现代数学引论

陈国先 王筱军 编著

科学出版社

现代数学引论

陈国先　王筱军　编著

JY1/38115

北京师范大学
藏 1684440 书
图书馆

科学出版社

1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书概括了数理逻辑、集合论和抽象代数的基本内容，藉使读者研读现代数学.

读者对象为高校数学系师生和想要学习现代数学的其他专业人员.

现代数学引论

陈国先 王筱军 编著

责任编辑 徐宇星 刘嘉善

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1995 年 4 月第一次印刷 印张：9 7/8

印数：1—2 000 字数：256 000

ISBN 7-03-004483-5/O · 772

定价： 13.80 元

序　言

初学数学的人，在培养严密表达概念，在使用正确的推理方法和在理解数学的基本概念等方面，通常都会遇到困难．产生这些困难的原因，首先是在数理逻辑上缺乏适当的训练，而数理逻辑作为一门学科的任务是研究证明数学定理的演绎推理；其次是不懂得集合论所使用的基本概念和方法．而集合论现已广泛应用于数学的所有分支，已成为引入和解释基本数学概念(关系、映射等等)的基础；再其次，是不懂得抽象代数的基本概念，而抽象代数已得到了蓬勃的发展，并且正在影响其余的各个数学分支．

本书包括了数理逻辑、集合论和抽象代数等现代数学的基本内容，并自成体系，具有广泛的读者面——那些希望进一步学习数学或者想要熟悉数理逻辑、集合论和抽象代数基本概念的工科、理科和文科的师生、工程技术人员．作者意图使本书能鼓舞一部分读者深入到各个数学领域．

本书的写法不同于传统方法．首先，数理逻辑部分不居于集合论之前．作者的经验证明，初学者觉得集合论比数理逻辑容易；还有，过早地把逻辑概念应用于集合论，读者会变得习惯于证明的刻板陈述，因而不能用数学的直觉能力来领会集合论的概念和定理．再者，对本书内容如此先后顺序的安排也是基于以下原因，运用逻辑概念来定义数学概念和证明定理最好应该是在学生已经获得高等数学的某些知识之后．因此，作者决定在逻辑基础之前先讨论集合论．但为了阐述得更清楚和使读者习惯于逻辑符号表示，从前几节开始就逐渐引进逻辑符号并系统地运用它们．数理逻辑部分主要是根据它们在数学中的应用，尤其是在定理证明中的作用来讲述的，这就是为什么本书中逻辑叙述很少的原因，这样可以把更多的注意力放到推理上，而不是逻辑定律上．这样安排

特别适用于命题演算.

本书由14章组成。第一章和第三章到第十一章是集合论基础. 鉴于本书的基本特点,在第三章首先引入函数(映射、变换)的直观概念,而在第五章才介绍函数的精确定义. 材料的取舍是按它们在数学各个分支中的应用多寡而定,因此完全删去了基数和序数的算术. 名词术语的改变完全按照 Bourbaki 的规定,如偏序集称为有序集. 第二章涉及归纳法和归纳证明. 第十二章和第十三章包括了数理逻辑基础. 由于命题演算的基础性,对它比谓词演算处理得更全面. 第十二章最后一节给出了命题演算的形式化途径,并包括了完备性定理的一个简单证明. 谓词演算不是作为形式系统提出,对它的阐述集中在那些在数学推理中经常用到的推理定律和规则上,并列举了许多它在数学中的应用. 第十四章实质上是对本书的一个补充,解释了抽象代数的若干基本概念,如子代数、同态、同构、同余等等.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章 集 代 数

§1 集合的概念

集合是数学的基本概念之一. 对集合我们可以举出如下的例子: 某图书馆中所有书的集合;希腊字母表的全体字母的集合;所有整数的集合;一个多边形的各边的集合;平面上所有圆的集合等等.

不考虑组成集合的对象的特性，而仅研究其一般性质的数学分支，称为集合论[1]，它是现代数学的基础. 在 1871—1883 年间 Georg Cantor 创立了这门学科.

属于给定集合的对象称为集合的 **元素**. 元素 a **属于集合** A (或 a **是集合** A **的元素**)记为

$$a \in A$$[2]. (1)

当 $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ 时,常简写为

$$a, b, c \in A.$$

如果说 a **不属于集合** A(或 a **不是集合** A **的元素**),记为

$$a \notin A \text{ 或} \sim(a \in A). \tag{2}$$

符号～总是代表**非**或**不是那种情形**[3].

