

许定安 王波 丁棣华



经典力学(下册)

武汉大学出版社

经典力学

(下 册)

许定安 王 波 丁棣华

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经典力学·下册 / 许定安等编. ——武汉: 武汉大学出版社,
1996. 12
ISBN 7-307-02299-0

- I. 经…
- II. 许…
- III. 经典力学
- IV. O31

武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省荆沙市今印集团有限责任公司印刷

(434000 湖北省荆沙市沙市区红门路桥)

新华书店湖北发行所发行

1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 9.25

字数: 235 千字 印数: 1—2000

ISBN 7-307-02299-0/O · 170 定价: 9.50 元

本书如有印装质量问题, 请寄印刷厂调换

目 录

第八章 有心力场	1
§ 8.1 有心力场的基本性质	1
§ 8.2 运动微分方程和轨道微分方程	3
一 运动微分方程	3
二 轨道微分方程	4
三 轨道类型的一般讨论	5
§ 8.3 轨道的闭合条件和稳定性	9
一 轨道闭合的条件	10
二 轨道稳定性的判别	10
三 圆轨道的稳定性问题	12
§ 8.4 平方反比有心引力	15
一 轨道方程	15
二 椭圆轨道的总能量及角运动的周期	17
三 龙格-楞次(Runge-Lenz)矢量	19
§ 8.5 开普勒三定律和宇宙速度	20
一 开普勒三定律	20
二 三种宇宙速度	21
§ 8.6 二体问题	28
§ 8.7 限制性三体问题	34
§ 8.8 维里定理	39
习题	41
第九章 经典散射	45

§ 9.1	一般概念	45
§ 9.2	两体碰撞	46
§ 9.3	排斥势有心力场中的粒子散射	52
一	散射截面	53
二	有心排斥势与微分散射截面的关系	56
§ 9.4	C 系和 L 系的变换	59
一	散射角的关系	60
二	能量关系	62
三	截面的关系	63
习题		64

第十章 分析力学 68

§ 10.1	分析力学中的几个基本概念	69
一	约束	69
二	自由度	72
三	广义坐标和位形空间	72
四	变换方程	73
五	实位移,可能位移和虚位移	74
六	理想约束	75
§ 10.2	虚功原理与达朗贝尔—拉格朗日方程	77
一	虚功原理	77
二	达朗贝尔—拉格朗日方程	80
§ 10.3	完整系的拉格朗日方程	83
一	两个重要的关系式	83
二	完整系统的拉格朗日方程	84
三	保守系统的拉格朗日方程	87
四	耗散系统的拉格朗日方程	91
§ 10.4	冲量形式的拉格朗日方程	93
§ 10.5	非完整系的拉格朗日方程	97
§ 10.6	哈密顿正则方程	99
一	正则变量和相空间	99

二	勒让德变换	100
三	哈密顿正则方程	103
§ 10.7	运动积分和诺埃瑟定理	108
一	循环坐标	108
二	广义能量积分	109
三	诺埃瑟定理	115
§ 10.8	时空对称性与守恒定律	121
一	时间平移对称性及能量守恒定律	123
二	空间平移对称性与动量守恒定律	124
三	空间的旋转对称性和角动量守恒	125
§ 10.9	哈密顿原理	127
一	变分法简介	128
二	位形空间中的哈密顿原理	133
三	相空间中的哈密顿原理	135
§ 10.10	最小作用量原理	137
一	Δ 变分	137
二	泛函的非等时变分和荷尔德原理	140
三	莫培督—拉格朗日最小作用量原理	142
§ 10.11	泊松括号和泊松定理	144
一	泊松括号	145
二	守恒量和泊松定理	146
§ 10.12	刘维定理	149
§ 10.13	连续系统的分析力学表述	152
一	连续系统的拉格朗日表述	153
二	连续系统的哈密顿表述	157
习题		161
第十一章	多自由度系统的微振动	170
§ 11.1	平衡的种类及稳定平衡的条件	170
一	平衡的种类	170

