实变函数

（第二版）

周民强 编著

北京大学出版社

新登字（京）159号

内 容 提 要

本书是作者在多年教学实践的基础上编写而成的，内容以 n 维欧氏空间上的实值函数为对象，介绍勒贝格测度和积分理论。全书共分六章：集合与点集，勒贝格测度，可测函数，勒贝格积分，微分与不定积分，函数空间 $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$。为使读者对积分理论的全貌有一个粗略的了解，作者在引言中编写了“黎曼积分评述”和“勒贝格积分思想简介”。本书以充分发挥实分析功能为基准，强调基础训练，为此编入大量例题和恰当练习。

本书这次修订不仅校正了一些笔误与误印之处，还重新删补了各章习题，使它们与正文的配合更加密切。增添了部分习题的解答与提示。特别还列入“勒贝格传”，使读者了解勒贝格积分论的来龙去脉，对激发学习兴趣与发奋图强不无助益。本书可作为大专院校数学系学生的教材或教学参考书。

书　　名：实变函数（第二版）
著作责任者：周民强　编著
责任编辑：刘　勇
标准书号：ISBN 7-301-02842-3/O·360
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168毫米 32开本 10.125印张 256千字
1995年6月第二版　1995年6月第一次印刷
定　　价：13.20元

引　言

一、谈谈 Riemann 积分

实变函数的中心内容是Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论，它是Riemann(1826—1866)积分的推广与发展，创立于20世纪初期，为近代分析奠定了基础．因而，在这里对Riemann积分理论作一简单回顾，将会有助于我们今后的学习．

在数学史上，第一个提出用分割区间、作和式的极限来严格地定义积分的要推Cauchy(1789—1857)．他考察的积分对象是在$[a,b]$上的连续函数，并用连续函数的中值性质来推导积分的存在性(他还提出用极限来定义函数在无界区域上的积分以及函数具有瑕点的积分)．

然而Cauchy关于积分存在性的证明只适用于函数至多有有限个不连续点的情形．于是，对于具有无穷多个不连续点的函数的积分存在性问题引起了许多学者的兴趣．

在对积分学发展起过推动作用的早期的工作中，应该提到Fourier(1768—1830)关于三角级数的工作．在1807年他指出，任一定义在$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$可表示为三角级数：

$$a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_n\cos nx + \cdots,$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \end{aligned}\right. \qquad n=0,1,\cdots,$$

不过，这一陈述缺乏严格的论证。1837年 Dirichlet(1805—1859)对此提出了一些条件，其中特别提到了函数的可积性。

Riemann 在研究三角级数时，注意到上述工作，并特别讨论了函数的可积性问题。他不先假定函数是连续的，而去探求一个函数可积与否是什么性态？从这样一个角度出发，他在1854年的论文“关于一个函数展开成三角级数的可能性”中，给出了积分的定义以及函数可积的充要条件，这一条件，后来由 Darboux (1842—1917)以更加明确的形式给出。

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数。作分划

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

且令
$$\left.\begin{aligned}M_i&=\sup\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\\ m_i&=\inf\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\end{aligned}\right.\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\overline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),\quad \underline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分：

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\inf_{\Delta}\overline{S}_\Delta,\qquad \underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\Delta}\underline{S}_\Delta.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，记其公共值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分。

若令 $|\Delta|=\max\{x_i-x_{i-1}:i=1,2,\cdots,n\}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分且必要条件是：

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0. \tag{1}$$

Riemann 积分的重要性是不言而喻的，它对于处理诸如逐段连续的函数以及一致收敛的级数来说是足够的，并至今仍然是微

积分教程的主要内容之一。然而随着 Cantor(1845—1918)关于集合论的一系列工作的创始，出现了具有各种“奇特”现象的函数。对此不仅在研究函数的可积性，而且在积分理论的处理上还发生了许多困难。下面就 Riemann 积分理论中的几个主要方面来作一些简要分析。

（一）可积函数的连续性

上面提到，函数的可积性是与(1)等价的，由于(1)式涉及两个因素：分割小区间的长度$(x_i - x_{i-1})$以及函数在其上的振幅$(M_i - m_i)$。因此，为使(1)成立，粗略说来，就是在$|\Delta|\to 0$的过程中，其振幅$(M_i - m_i)$不能缩小的那些相应项的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到，定义在$[a,b]$上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值，从而是可积的)。我们知道，函数振幅的大小与该函数的连继性有关，于是，条件(1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围。这就是说，可积函数必须是差不多连续的。Riemann 积分的理论是以“基本上”连续的函数为研究对象的。

