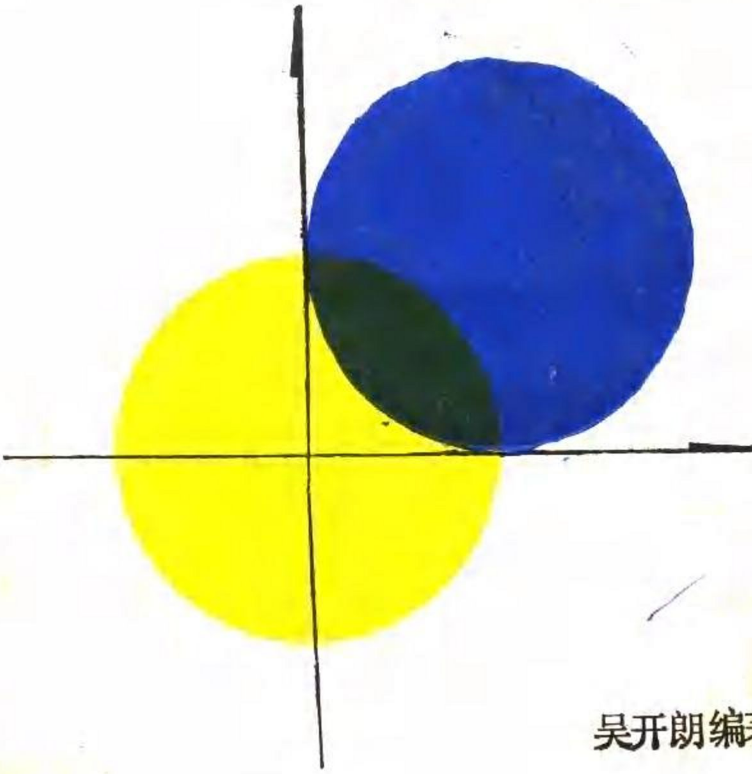
Shuxue tixing sheji yu jiefa moshi



吴开朗编著

数学题型设计与解法模式

江苏教育出版社

数学题型设计与解法模式

吴 开 朗

江 苏 教 育 出 版 社

内 容 介 绍

任何问题的解决，都要经过人脑的思维活动，因而本书首先论述那些既令人神往又使人迷茫的创造思维理论，如直觉思维与逻辑思维、发散思维与会聚思维，并以此为基础展开数学解题理论研究。书中主要内容，可以概括为“题”和“解”两个字。“题”研究了数学题的来源、证明和推理的逻辑依据、数学命题与命题演算、题型的分类、以及设计方法与常见缺陷等问题。“解”先分析搜索解题思路的一般原则和方法，而后分节讨论了各种常见解题方法的发展历史、命名由来、主要特征和具体应用，并将其归并为三种解法模式，即逻辑模式、学科模式与构造模式。当前应用较广的选择题也有专节研究。

本书主要供中学数学教师、师范院校数学专业师生及数学爱好者阅读，亦可供数学方法论工作者、自然辩证法工作者研究参考。

数学题型设计与解法模式

吴 开 朗

出版发行：江苏教育出版社

（南京中央路165，邮政编码：210009）

经　销：江苏省新华书店

印　刷：宜兴印刷厂

开本850×1168毫米 1/32 印张15 字数365,300

1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷

印数1－2,000册

ISBN 7—5343—1112—8

G·981 定价：4.95元

责任编辑 何震邦

序 言

中国科学院数学研究所胡世华教授1987年7月在《现代数学哲学问题学术讨论会》上，作了题为《信息时代的数学》的学术报告，其中提出：数学研究的两种倾向，是构造性数学和非构造性数学，或者称之为做的数学（Mathematics of Doing）和在的数学（Mathematics of Being)。数学的特点是确切性、抽象性、严密性和特有的美。并且指出现代数学已发展成为关于各种智能类型的模式分析的一门学科。本书中所提及的题型设计，也可以说是题型构造；本书论述的各种解题模式和构题方法，都属于智能研究的范畴，都是青少年一代智能培养所必需的。