二	平衡种类的判别	170
§ 11.2	一般理论	173
§ 11.3	自然坐标和简正坐标	180
一	自然坐标	180
二	简正坐标	183
§ 11.4	线性三原子分子的自由振动	189
一	多原子的振动自由度	189
二	利用原始广义坐标求解线性对称三原子分子的自由振动	191
三	利用简正坐标求解纵向振动	194
§ 11.5	非线性振动	196
习题		199
第十二章	正则变换	201
§ 12.1	引言	201
§ 12.2	正则变换的条件	202
§ 12.3	四类生成函数	203
一	第一类生成函数 $F_1(q, Q, t)$	203
二	第二类生成函数 $F_2(q, P, t)$	204
三	第三类生成函数 $F_3(p, Q, t)$	205
四	第四类生成函数 $F_4(p, P, t)$	205
§ 12.4	几种特殊的正则变换	206
一	点变换	206
二	恒等变换	207
三	相空间平移变换	208
四	交替变换	208
五	混合变换	209
六	动量变换	210
七	正交变换	210
§ 12.5	无限小正则变换	211

§ 12.6	与时间有关的哈密顿—雅可比方程·····	212
§ 12.7	与时间无关的哈密顿—雅可比方程·····	214
§ 12.8	哈密顿—雅可比方程中变量的分离·····	216
§ 12.9	作用变量和角变量·····	223
一	单自由度系统·····	223
二	可分离的多自由度系统·····	226
附录 12.9	多重周期函数·····	234
习题	·····	235
第十三章	线弹性体力学 ·····	237
§ 13.1	应变分析·····	238
一	位移矢量场和位移梯度张量·····	238
二	应变张量及其几何意义·····	240
三	相容性方程·····	245
§ 13.2	应力分析·····	247
一	面力、应力矢量和应力分量·····	247
二	一点的应力状态,应力张量·····	250
三	平衡方程·····	252
§ 13.3	弹性能与广义虎克定律·····	253
一	广义虎克定律(本构方程)·····	253
二	弹性能·····	256
三	各向同性弹性体·····	258
四	几种简单的应力状态·····	262
§ 13.4	各向同性线弹性理论的基本解法·····	264
一	基本方程与求解·····	264
二	平面问题(直角坐标系)·····	267
三	平面问题(极坐标系)·····	272
四	应用举例·····	275
习题	·····	281
习题答案	·····	283

第八章 有心力场

有心力场是自然界中最普遍、最重要的力场之一。在历史上,关于有心力场的研究是从宏观尺度的行星运动开始的。尔后,随着卢瑟福的原子结构模型和玻尔原子理论的提出,对微观尺度上有心力问题的研究引起了人们的关注。因此,不论是在宏观领域,还是在微观领域,研究有心力场具有十分重要的意义。本章将利用牛顿力学的基本原理讨论质点在有心力场中运动的基本规律。

§ 8.1 有心力场的基本性质

如果运动质点所受的力的作用线始终通过质点和空间某固定点,则称此力为有心力,而将此固定点称为力心。质点受力方向指向力心时,称为引力;反之,则称为斥力。

有心力构成的力场称为有心力场。常见的有心力可以表为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8-1)$$

式中 $\mathbf{r}$ 为质点相对力心的位矢, $F(r)$ 表示力的量值。为了使引力和斥力都统一在式(8-1)中, $F(r)$ 需理解为代数量,即斥力时为正,引力时为负。有心力场具有下列重要性质:

第一,有心力场具有球对称性。由式(8-1)可知,有心力的大小只与质点到力心的距离有关,而与方向无关,即等力面是以力心为原点的球面。

第二,在有心力作用下,质点相对力心的角动量 $\mathbf{J}$ 守恒。这是

因为质点所受的有心力对力心的力矩为零,即

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (8-2)$$

于是 $\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$

所以角动量 $\mathbf{J}$ 守恒。

第三,质点在有心力场中必作平面运动。因为

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (8-3)$$

式中 $\mathbf{p}$ 为质点的动量。上式表示空间平面方程,此平面的法线方向即 $\mathbf{J}$ 的方向,由于 $\mathbf{J}$ 的方向不变,故此平面在空间的取向亦不变。质点的位矢 $\mathbf{r}$ 的矢端始终位于与 $\mathbf{J}$ 垂直的平面内,即质点作平面运动。