（二）极限与积分次序交换问题

在数学分析中，我们经常遇到的一个重要问题是两种极限过程的交换次序，尤其是积分与函数列的极限的交换问题。

我们知道，在一般微积分教科书中，都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换，不过，这一要求是过分强了。

例 $f_n(x) = x^n (0 \leqslant x \leqslant 1)$。它是点收敛而不是一致收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

在 Riemann 积分意义下，存在下述有界收敛定理(见 Amer. Math. Monthly, 78, 1980)。

定理(有界收敛定理) 设

(i) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在$[a,b]$上的可积函数；

(ii) $|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$；

(iii) $f(x)$是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad x\in[a,b],$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里，不仅受到条件(ii)的限制，而且还必须假定极限函数$f(x)$的可积性。下例表明，即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性。

例 设$\{r_n\}$是$[0,1]$中全体有理数列，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1$，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这里，每个$f_n(x)$皆是$[0,1]$上的 Riemann 可积函数且积分值为零，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

但极限函数$f(x)$不是 Riemann 可积的，这是因为

$$\overline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \underline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

从而也就谈不上积分号下取极限的问题。

有界收敛定理看起来也有点使人惊异，因为我们不难证明，

若有定义在$[a,b]$上的可积 函 数 列$\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$，而且满足$|f_n(x)|\leqslant M,|g_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，以及

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x),$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x.$$

但$f(x)$之积分仍然可以不存在。然而，上述积分之极限值并不依赖于$\{f_n(x)\}$本身，而依赖于$f(x)$。既 然 如此，不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了。

（三）关于微积分基本定理

我们知道，积分和微分之间的联系乃是微积分学的中枢：设$f(x)$在$[a,b]$上是可微函数且$f'(x)$在$[a,b]$上是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a),\quad x\in[a,b].$$

这就是说，从$f'(x)$通过积分又获得了$f(x)$。显然，为使这一微积分基本定理成立，$f'(x)$必须是可积的。早在1881年，Volterra（1860—1940）就作出了一个可微函数，其导函数是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的。这就大大限制了微积分基本定理的应用范围。

（四）可积函数空间的完备性

Riemann 积 分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性上。我们知道，在积分理论中，函数类用距离

$$d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

（或

$$d(f,g)=\left\{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 \mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

等）作成距离空间是完备的这一事实具有重要意义。近代泛函分析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性。

例如，记$R([0,1])$为$[0,1]$上 Riemann 可积函数的全体。引进距离

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x,\quad f,g\in R([0,1])$$

(其中认定当$d(f,g)=0$时，f与g是同一元)。我们说$R([0,1])$不是完备的意思，是指当$f_n\in R([0,1])(n=1,2,\cdots)$且满足

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{d}(f_n,f_m)=0$$

时，并不一定存在$f\in R([0,1])$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0.$$

例如，令$\{r_n\}$是$(0,1)$中有理数的全体，设I_n是$[0,1]$中的开区间，$r_n\in I_n$，$|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$，并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n.\end{cases}$$

易知$f(x)$在$[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$上是不连续的，它不是 Riemann 可积的，且不存在 Riemann 可积函数$g(x)$，使得$d(f.g)=0$。但若作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k,\end{cases}$$

则$f_n(x)\in R([0,1])$，且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d(f_n,f_m)=0,$$

以及 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，故 $R([0,1])$按 上述距离 d 是不完备的。

随着人们对数学分析各种课题的深入探讨，积分理论的研究工作也进一步展开.特别是通过Jordan(1838—1922)，Borel(1871—1956)等人关于点集测度理论的成果，揭 示 出测度与积分的联系。现代应用最广泛的测度与积分系统是 Lebesgue(1875—1941)完成的。1902年他在“积分、长度与面积”的论文中所阐明的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点。Lebesgue 积分理论不仅蕴涵了 Riemann 积分所达到的成果，而且还在较大程度上克服了后者的局限性。在 Lebesgue 以 后，还有许多数 学 家 如 Riesz (1880—1956)，Denjoy(1884—不详)，Radon(1887—1956) 都 对积分理论的进一步发展作出了重要贡献。当然，今天我们来学习 Lebesgue 测度与积分时，不一定拘泥于原有的体系。

