线性代数

中央财政金融学院数学教研室　编

中国标准出版社
1991

(京)新登字 0?? 号

线 性 代 数

中央财政金融学院数学教研室 编
责任编辑 冯强

*

中国标准出版社出版
(北京复外三里河)
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 印张 11 字数 263 000
1992 年 7 月第一版 1992 年 7 月第一次印刷

*

ISBN7-5066-0491-4/O·002
印数 1—7 000 定价 6.10 元

*

科目 268-22

前　　言

本书是根据国家教委最新颁布的《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》中的线性代数部分编写的，可作为高等院校财经类各专业的试用教材，也可作为财经工作者的自学用书。

本书编者在总结多年教学实践经验的基础上，根据财经专业数学教学的特点和需要，力图在编写中即体现学科上的科学性和系统性，又体现教学上的灵活性和适用性。在习题的选编上分为两个层次。第一层次是章后习题，它是对掌握基础知识的练习和检查；第二层次是总复习题，它包括一些较综合性的习题以及为适应近年来各类考试中的标准化试题特选编的客观性习题。书中有些内容加“*”标记，在选用本书时可根据教学的需要和学时安排略去不讲。

本书由方得宜副教授任主编，王守祯任副主编，全书由室主任吴秉坚审阅。各章执笔人员是：黄斌（第一章），黄惠青（第二章），王守祯（第三章），李晓林（第四章），方得宜（第五章），王琳（第六章）。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1991 年 9 月

目　　录

第一章　行列式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具．而线性方程组是线性代数的一个重要部分．本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，把行列式的概念推广到 n 阶行列式中去．本章研究的主要内容是：

（1）n 阶行列式的概念；

（2）n 阶行列式的性质及计算；

（3）n 阶行列式的应用［克莱姆(Cramer)法则］.

§1.1　排列与逆序

为了给出 n 阶行列式的概念，我们先来介绍排列和逆序的概念．

定义 1.1　由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的每一种有序数组，称为一个 n 级排列．

例如　321、213 都是 3 级排列，2413 是一个 4 级排列．

这里的排列就是中学代数里所说的 n 个不同元素的全排列．所以由数码 $1,2,\cdots,n$ 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个．

例如　由数码 1,2,3 所组成的所有不同的 3 级排列共有 $3!=6$ 个．它们是：

123、132、231、213、312、321.

在以上所有的 3 级排列中，除排列 123 是按从小到大顺序排列（称此排列为自然排列）以外，其余的排列中，都有较大

的数码排在较小的数码的前面.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数码 i_t 排在较小的数码 i_s 的前面($i_t>i_s$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序,记作 i_ti_s; 一个 n 级排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$是奇数则称此排列为奇排列,是偶数则称此排列为偶排列.

例如 5 级排列 34152 中,共有 5 个逆序,它们是 31,32,41,42,52,此排列的逆序数为 5,即 $\tau(34152)=5$. 所以称此 5 级排列 34152 为奇排列.

自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零,即 $\tau(12\cdots n)=0$,是偶排列.

例如 由 1,2,3 这三个数码组成的所有 3 级排列情况如表 1-1.

表 1-1

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,得到另一个 n 级排列:

$$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$$

这样的变换,称为一个对换,记作对换(i_s,i_t). 相邻两个数码

的对换，称为相邻对换．

例如　对排列 23154 施以对换(3,4)后得到排列 24153．即 $23154 \xrightarrow{(3,4)} 24153$．

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性(证略)．

例如　上述对换 $23154 \xrightarrow{(3,4)} 24153$．　$\tau(23154)=3$，则排列 23154 为奇排列；而 $\tau(24153)=4$，则排列 24153 为偶排列．即经过一次对换后奇排列变成了偶排列．

定理 1.2　在所有的 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个．

证明　设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个．

对这 p 个奇排列施以同一个对换(i_s,i_t)，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部都变为偶排列，于是得到 p 个偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，如果将全部的偶排列也都施以同一个对换(i_s,i_t)，则 q 个偶排列全部都变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等．