空集是没有元素的集合. 引进空集概念在数学上有很多作用. 例如,可以用"方程 $x^2+1=0$ 的所有实根的集合是空集"代替"方程 $x^2+1=0$ 不具有任何实数根."

空集用 O 表示.

---

1) 波兰数学家们，尤其是 W. Sierpinski 的许多著作，在集合论的发展中起了重要作用.

2) 符号 $\in$ 由 G. Peano 引进的,它是希腊词 $\varepsilon\sigma\tau i$ 的第一个字母.

3) 符号～是字母 N 的变形(来自拉丁字 nego，意指"否认").

元素是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的集合表示成

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}. \tag{3}$$

集合可以仅由一个元素组成．例如，所有偶素数的集合恰好只有一个元素，即2．类似于(3)，仅有一个元素 a 的集合表示成

$$\{a\}. \tag{4}$$

假如集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集[1]或集合 A 包含在集合 B 内，或 B 包含 A，记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

符号 $\subset$ 称为包含符号，由定义，$A \subset B$ 当且仅当下述条件成立：对每个 x，若 $x \in A$，则 $x \in B$[2]．以后如遇到“若…，则…”总用符号“$\Longrightarrow$”代替，“当且仅当”总用符号“$\Longleftrightarrow$”代替．因此，上面的叙述可以用符号表示为

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow (对每一x: x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{5}$$

例 所有整数的集合包含在全体有理数的集合内，因为每一个整数都是有理数．集合 $A = \{1, 2\}$ 包含在集合 $B = \{1, 2, 3\}$ 内，因为 $1 \in B$ 且 $2 \in B$．令 C 和 D 分别是图1所示的两个圆域，则集合 C 是集合 D 的子集，因为 C 的每个元素都是集合 D 的元素．所有无理数的集合包含在实数集内，因为每个无理数都是实数．

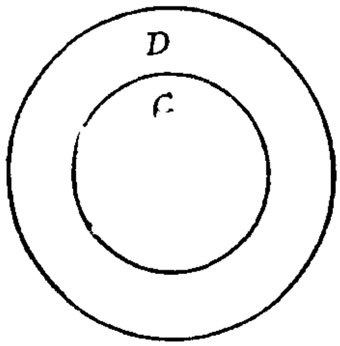

图 1

命题“A 不是 B 的子集”记为

$$A \not\subset B \quad 或 \quad B \not\supset A.$$

也可以使用下述记法：

$$\sim(A \subset B) \quad 或 \quad \sim(B \supset A).$$

从子集定义得出，$A \not\subset B$ 当且仅当并非集合 A 内的每一元素都是集合 B 的元素，即在集合 A 内存在不属于 B 的元素．用符号记为

1) 假如集 A 和集 B 互不相等，则称 A 是 B 的真子集．

2) “α 当且仅当 β”（这里 α 与 β 是由命题组成的任意公式）是指：若 α，则 β；若 β，则 α．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\sim(A\subset B)\Longleftrightarrow(\text{存在 } x,\text{ 使 } x\in A \text{ 和} \sim(x\in B)).\qquad(6)$$

例 图 2—4 指出了 $\sim(A\subset B)$ 的几个例子. 这里,集合 A, B 分别用圆域表示.

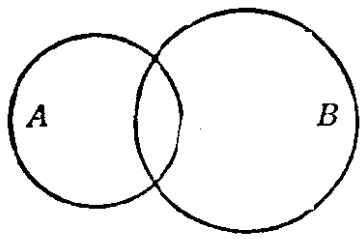

图 2

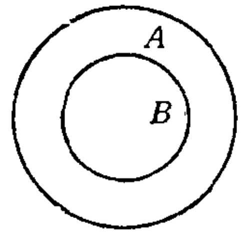

图 3

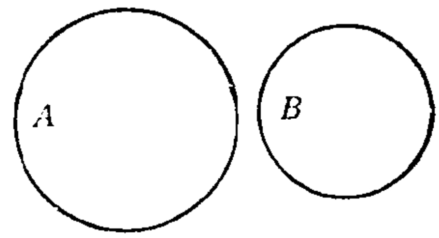

图 4

能被 3 整除的所有整数的集合不包含在能被 6 整除的所有整数的集合内，因为存在着能被 3 整除而不能被 6 整除的整数，如 9. 事实上,整数 9 属于前者,但不属于后者.