基于性质二和三,通常采用平面极坐标描述质点在有心力场中的运动,且选力心为极点。在极坐标中,质点相对力心的角动量为

$$J = mr^2\dot{\theta} = J_0 (\text{常量}) \quad (8-4)$$

由此可得到单位质量的角动量为

$$r^2\dot{\theta} = h (\text{常量}) \quad (8-5)$$

第四,有心力场为保守力场,质点在有心力场中运动时,机械能守恒。即

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E_0 (\text{常量}) \quad (8-6)$$

第五,质点的矢径 $\mathbf{r}$ 在单位时间内扫过的面积为常量,即面积速度为常量。

设 t 时刻质点的位矢为 $\mathbf{r}$, $t+dt$ 时刻质点的位矢为 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, 矢径转过的角度为 $d\theta$, 如图 8-1 所示。质点的矢径在 dt 时间内扫过的面积为

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

于是

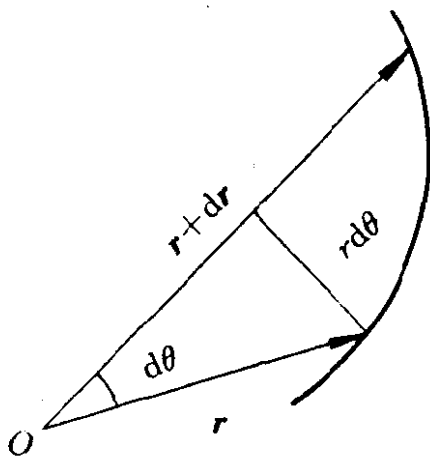


图 8-1

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h \quad (8-7)$$

上述这些重要性质,对于分析和处理有心力场中质点的运动十分有用。

§ 8.2 运动微分方程和轨道微分方程

一 运动微分方程

以力心为极点,质点和力心连线的初始位置为极轴建立平面极坐标,根据有心力的定义即可得到质点运动微分方程为

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (8-8)$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (8-9)$$

式(8-9)表示质点相对力心的角动量守恒,即

$$mr^2\dot{\theta} = J_0 \quad (8-10)$$

将式(8-10)代入能量方程式(8-6)中,并将其改写为

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E_0 \quad (8-11)$$

式中

$$V_{\text{eff}} = \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r) \quad (8-12)$$

称为有效势,其中的第一项称为离心势能,它表示以矢径为旋转参照系时引入的惯性离心力的势能。

式(8-11)只含 r ,它是利用机械能守恒和角动量守恒而得到的等效一维运动的能量方程。求解式(8-11)即可得到径向运动方程 $r=r(t)$,即

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - V_{\text{eff}}(r)]}} \quad (8-13)$$

将 $r=r(t)$ 代入式(8-10)中,求得 $\theta=\theta(t)$,即

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^t \frac{J_0}{mr^2} dt \quad (8-14)$$

上述二式完全确定了质点的运动规律。不过,在一般情况下要解析地积出式(8-13)和式(8-14)并不容易,因为它们不能用初等函数表示,只有对某些特殊的力,其求积才比较方便。

二 轨道微分方程

在有心力运动的问题中,质点的运动方程并不是人们感兴趣的主要问题,人们更关心的是质点运动的轨道方程。求得轨道方程有两种方法。第一,从运动方程 $r=r(t)$ 和 $\theta=\theta(t)$ 中消去参数 t ,即可得到轨道方程 $r=r(\theta)$ 。第二,利用角动量守恒和径向运动微分方程直接建立质点的轨道微分方程,然后对其求解,从而得到质点的轨道方程。采用简单的变量变换,不难导出质点的轨道微分方程。

利用角动量守恒方程

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (8-5)$$

令

$$u = \frac{1}{r} \quad (8-15)$$

则可求得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = hu^2 \\ \dot{r} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{du}{d\theta} \\ \ddot{r} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{cases} \quad (8-16)$$

将上式代入径向运动微分方程

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

即可得到

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{F}{m} \quad (8-17)$$

上式即轨道微分方程,通常将其称为比耐公式,式中的 F 为代数量,即引力时取负值,斥力时取正值。

利用比耐公式,在力已知的情况下,可求得轨道方程;或在轨道方程已知的情形下,可求得有心力 $F(r)$ 。一旦求得轨道方程 $r(\theta)$,将其代入式(8-5)中求解,可得横向运动方程 $\theta(t)$,再把 $\theta(t)$ 代回轨道方程,即可得到 $r(t)$ 。