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，则 $p+q=n!$，所以 $p=q=\frac{n!}{2}$

证毕．

§1.2　n 阶行列式的定义

一、　二阶、三阶行列式

在中学代数中，通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义．在此，我们对二阶、三阶行列式再作简单的复习和进一步的研究，观察出它们展开式的结构规律，在此基础上，给出 n 阶行列式的定义．

我们用记号,即二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二阶行列式所表示的代数和,可以用画线(图 1-1)的方法来记忆,即实线连结的两个元素的乘积是代数和中取正号的项;虚线连结的两个元素的乘积是代数和中取负号的项.

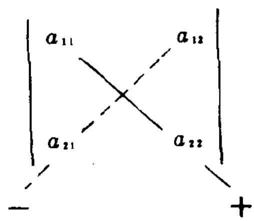

图 1—1

我们用记号,即三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的代数和,也可以用画线(图 1-2)的方法来记忆.其中各实线连结的三个元素的乘积是代数和中取正

号的项，各虚线连结的三个元素的乘积是代数和中取负号的项．

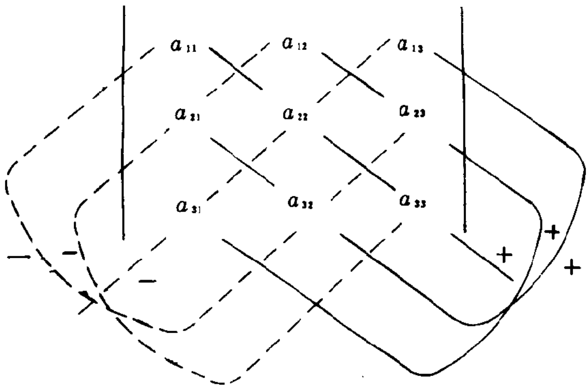

图 1-2

例1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1)-2\times2=-5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2+0\times1\times1+1\times2\times3 \\ -1\times1\times3-0\times2\times2-1\times1\times1=4$$

例2 设：

$$D \doteq \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

问：(1) 当 λ 为何值时 $D\neq0$；

(2) 当 λ 为何值时 $D=0$.

解 $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+1+1-\lambda-\lambda-\lambda$

$= \lambda^3-3\lambda+2$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

当$(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$时，则$\lambda=1$或$\lambda=-2$.

所以可得：

(1) 当$\lambda\neq1$且$\lambda=-2$时$D\neq0$;

(2) 当$\lambda=1$或$\lambda=-2$时$D=0$.

二、*n*阶行列式的定义

由二阶行列式和三阶行列式的展开式可以看出：

(1) 二阶行列式表示2！项的代数和，每项都是取自二阶行列式中不同行与不同列的两个元素的乘积.

三阶行列式表示3！项的代数和，每项都是取自三阶行列式中不同行与不同列的三个元素乘积.

(2) 每一项都带有符号，容易看出，当这一项中元素的行下标按自然排列时，如果对应的列下标所构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

于是，我们可以把二阶行列式的任一项表示成：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中j_1j_2是一个2级排列，当j_1j_2取遍了2级排列时，即得到二阶行列式的所有项.

把三阶行列式的任一项表示成：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中$j_1j_2j_3$是一个3级排列，当$j_1j_2j_3$取遍了3级排列时，即得到三阶行列式的所有项.