美国著名数学家P·R Halmos在《数学的心脏》一文中曾说："数学究竟是由什么组成的？公理吗？定理吗？证明吗？概念？定义？理论？公式？方法？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的重要组成部分。但是，他们中的任何一个都不是数学的心脏，这个观点是站得住脚的，数学家存在的真正理由是解决问题。因此，数学的真正组成部分是问题和解。"（《数学通报》1982.4）。本书的结构就是以"题"和"解"为线索而展开的，前五章讨论"题"，后四章讨论"解"。

近几年来，国内外对于人工智能和计算机模拟思维的研究进展甚快，人工智能的研究对象，是各种智慧性问题的形式解法，目的是要计算机来解这些需要智慧的问题，如定理证明、图象识别等。要想把这些问题的解法抽象出来加以系统化、形式化，必须先对一般正常人解答问题的思维过程有较深刻地认

识。这种对解题思维过程的认识，亦即是关于“题”和“解”的理论。

在数学发展史上，对于解题理论研究的开创工作，应首推伟大的数学家和哲学家笛卡尔（Descartes，1596—1650）和莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）。笛卡尔集近代自然科学家哥白尼、布鲁诺、伽俐略、开普列等方法论研究之大成，开创了科学研究、艺术上的哲学方法、数学方法和实验相结合的全新时期。笛卡尔在《方法论》一书中曾介绍过他的这种思想的片段，他的另一本书《指导思想的法则》，是在他去世之后才出版的。在这本书中，他原计划写36节，但实际上只写了18节，有3节只写个概要，其余部分根本没有动笔。他原打算在这本书里提出解题的通用方法，亦即是用于解决这类问题的方案：（1）将任何种类的问题化归为数学问题；（2）将任何种类的数学问题化归为代数问题；（3）将任何代数问题化归为方程式求解。然而把这种意图付诸实施，其困难、障碍和错综复杂的情况，远比笛卡尔最初热情地想象要多得多。这也就是笛卡尔这本书生前未能出版的原因。

在此之后，莱布尼兹曾计划写一篇《发明的艺术》但未能如愿，而散见于他的其他著作中，却有不少关于这方面的论述。例如，他曾说过：“没有什么比看到发明的源泉更为重要的，就我看来，它比发明本身更为有趣。”此外，大数学家欧拉（Euler，1707—1783）和高斯（Gauss，1777—1855）也发表过一些经验之谈。欧拉说过：“数学这门科学，需要观察还需要试验。”高斯说过：“他的许多定理是靠归纳法发现的。”

美国著名数学家、教育家乔治·波利亚（George Polya）在解题理论方面，进行了大量的研究工作，并发表了许多经典著作。如《How to Solve it》、《Mathematics and Plansible Reasbning（Vol. 1. 2）》、《Mathematical

Discovery（Vol.1.2)》等著作。英国数学家G·H·Hardy也说："数学的定理和内容可以是无穷无尽的，但其方法总是有限的。"近二十年来，美国一些数学家，如艾伦·纽厄尔（Allen Newell）、克兰夫·肖（Cliff·Shaw）和赫伯特·西蒙（Herbert·Simon）又开始进行用计算机模拟思维解题的研究工作，并取得了很大成就。

在苏联师范学院数学系中，有的开设数学解题教学法这门课，讲的也是关于解题的理论。A·σ·瓦西列夫斯基在《数学解题教学法》一书中提出七种数学解题方法，即解方程和不等式的研究方法，等价变换法、不等价变换法、三角方程和不等式的解法、几何解题法、非标准问题的解法。在我国，北京师范大学梁绍鸿先生对几何问题解题理论也曾作过研究，并将研究成果写入《初等数学复习及研究（平面几何）》（人民教育出版社）一书中的第二章"推证通法"和第三章"证题术"。

美国数学家G·波利亚的名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，先后在我国翻译出版，他对数学思维一般规律的研究，堪称是对人类思想宝库的特殊贡献。他的数学思想，对我国数学教育界影响甚大。

《数学与猜想》中曾指出："一个真正想把数学作为他终身事业的学生必须学习论证推理，这是他的专业，也是这门科学的特殊标志，然而为了取得真正的成就，他还必须学习合情推理，即是数学猜想。数学猜想是一种直觉思维，利用它不仅可以预测解决现有问题的思路，而且还可以提出有价值的新问题。"合情推理是一种直觉思维，论证推理是一种逻辑思维，本书不仅较为详细地论述了直觉思维和逻辑思维，而且介绍了发散思维和会聚思维，并以这些令人神往的创造思维理论，作为探索数学解题理论的基石。目的在于为培养和训练有数学才能的学生，提供一些参考资料和理论依据，希望年青一代都能发