三 轨道类型的一般讨论

尽管在一般情况下轨道方程的求得并不容易,但我们可以利用等效的一维运动的能量方程

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E_0 \quad (8-11)$$

和有效势

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r) \quad (8-12)$$

定性地讨论有心力场与轨道类型的一般关系。

由式(8-11)可知,物理上有意义的运动应满足如下条件

$$E_0 \geq V_{\text{eff}}(r) \quad (8-18)$$

而有效势包括两部分,一部分是离心势能 $\frac{J_0^2}{2mr^2}$,它恒为正。另一部分是有心力场的势能 $V(r)$,它可以是 r 的任意函数,但在此,我们只讨论如下情形,即

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \quad (8-19)$$

由于 $V(r)$ 有吸引势与排斥势之分,下面分别就这两种情形予以讨论。

1. 排斥势

对于排斥势, $V(r) > 0$, $V_{\text{eff}}(r) > 0$, $E_0 > 0$,在此情形下,根本不存在有界运动。质点在有心力场作用下作无界运动的现象,习惯上

将其称为散射。对此的详细讨论见第九章。

2. 吸引势

根据 $r \rightarrow \infty$ 和 $r \rightarrow 0$ 时, $V(r)$ 和 $\frac{J_0^2}{2mr^2}$ 的渐近行为, 我们分两种情况予以讨论。

第一, 假设 $r \rightarrow \infty$ 时, $V(r)$ 比 $\frac{J_0^2}{2mr^2}$ 减小得慢, 即当 r 较大时, 以吸引势为主。当 $r \rightarrow 0$ 时, $V(r)$ 比 $\frac{J_0^2}{2mr^2}$ 更慢地趋于无穷大, 即当 r 较小时, 以排斥势为主。例如, 万有引力场即属于此情况。 $V(r)$ 、 $V_{\text{eff}}(r)$ 和离心势能可用图 8-2 形象地表示。