若采用“Σ”的记号，则可以分别将二阶行列式和三阶行列式写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2}$”表示对所有 2 级排列求和；“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示对所有 3 级排列求和．

通过以上分析，下面我们来建立 n 阶行列式的概念．

定义 1.3 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij}称为第 i 行第 j 列上的元素．它表示 $n!$ 项的代数和，每项都是取自 n 阶行列式中不同行不同列的 n 个元素乘积，各项的符号是：当这一项中元素的行下标按自然排列时，如果对应的列下标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍了所有的 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项．所以这个代数和可表示为：

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2}$$

即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.3)$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有 n 级排列求和．(1.2)式称为 n 阶行列式按行自然排列的展开式．

当 $n=1$ 时，我们规定 $|a|=a$，即由一个元素 a 构成的一阶行列式就是元素 a 本身．

例 1 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值．其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$．

解 根据 n 阶行列式的定义，n 阶行列式 D 应有 $n!$ 个乘积项，但由于 n 阶行列式 D 中有许多元素为零，含零元素的项都等于零，因此只要找出那些不等于零的项进行计算即可．

行列式 D 的一般项为：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一行中只有 $a_{11}\neq 0$，因而 $j_1=1$，即行列式 D 中只有含 a_{11} 的那些项才可能不为零，其他项均为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，第二行中有 $a_{21}\neq 0$ 和 $a_{22}\neq 0$，因第一个元素 a_{11} 已取自第一列，因此第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以第二

个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即行列式 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$的那些项才可能不为零，其他项均为零；这样推下去，可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots, j_n=n$. 因此，行列式 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零，其他项均为零．由于 $\tau(12\cdots n)=0$，因此，这一项应取正号，于是可得：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \quad (1.4)$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式．

同理可得上三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \quad (1.5)$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

特殊情况：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \quad (1.6)$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

这种行列式称为对角形行列式．

上、下三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线(从左上角到右下角)上所有元素的乘积．

例2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,\overline{n-1}} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $a_{i\,\overline{n-i+1}}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 显然，n 阶行列式 D 的展开式中只有：

$$a_{1n}a_{2\,\overline{n-1}}\cdots a_{n1}\neq 0$$

又因 $\tau(n\,\overline{n-1}\cdots 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

所以 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,\overline{n-1}}\cdots a_{n1}$.

n 阶行列式展开式中的一般项其表达形式还可归结为下面的形式．

定理1.3 n 阶行列式的一般项也可以写成：

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \qquad (1.7)$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列．

证明 由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，因此，(1.7)式中的 n 个元素是取自行列式 D 的不同的行与不同的列．

如果互换(1.7)式中的两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$，则其行下标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 变为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，由定理1.1可知其逆序数的奇偶性改变；列下标由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 变为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，其逆序数的奇偶性亦改变．但互换后两下标排列的逆序数之和的奇偶性则不改变，即有：

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$$

$$= (-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

所以互换(1.7)式中的两个元素的位置，其符号不改变．这样我们总可以经过有限次互换(1.7)式中元素的位置，使其行下标 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为自然排列，设此时列下标排列变为 $j_1'j_2'\cdots j_n'$，则(1.7)式变为：

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$$

$$= (-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$$

故知(1.7)式确为 n 阶行列式 D 的一般项，即 n 阶行列式 D 的一般项也可以写成(1.7)式的形式．

定理 1.3 表明，在行列式中行下标与列下标的地位是对称的．因此，为了确定每一项的符号，同样可以把每一项元素的列下标按自然排列，于是 n 阶行列式的展开式又可表示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \qquad (1.8)$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列，“$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$”表示对所有 n 级排列求和．此展开式称为 n 阶行列式按列自然排列的展开式．

例 3 若 $(-1)^{\tau(1\underset{4}{i}32\underset{5}{k})+\tau(52\underset{3}{j}14)}a_{15}a_{i2}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是五阶行列式 D 展开式中的一项，问 i,j,k 应为何值？当 i,j,k 取定后该项的符号是什么？

解 根据行列式的定义，每一项中的元素是取自行列式中不同的行与不同的列，故有 $j=3$．当 $i=4$ 时 $k=5$，或当 $i=5$ 时 $k=4$．

当 $i=4$、$j=3$、$k=5$ 时，$\tau(14325)+\tau(52314)=9$，所以该