展成为更好的数学问题的提出者和解答者。

数学猜想是数学题的主要来源，也是数学发展的主要动力之一。本书在第一章第二节中介绍了几个引人入胜的数学猜想，并在以后的数学题设计以及解题模式分析中，又多次用到猜想。关于这个问题的研究是有意义的。G·波利亚在《数学猜想》一书中评论说："要成为一个好的数学家，或者一个优秀的博奕者，或者要精通别的什么事情，你必须首先是一个好的猜想家，而要想成为一个好的猜想家，我想你首先应是天资聪慧的。但只是天资聪慧还不够，你应该认真考察你的一些猜想，把它与事实进行比较。如果有必要，就对你的猜想进行修正，从而获得关于猜想失败或成功的广泛的经验。"(科学出版社 P.122)。

对数学题的题型，本书将它分为求证题和求解题两大类，这种分类法，最早起始于世界名著《原本》的作者欧几里德（Euclid，约公元前 330—275）之手。在这两大类之中，又可划分为各种题型。关于数学题题型的分类，本书不打算按选择题与非选择题来划分题型，但为了突出选择题的重要性，把"选择题的设计"，作为"数学题的设计"中的一节，与其他两节并列；把"选择题解法"与其他三种解法模式平行，专列一章，即第十章。而在讨论选择题的设计和解法时，仅论述它所独有的特征，其余都归结为一般数学题的题型设计与解法模式之中。

对于一个数学题来说，如果解答起来很困难，它就是一个大问题；如果只有一点点困难，它就是一个小问题；如果一点儿困难都没有，它也就不成为一个问题了。这些层次，不仅有简繁之分，也有其价值高低之别！只有对于大问题的解决，才能显示出较高的数学才能！我们经常听到一些数学家在评论说："这道数学题的解法真美呀！"那么，究竟什么是数学美呢？这种美的表现形式和特征又是什么呢？概括地说，数学美的主要

特征是简单性、和谐性和奇异性。简单性这种特征，要求一个最优解的结构应是最简，本书自第六章以后，多次提出这个问题，并将同一题的不同的解法，进行比较和鉴别；和谐性要求任何一个解法过程；都不得存在有逻辑矛盾，本书在第三章第三节和第五章列举了一些这类例题；对于一道数学题的新发现或新解法，往往是由于数学理论奇异性美感的支配，一些数学天才钻研数学问题之所以会达到如痴若狂的地步，其关键也是在这里。本书多次提出让读者进一步探索其中的奥秘，也就是让读者去亲身体验，由于美的信息的传递与接受而形成的美感。数学家波利亚平时爱好做题，有一次他竟异想天开地到英国参加大学入学考试，亲身体验一下这种解题引起心灵的乐趣。近年来我国数学家徐利治教授等也多次提出利用数学美的特征来激发学生学习数学的兴趣。

关于能力培养问题，是当前各国教育界普遍关心的问题。正是基于这种需要，1980年以美国全国数学教师联合会的名义，公布了一份文件，名为《关于行动的备忘录》(An Agenda for Action)。其中提出："解决问题是八十年代数学教学的核心，""设计八十年代的数学教学大纲必须以能帮助解决各种实际问题的数学方法来武装学生。"这个文件提出数学能力的范围至少要包含下面十个方面：1.解决问题的能力；2.把数学应用到日常生活里的能力；3.对答案合理性的觉察力；4.估计和近似；5.合理计算的能力；6.几何结构；7.测量；8.阅读、解释和制作图表、框图的能力；9.用数学作予报；10.计算机常识。

1984年我国大学校长访苏代表团，在苏联收集到一些教学大纲，看到他们从1983年开始把"典型计算法"正式列入大纲要求。这种"典型计算法"要求为教学配备三种类型的习题：1.为巩固学生所学的概念，加深对所学知识的理解并提高学生

