dx 受剪力 Q 作用, 其相应的应变能是 $\frac{1}{2} Q \left(\frac{kQ dx}{GA} \right)$, 其中

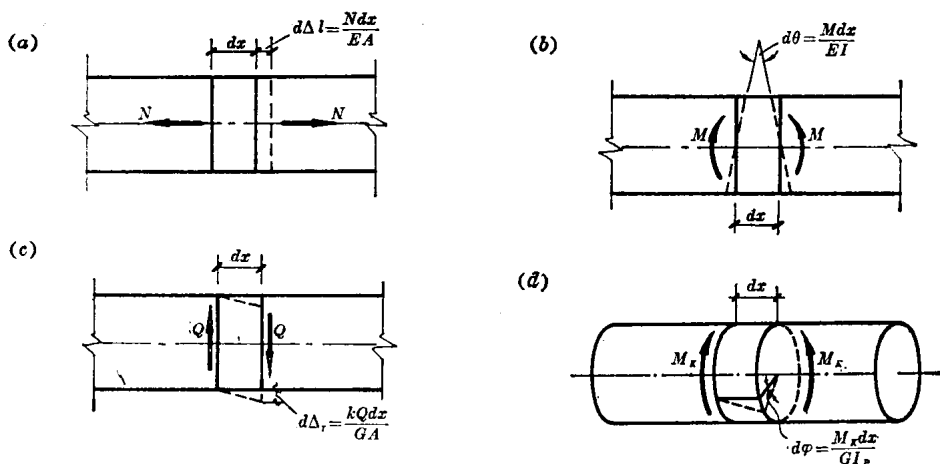


图 24-6

$\frac{kQdx}{GA}$ 是微段的剪切变形 $d\Delta_r$, k 是与截面形状有关的截面形状系数, 它反映出剪应力沿截面高度分布的不均匀性。所以全杆的应变能是

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{kQ^2 dx}{GA} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{GA}{k} \left(\frac{d\Delta_r}{dx} \right)^2 dx \quad (24-20)$$

4. 扭转应变能

当圆杆受扭时(图 24-6d), 在微段 dx 中的扭转角为 $d\varphi = \frac{M_x dx}{GI_p}$, 所以微段的扭转应变能可写为 $\frac{1}{2} M_x \left(\frac{M_x dx}{GI_p} \right)$ 。于是全杆的扭转应变能是

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{GI_p} = \frac{1}{2} \int_0^l GI_p \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (24-21)a$$

如果圆杆上无分布扭矩, 只在两端有扭矩作用, 则上式可写为

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{GI_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{GI_p}{l} \varphi \right)^2 \frac{l}{GI_p} = \frac{1}{2} \frac{GI_p}{l} \varphi^2 \quad (24-21)b$$

从上面几种应变能表达式(24-18)、(24-19)、(24-20)、(24-21)可以看出, 应变能是位移或力的二次函数, 这是线性结构的共同特点。有了上述各式, 就可以从杆的内力或由各截面的位移出发, 计算应变能。

第二节 卡氏定理

如图 24-7 所示, 设结构受一组荷载 $P_1, P_2, \dots, P_n$ (广义力) 作用, 荷载的作用点产生位移 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (广义位移)。理论上每一荷载 P_i 与位移 Δ_i 总是有一定的关系, 可以是线性关系或非线性关系。于是根据功和余功的定义, 我们可以得出每一荷载 P_i 的功和余功, 所有荷载的功或余功的总和, 就是结构的应

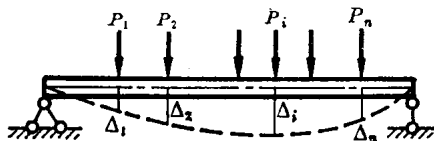


图 24-7