二、Lebesgue积分思想简介

对于定义在$[a,b]$上的正值函数，为使$f(x)$在$[a,b]$上可积，按照 Riemann 的积分思想，必须使得在划 分$[a,b]$后，$f(x)$在多数小区间 Δx_i 上的振幅能足够小，这迫使具有较多振动的函数被排除在可积函数类外。对此，Lebesgue 提 出，不 从 分割区间入手，而是从分割函数值域着手。即任给$\delta>0$，作

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=M,$$

其中，$y_i-y_{i-1}<\delta$，m,M 是 $f(x)$在$[a,b]$上的下界与上界。并作点集

$$E_i=\{x:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这样，在 E_i 上，$f(x)$的振幅就不会大于 δ。再计算

$$|I_i|=\text{“矩形面积”}=(\text{高})y_{i-1}\times\text{“底边长度”}|E_i|,$$

并作和

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|I_i|,$$

它是 $f(x)$在$[a,b]$上积分(面积)的近似值。然后,让 $\delta\to 0$,且定义

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|I_i|$$

(如果此极限存在)。也就是说,采取在 y 轴之分划来限制函数值变动振幅,即按函数值的大小先加以归类。Lebesgue 对这一设计作了生动的譬喻,大意如下:假定我欠人家许多钱,现在要归还。此时,应先按照钞票的票面值的大小分类,再计算每一类的面额总值,然后相加,这就是我的积分思想;如果不按面值大小先分划,而是按从钱袋中摸出的先后次序来计算总数,那就是 Riemann 积分的思想。

当然,按照Lebesgue 积分构思,会带来一系列的新问题。首先,分割函数值范围后,所得到的点集

$$E_i = \{x: y_{i-1}\leqslant f(x) < y_i\},\quad i=1,2,\cdots,n$$

不一定是一个区间,$[a,b]$也不一定是互不相交的有限个区间的并,而可能是一个分散而杂乱无章的点集及其并集。因此,所谓“底边长度”$|E_i|$的说法是不清楚的,即如何度量其“长度”以及是否存在“长度”均成问题。这促使Lebesgue 去寻找一种测量一般点集“长度”的方案,并称点集E的“长度”为测度,记为$m(E)$。当然,这一方案必须满足一定的条件,才符合常理。如$E=[0,1]$时,应有

$$m([0,1])=1;$$

又如$E_1\subset E_2$,应满足

$$m(E_1)\leqslant m(E_2)$$

特别是当$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$时,希望有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n).$$

然而，这些限制使人们无法设计出一种测量方案，能使一切点集都有度量。因此，欲使 Lebesgue 积分思想得以实现，必须要求分割得出的点集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是可测量的——可测集。这一要求能否达到，与所给函数 $y=f(x)$ 的性质有关。从而规定：凡是对任意 $t\in\boldsymbol{R}^1$，点集

$$E=\{x:f(x)>t\}$$

均为可测集时，称 $f(x)$ 为可测函数。这就是说，积分的对象必须属于可测函数范围。

为了系统介绍 Lebesgue 积分理论，就形成了测度——可测函数——积分这样一个系统①，它构成了本书的第二、三、四章。当然，作为一门数学课程，我们还要先介绍点集论的有关知识，这对点集测度理论是必要的准备，它作为本书的第一章。

① 随着积分论的发展，还有其他建立积分论的体系。

序

本书以 n 维欧氏空间及其上实值函数为背景，介绍Lebesgue测度和积分理论，它是近代解析数学领域的基础知识.《实变函数》是大专院校数学系高年级学生的必修或选修课程.

《数学分析》主要研究定义在区间上的连续函数，《复变函数》是讨论定义在区域上的解析函数的性质的，《实变函数》则是将考察对象扩大到定义在可测集上的可测函数类，并使微积分在更宽松的环境中加以运用。这就使得实分析处理问题的思想方法，较前更加细致而活泼，形成学习过程中数学思维能力的一个飞跃.为使教与学的过程较好地适应这一过渡，本书配备了较多难度适中的练习题，并力求使它们与课程的基本内容有较密切的配合。正文中还列入了相当数量的例题，可以帮助学生提高自学和解题能力，并开阔思路。书中标有(*)的部分，可根据实际情形而取舍.

本书是 1985 年版本的修订本.增加了Lebesgue 积分思想简介和 Lebesgue 传，较大幅度地调整了每章的练习，并对其中一部分作出解答和提示，以供读者参考.

作　者

1994 年 7 月

目　　录

第一章 集合. 点集

集合论自十九世纪八十年代由德国数学家Cantor创立以来，已发展成为一个独立的数学分支，其基本概念与方法已渗入到二十世纪的各个数学领域. 集合论是研究集合的各种性质的，它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关，现在它是实变函数理论的预备知识. 本章仅对一般集合与 R^n 中的点集知识作一必要的介绍.