逻辑思维能力的理论题；2.训练学生综合分析问题的理论练习题；3.提高学生独立地解决具体问题的计算能力的计算题。

苏联科学院能力研究所主任克鲁切茨基在其新著《中小学生数学能力心理学》一书中，提出中小学生数学能力应由下列九种成份组成：1.能使数学材料形式化，并用形式的结构，即关系和联系的结构来进行运算的能力；2.能概括数学材料，并能从外表上不同的方面去发现共同性的能力；3.能用数学和其中符号进行运算的能力；4.能进行有顺序的严格分段的逻辑推理能力；5.能用简缩的思维结构来进行思维的能力；6.能逆转心理过程，以顺向思维系列过渡到逆向思维系列的能力；7.思维的机动灵活性，即从一种心理运算能力过渡到另一种心理运算的能力；8.数学记忆力，关于概括化、形式化结构和逻辑模式的记忆能力；9.形成空间概念的能力。

由此可见，对于数学解题理论的研究，也是基于对数学教育中学生能力培养问题之急需，这个问题，目前已引起我国教育界和学术界的重视。

目　录

第一章 数学题的来源

中国数学会理事长王元在《中国大百科全书·数学》卷试写条目中提出："纯粹数学研究的最基本的对象是'数'与'形'。因此，由'几何图形'引出的几何直觉与由'数'引出的数量关系与概念，都是由数学发展本身的矛盾而产生，它是数学发展的极为丰富的源泉与背景之一。因此，在数论中未解决的问题比已经解决的问题多得多，而且永远是如此。"

数学发展到今天，犹如一棵巍然挺立的大树，枝繁叶茂，亭亭如盖。然而，数学作为一门有组织的、独立的和理性的学科来说，在古希腊学者登场之前（即是公元前600年之前）是不存在的。在比这更早的一些古代文明社会中，只有数学知识的萌芽，那时只认识一些最简单的几何图形，如直线、角、圆、三角形等。同时这些概念的形成，都是来自于实践，例如：在中文里对于直角三角形的一条直角边称为股，而对另外两边分别称为勾和弦，这就是我国古代算术书上所说的"勾三股四弦五"。在英文中对于直角三角形的两边叫两臂。在原始文明社会中，只会使用一、二、三……这些整数。劳动创造了双手，十指伸屈可以计数，因而，十进制也就慢慢地固定下来。以后人们逐步引入数的文字记号，并认识了一些简单的运算法则。

1900年在巴黎举行第二届国际数学家代表大会上，三十八岁的大卫·希尔伯特（Darid Hilbert，1862——1943）应邀在这个大会上以十分高昂的姿态作了数学史上著名的《数学问题》报告。在报告之前，他曾与当时的大数学家闵柯夫斯基共

问研究过。在这个报告中，他向跨入新世纪的数学家们提出了23个问题，这些问题一直吸引着许多数学家的注意，对本世纪数学的发展产生了强烈的影响。他在这个报告中曾说："数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？在每个数学的分支中，那些最初最老的问题肯定是起源于经验，是由外部的现实世界中所提出。整数运算法则就是以这种方式在人类文明的早期被发现的。正如今天的儿童通过经验的方法来学习运用这些规则一样。……但是，随着各门数学分支的进一步发展，人类的智力，受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合，一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有成果的问题，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现。"

综上所述，可知数学题的来源有二：一是来源于人类生产和生活的实践，并经由数学工作者加工整理和提炼；另一是来自于数学家的猜想，猜想并不是瞎说，它是在一定的观察和实验基础上所作出的一种推测。这种猜想是数学发展的主要动力之一。

许多自然科学家和心理学家都认为：科学研究与发明创造都是"从提出问题而开始的"。爱因斯坦曾说过：提出一个问题往往比解决一个问题更重要。英国科学哲学家波普把科学发现的逻辑表述为"$P_1 \to T$，$T \to E$，$E \to P_2$"，即"问题$_1$→试探性理论→消除错误→问题。"这样一个图式，并认为："科学只能发端于问题。"*苏联心理学家鲁宾斯坦早就说过："思维起源于问题的情景"，"是从分析问题情景而开始

*K.波普：《科学发现的逻辑》，见《自然科学哲学问题》1981，2.