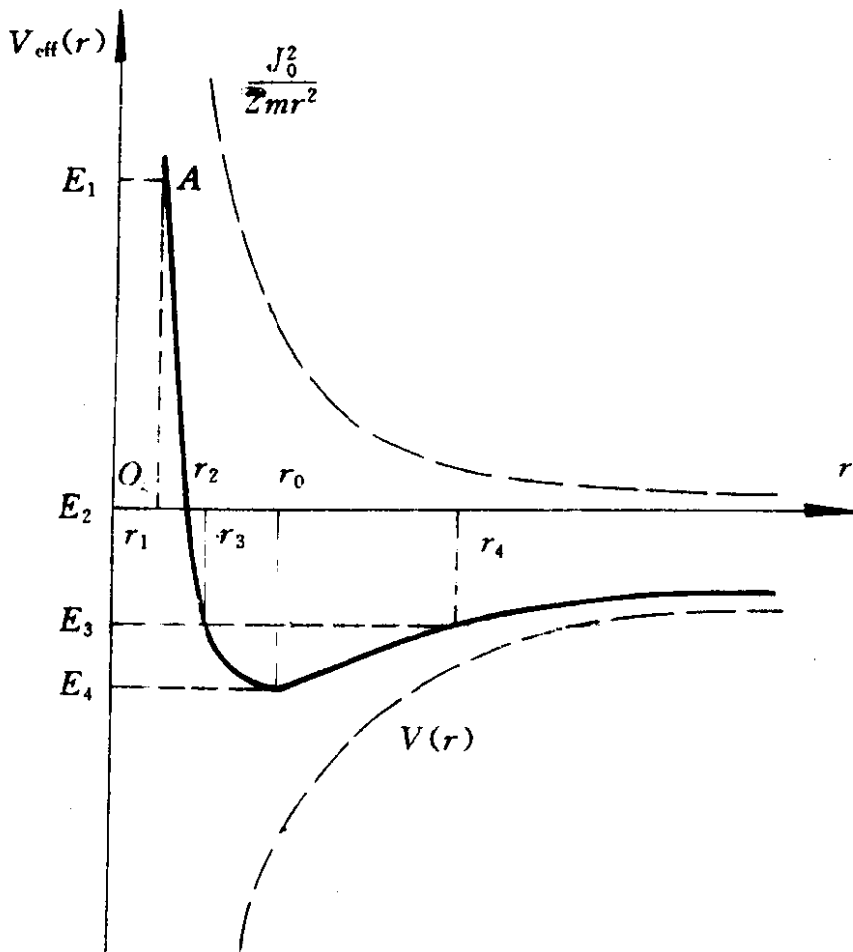


图 8-2

利用有效势能曲线讨论轨道类型非常方便。由图 8-2 可知, 当质点运动的总能量 $E_0 = E_1 > 0$ 时, 它和有效势能曲线交于 A

点,在该点处,质点作半径为 r_1 的匀速圆周运动,但此轨道是非稳定的(证明参看 § 8.3),稍微受一点扰动,质点便可运动到无穷远,其轨道无界。质点的这种运动称为非束缚运动。

如果质点运动的总能量 $E_0 = E_2 = 0$,此时,质点运动的轨道的性质与总能量为 E_1 时相同。

如果质点运动的总能量 $E_0 = E_3 < 0$,此时,质点的径向运动的变化范围为 $r_3 \leq r \leq r_4$,轨道有界,质点被限制在势阱内作束缚运动。特别值得注意的是,有界轨道不一定闭合。若以力心为原点,以 r_3 即 $r_{\min}$ 和 r_4 即 $r_{\max}$ 为半径作两个同心圆,则质点的运动被限制在圆环区域内。由于在 r_3 和 r_4 处,质点的径向速度为零,通常称这两点为转折点,在转折点处,质点的轨道与两圆相切,如图 8-3 所示。

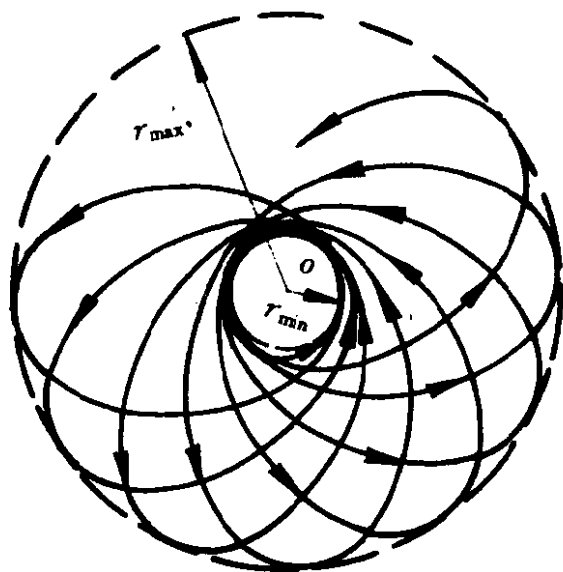


图 8-3

对于束缚运动,满足什么条件轨道才能闭合呢?设质点径向运动的周期为 T_r (即质点从大圆上的某点出发,回到大圆周上与该点相邻的点所需时间),角运动的周期为 T_θ (即矢径旋转 2π 所需的时间),那末,质点运动的有界轨道是否闭合取决于 T_r 与 T_θ 的比值。设它们的比值为 $m:n$,则当此比值为有理数时,质点运动的轨道是闭合的。这意味着,当矢径的大小从某一初位置开始变化 m 次时,矢径恰好旋转 n 周回到初始位置形成闭合轨道。这种经过若干径向周期后轨道才闭合的现象,称为轨道的进动。当 m 与 n 的比值为 1 时,轨道无进动现象,且称与此相应的轨道为单闭合轨道。如果 m 与 n 的比值为非有理数,则质点运动的轨道永远不能闭合,最终将布满整个圆环区域。

当质点运动的总能量 $E_0 = E_4 = (V_{\text{eff}}(r))_{\min}$ 时, 质点作半径为 r_0 的稳定的圆轨道运动。

第二, 如果 $r \rightarrow \infty$, 以离心势能为主, 即 $V(r)$ 比 $\frac{J_0^2}{2mr^2}$ 减小得更快, $r \rightarrow 0$ 时, $V(r)$ 的值趋于无穷大的速度更快, 假设有效势能曲线如图 8-4 所示。如果质点运动的总能量 $E_0 > 0$, 此时, 质点允许的