集合 A 和集合 B 相等，当且仅当它们有相同的元素. 用符号表示为

$$(A=B)\Longleftrightarrow(\text{对每一 } x;\, x\in A\Longleftrightarrow x\in B).\qquad(7)$$

例 设 A 是既能被 2 又能被 3 整除的所有整数的集合，B 是能被 6 整除的所有整数的集合，则集合 A 和集合 B 相等. 因为一个整数能被 2 和 3 整除,当且仅当它能被 6 整除,所以 A 和 B 有同样的元素.

从子集的定义得出

1.1. 对任意集合 A,B,C,

$$O\subset A,\qquad(8)$$

$$A\subset A,\qquad(9)$$

$$\text{若 } A\subset B \text{ 和 } B\subset C,\text{ 则 } A\subset C,\qquad(10)$$

$$\text{若 } A\subset B \text{ 和 } B\subset A,\text{ 则 } A=B,\qquad(11)$$

$$\text{若 } A\neq B,\text{ 则 } A\not\subset B \text{ 或 } B\not\subset A.\qquad(12)$$

公式(8)表明,空集包含在每一集合中. 因为空集没有任何元素,集合 O 的每个元素是集合 A 的元素这个条件被满足[1].

---

1) 参见第十三章 § 1例(一),216 页.

公式(9)表明，每个集合是它自身的子集。事实上集合A的每个元素当然是A的元素。

公式(10)是包含关系的传递律。为证明其成立，假定 $A\subset B$ 和 $B\subset C$，则集合A的每一元素都是集合B的元素，集合B的每一元素都是集合C的元素，由此可知集合A的每一元素都是集合C的元素，故 $A\subset C$。

要证明(11)，让我们假定 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，故A的每一元素都是B的元素，又B的每一元素都是A的元素，于是集合A和B有同样的元素，即它们相等。

公式(12)可以从(11)得出。否则必有 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，由(11)知集合A和B相等。这与假定$A\neq B$矛盾。

公式(11)常用于证明集合的相等式。

§2 集合的并

集合A和B的并(或集论和)，是指其元素是A的和B的所有元素，而且再无其它元素的集合。集合A和B的并用 $A\cup B$ 表示。从并集定义得出，$x\in A\cup B$ 当且仅当x至少是集合A、B之一的元素，即当且仅当 $x\in A$ 或 $x\in B$。“或”今后常用符号$\vee$代替。采用此约定后，$x\in A\cup B$ 的充分必要条件可用符号写成

$$(x\in A\cup B)\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B). \tag{1}$$

例 全体实数的集合是全体有理数集合与全体无理数集合的并。所有有理数的集合是全体整数的集合和所有有理数的集合的并。如果 $A=\{1,2\}$ 和 $B=\{2,3\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3\}$。另一例子如图5所示，此处用圆域表示集合A和B，集合 $A\cup B$ 由属于阴影部分的点组成。

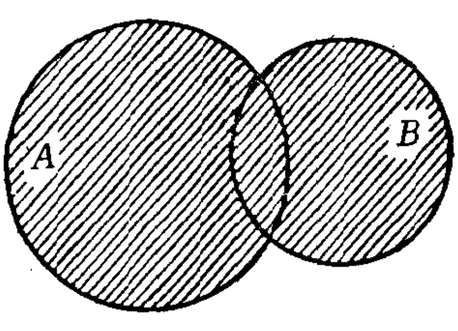

图 5

现在考虑x不是 $A\cup B$ 的元素的情形。由定义，$x\notin A\cup B$ 当

且仅当 x 至少是集合 A,B 之一的元素的条件不被满足，即当且仅当 $x\notin A$ 和 $x\notin B$。"和"以后用符号 $\wedge$ 代替。所以 $x\notin A\cup B$ 的充分必要条件可用符号表示为

$$(x\notin A\cup B)\Longleftrightarrow(x\notin A\wedge x\notin B). \tag{2}$$

下述定理[1]可以从并的定义得出：

2.1. 对任意集合 A,B,C，

$$A\cup B=B\cup A, \tag{3}$$

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C^{2)}, \tag{4}$$

$$O\cup A=A\cup O, \tag{5}$$

$$A\cup A=A. \tag{6}$$

要证明上述公式，只需证明对每个 x 下面条件满足：x 是上述等式一端的集合的元素当且仅当 x 也是等式另一端的集合的元素。例如 $x\in B\cup A$ 当且仅当 x 至少属于集合 A,B 之一，但这就表明 $x\in A\cup B$。(3) 得证。等式 (4) 从下述事实得出，$x\in A\cup(B\cup C)$ 当且仅当 x 至少是集合 A，B,C 之一的元素。类似地，$x\in(A\cup B)\cup C$ 当且仅当 x 至少属于集合 A,B,C 之一。因为 O 是空集，故 $x\in O\cup A$ 当且仅当 $x\in A$，(5) 得证。最后，$x\in A\cup A$ 当且仅当 $x\in A$，(6) 得证。