§1.1 集合与子集合

集合是一个不给定义的概念. 就我们的实际应用范围来说，通过朴素的描述方法来进入这一领域已是足够的了. 例如：自然数全体构成一个集合，记为 N；有理数全体构成一个集合，记为 Q；实数全体构成一个集合，记为 R^1. 总之，我们所指的集合是按照某种规定而能够识别的一些具体对象或事物的总体. 构成集合的这些对象或事物称为集合的元素.

一般地说，集合的符号用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等来表示，集合的元素用小写字母 $a, b, \cdots, x, y, z$ 等来表示. 设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则记为 $a\in A$（叫做 a 属于 A）；$a\overline{\in} A$（叫做 a 不属于 A）表示 a 不是 A 的元素. 例如 $2/3\in Q$，$\sqrt{2}\overline{\in} Q$ 等等.

通常采用的集合表示法有两种：其一是列举，例如由数1，2，3，4，5构成的集合记为 A 时，就用符号

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

来表示. 也就是说，在花括号{ }内将其元素一一列举出来；其二是用元素所满足的一定条件来描述它，如上述之 A 也可写成

$$A=\{x:x<6,\ x\in N\}。$$

在这里，{ }号内分为两部分来写，且用符号“:”隔开，前一部分是集合中元素的代表符号，后一部分表示元素所满足的条件或属于本集合的元素所特有的规定性质。有时也把 A 写成 $\{x\in N: x<6\}$。

例 集合 $\{x\in \boldsymbol{R}^1:0<\sin x\leqslant 1/2\}$ 表示由满足

$$0<\sin x\leqslant\frac{1}{2}$$

的实数 x 所构成。有时也简写成 $\{x:0<\sin x\leqslant 1/2\}$。

例 集合 $\{x\in \boldsymbol{R}^1:|x-x_0|<\delta,x_0\in \boldsymbol{R}^1\}$ 就是开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$。

定义1.1 对于两个集合 A 与 B，若 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集合，简称 A 是 B 的子集，记为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A。$$

$A\subset B$ 也称为 A 含于 B 或 B 包含 A。若 $A\subset B$ 且存在 B 中元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集。

例 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 $\{1\}$，$\{1,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,2,3\}$ 均是 A 的子集。

注意，上例中 $\{1\}$ 表示由单个元素“1”所构成的集合，它是 A 的子集而不是 A 的元素。从而可知 $\{1,\{2,3\}\}$ 不是 A 的子集。

为了论述与运算的方便，我们还指定一种所谓空集，它是不包含任何元素的集合，记为 $\varnothing$。空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集。

定义1.2 设 A,B 是两个集合。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A=B$。A 与 B 相等就是 A 与 B 的元素完全相同，即 A 与 B 是同一个集合。

例 $\{x\in \boldsymbol{R}^1:x^2>1\}=\{x\in \boldsymbol{R}^1:|x|>1\}$。

集合 $\{x:p(x)\}$ 与集合 $\{x:q(x)\}$ 是否相等，就是看条件 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是否等价。

定义1.3 设 I 是任意给定的一个集合，对于每一个 $\alpha\in I$，

我们指定一个集合 A_α。这样我们就得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为$\{A_\alpha: \alpha\in I\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$。这里的$I$常称为指标集。当$I=N$时，集合族也称为集合列，简记为$\{A_i\}$或$\{A_k\}$等等。

例 设r, s, t是三个互不相同的数，且$A=\{r, s, t\}$，$B=\{r^2, s^2, t^2\}$，$C=\{rs, st, rt\}$。若$A=B=C$，则$\{r, s, t\}=\{1, w, w^2\}$，其中

$$w=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\qquad i \text{ 是虚数单位。}$$

证明 因为集合相等就是其元素相同，所以将每个集合中的全部元素作数值和，所得到的三个数应该相等，若令其和为K，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

从而得到

$$K^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)=3K,$$

即$K=3$或0。又从数值的乘积看，同理有

$$rst=r^2s^2t^2,$$

故知$rst=1$。于是在$K=3$时，可知r, s, t为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

的根，亦即$(x-1)^3=0$之根。但此时有$r=s=t=1$，不合题意。这说明$K=0$，此时r, s, t为方程

$$x^3-1=0$$

的根，即$x=1$以及$x=(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2$。

§1.2 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段，从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用，这种分解与合成可以通过各种集合间的运算来表达，现