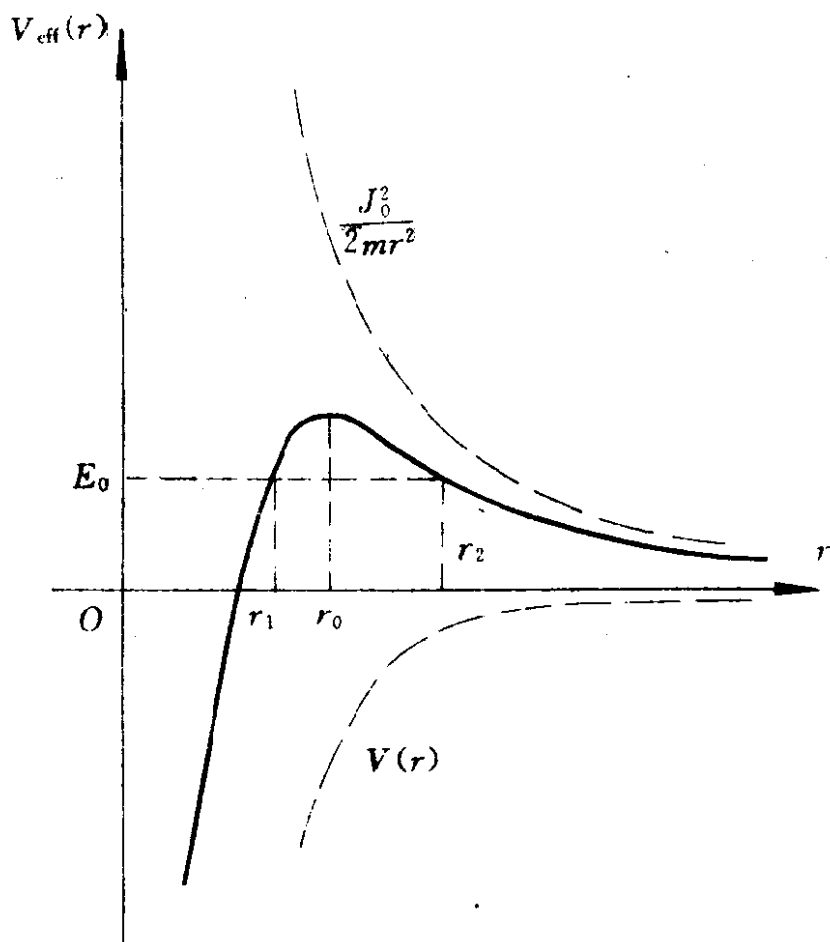


图 8-4

运动区域为

$$0 \leq r \leq r_1$$

质点运动的轨道有界, 或

$$r_2 \leq r \leq \infty$$

在此区域内, 质点运动的轨道无界。($r_1 < r < r_2$) 这段范围为经典力学的禁区, 即质点不能逾越势能山。若质点的总能量 $E_1 = (V_{\text{eff}}(r))_{\max}$, 则质点作半径为 r_0 的非稳定的圆轨道运动。

在此需指出一点,以上对不同轨道与能量的对应关系所作的讨论,都是在某一能量下只涉及一个角动量值的情形下进行的。其实,当力场一定时,改变角动量 J_0 的值,从而 $V_{\text{eff}}(r)$ 随之改变,但这种改变并不影响轨道的一般分类。

〔例〕 质量为 m 的质点,在有心力作用下运动,质点到力心的距离为 r ,力心到轨道切线的垂直距离为 S ,试求此有心力大小的表达式。

〔解〕 质点在有心力作用下,角动量和机械能均守恒,即

$$h = r^2 \dot{\theta} = Sv \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E_0 \quad (2)$$

将式(1)代入式(2),得

$$\frac{1}{2}mh^2S^{-2} + V(r) = E_0 \quad (3)$$

式(3)两边同时对 r 求导,则有

$$\frac{1}{2}mh^2 \frac{dS^{-2}}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0 \quad (4)$$

因为

$$F = - \frac{dV}{dr}$$

将式(4)代入上式,即得

$$F = \frac{1}{2}mh^2 \frac{dS^{-2}}{dr} \quad (5)$$

上式即为所求的有心力大小的表达式。

§ 8.3 轨道的闭合条件和稳定性

从上一节的讨论可知,质点在有心力场中的运动轨道的性质较复杂,有无界与有界、闭合与非闭合、稳定与非稳定之分,本节对此将进行详细讨论。