等式(3)和(4)分别是集合并运算的**交换律**和**结合律**。在形式上，它们类似于实数加法中的相应规律。类此，等式 (5) 在算术中也有相应的规律。然而，等式(6)，称为集合并运算的**幂等律**，在算术中就没有类似的了。

下一定理表示出集合的包含和并之间的关系。

2.2. 对任意集合 A,B,C,D，

$$A\subset A\cup B, \tag{7}$$

$$B\subset A\cup B, \tag{8}$$

$$\text{若 } A\subset C \text{ 和 } B\subset C\text{，则 } A\cup B\subset C, \tag{9}$$

---

1) 在 § 2—§ 5 中给出的各定理都应归功于英国数学家 G. Boole (1813—1864)。在数理逻辑方面他的研究是开创性的。

2) 律(4)在有限个集合相加时，允许省略指示运算顺序的括号。

$$\text{若 } A\subset B \text{ 和 } C\subset D, \text{ 则 } A\cup C\subset B\cup D, \tag{10}$$

$$A\subset B \text{ 当且仅当 } A\cup B=B. \tag{11}$$

公式(7)和(8),可直接从集合的包含和并的定义得出,表明集合的并包含每一个加项.

为证明(9),假定 $A\subset C$ 和 $B\subset C$,若 $x\in A\cup B$,则 x 至少属于集合 A,B 之一. 如果 $x\in A$,既然 $A\subset C$,故 $x\in C$. 如果换为 $x\in B$,由于 $B\subset C$,$x\in C$ 也成立. 故如果 $x\in A\cup B$,那么 $x\in C$,即 $A\cup B\subset C$. (9) 得证. 公式 (9) 表明,任何一个包含两个给定集的集合,也将包含此二集的并.

要证明(10),假定 $A\subset B$ 和 $C\subset D$. 由(7)和(8)导出 $B\subset B\cup D$ 和 $D\subset B\cup D$. 故从 1.1(10) 得到 $A\subset B\cup D$ 和 $C\subset B\cup D$. 又由(9),即得出 $A\cup C\subset B\cup D$. (10) 得证.

公式 (11) 指出,可以用集合的相等和并定义包含的概念. 要证明(11),先假定 $A\subset B$,因为 $B\subset B$,由(9)导出 $A\cup B\subset B$. 但由(8),又有 $B\subset A\cup B$. 由 1.1(11),从后两个包含关系导出 $A\cup B=B$. 现在假定 $A\cup B=B$,由此和(7),导出 $A\subset B$.(11) 得证.

§3 集合的交.吸收律和分配律

集合 A 和 B 的交(或集论积)是指这些集合的公共部分,即包含且仅包含既属于 A 又属于 B 的那些元素组成之集. 集合 A 和 B 的交用 $A\cap B$ 表示. 从交的定义得出,$x\in A\cap B$ 当且仅当 $x\in A$ 和 $x\in B$,或用符号表示为

$$(x\in A\cap B)\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in B). \tag{1}$$

例 能被 6 整除的所有整数的集合是所有偶整数的集合和所有能被 3 整除的整数的集合的交集. 全体有理数的集合和全体无理数的集合的交集是空集. 若 $A=\{1, 2\}$ 和 $B=\{2, 3\}$,则 $A\cap B=\{2\}$. 另一例子可用图 6 说明. 这里集合 A 和 B 分别是相应的圆域,而集合 $A\cap B$ 则由属于阴影部分的点组成.

从交集定义得出，$x \notin A \cap B$ 当且仅当 x 不属于 A 或 B，即 $x \notin A$ 或 $x \notin B$，或用符号表示为

$$(x \notin A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B). \tag{2}$$

从交集定义得出

3.1. 对任意集合 A, B, C，

$$A \cap B = B \cap A, \tag{3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C^{1)}, \tag{4}$$

$$O \cap A = O, \tag{5}$$

$$A \cap A = A. \tag{6}$$

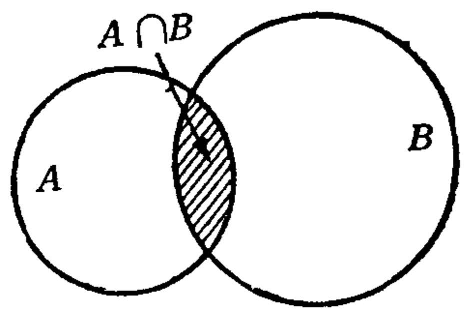

图 6

交集的定义表明，$x \in A \cap B$ 当且仅当 $x \in A$ 和 $x \in B$，即 $x \in B$ 和 $x \in A$，于是 $x \in B \cap A$. (3) 得证.

公式(4)从下一事实得出，$x \in A \cap (B \cap C)$ 当且仅当 x 属于集合 A, B, C 之中的任何一个. 类似地，$x \in (A \cap B) \cap C$ 当且仅当 x 属于集合 A, B, C 之中的任何一个.

集合 $O \cap A$ 是空集. 否则如果是非空集合，它就至少有一个元素 x，从(1)就有 $x \in O$ 和 $x \in A$，但 O 是空集，此事不可能. (5) 得证.

公式 (6) 直接从交集定义得出，因为 $x \in A \cap A$ 当且仅当 $x \in A$.

公式(3)和(4)分别是集合的交运算的**交换律**和**结合律**. 在形式上它们同实数乘法中对应算术规律是类似的. 公式 (5) 也同实数算术中相应规律类似. 相反，称为集合的交运算的**幂等律**，即公式(6)，在算术中就没有类似规律了.

下一定理描述了集合的包含与交之间的关系.

3.2. 对任意集合 A, B, C, D，

$$A \cap B \subset A, \tag{7}$$

$$A \cap B \subset B, \tag{8}$$

---

1) 律(4)在有限个集合相乘时，允许省略指示运算顺序的括号.

$$\text{若 } A\subset B \text{ 和 } A\subset C\text{，则 } A\subset B\cap C, \tag{9}$$

$$\text{若 } A\subset B \text{ 和 } C\subset D\text{，则} A\cap C\subset B\cap D, \tag{10}$$

$$A\subset B \text{ 当且仅当 } A\cap B=A. \tag{11}$$

公式(7)和(8)可直接从集合的包含和交的定义得出，并表明集合的交包含在它的每一个因子集内.

要证明(9)，假定 $A\subset B$ 和 $A\subset C$. 由此假定知，若 $x\in A$，则 $x\in B$ 和 $x\in C$，故 $x\in B\cap C$. 因而 $A\subset B\cap C$. 公式(9)表明，包含在两个给定集合内的任一集合，一定包含在这两个集合的交集内.

为证明(10)，假定 $A\subset B$ 和 $C\subset D$. 由(7)和(8)有 $A\cap C\subset A$ 和 $A\cap C\subset C$. 由此和1.1(10)，得出 $A\cap C\subset B$ 和 $A\cap C\subset D$. 再用(9)，即得到 $A\cap C\subset B\cap D$. (10)得证.

公式(11)说明可以用集合的交和相等概念定义包含. 为证明(11)，先假定 $A\subset B$，因 $A\subset A$，由(9) $A\subset A\cap B$. 故由(7)和1.1(10)有 $A\cap B=A$. 现在假定 $A\cap B=A$，由(8)得出 $A=A\cap B\subset B$，即 $A\subset B$. (11)得证.

假如集合 A 和 B 之间有 $A\cap B=O$，则称 A,B 是不相交的，即它们彼此之间没有任何公共元素. 这一术语在后文中常要遇到.

例 所有偶整数的集合和所有奇整数的集合是不相交的. 所有非负实数的集合与所有负实数的集合是不相交的. 集合 $A=\{1,2\}$ 和 $B=\{3,4\}$ 也是不相交的.

集合的并运算和交运算之间的关系如下:

3.3. 对任意集合 A,B,C,

$$A\cap(A\cup B)=A, \tag{12}$$

$$(A\cap B)\cup B=B, \tag{13}$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \tag{14}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{15}$$

由于 $A\subset A\cup B$ 总成立(见2.2(7))，由3.2(11)，公式(12)又等价于包含式 $A\subset A\cup B$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com