JINDAI PINGCHA LILUN JIQI YINGYONG

近代平差理论及其应用

黄维彬

解放军出版社

近代平差理论及其应用

黄 维 彬

解 放 军 出 版 社

京新登字116号

近代平差理论及其应用
黄　维　彬

解放军出版社出版发行
（北京平安里三号）
（邮政编码100035）
新华书店经销
北京京辉印刷厂印刷

787×1092毫米　16开本　33.625印张　840千字
1992年7月第1版　1992年7月（北京）第1次印刷
印数1—3 000
ISBN　7-5065-1861-9/P·13
定　价：17.50元
社编号03—0071

前　言

电子计算机、概率统计、矩阵代数、泛函分析和最优化理论在测量平差中的广泛应用，对测量平差的理论和方法产生了深刻的影响，形成了内容丰富的近代平差。为了比较系统地介绍近代平差的主要内容，作者根据几届研究生讲课材料并参考大量国内外文献，编写了《近代平差理论及其应用》。

本书比较全面、系统地论述了近代平差的基本理论、方法和应用；注意介绍近代平差的成就和近期发展，力求能够反映近代平差的现代面貌。本书取材新颖，引进了大量一般测量平差著作中很少涉及的新内容，主要有相关平差、参数加权平差、H空间的最小二乘平差、最小二乘滤波、推估和配置、克立格推估法、哈迪多面函数法、秩亏自由网平差、具有奇异权逆阵的最小二乘平差、广义高斯——马尔柯夫模型参数估计、法方程解的舍入误差和法方程制约性、分区平差、阶段平差、序贯平差、随机模型的验后估计、附加系统参数的平差、可靠性理论和数据探测、有偏估计、稳健估计和大地网优化设计等。此外，作者写了《近代平差概述》，作为本书的绪论。通过阅读此绪论，能够使读者对本书所要讨论的内容有一个初步的了解。

本书经全国测绘教材委员会审查通过，可作为测绘专业研究生教材，也可供本科高年级学生和有关科技工作者参考。

近代平差内容非常丰富，但是，无论理论、方法和实际应用都有许多需要进一步研究和探讨的问题，作者水平有限，对整个近代平差领域的了解还属肤浅。因此，本书的取材、结构、表述和某些论点，难免存在不当之处，恳请广大读者指正。

本书得到全国测绘教材委员会大地专业组的关怀和支持，并组织有关专家进行评审，提出了许多宝贵意见，作者对此表示衷心的谢意。

编著者　1990年12月

目　　录

概　述

一、测量平差的简要历史

1．最小二乘法产生的背景

18世纪末，在天文学、大地测量学以及与观测自然现象有关的其它科学领域中，常常提出这样的问题：如何从多于未知参数的观测值集合中求出未知参数的最佳估值。当时，各国许多著名的科学家都开始研究这一课题。

2．谁最先提出最小二乘法

1794年，年仅17岁的高斯（C·F·Gauss）首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法。1801年，高斯应用最小二乘法，解决了当时天文学界一个最困难的问题，即根据极其有限的观测成果确定谷神星轨道。但是，高斯没有及时行文发表他所提出的最小二乘法。

1806年，勒戎德尔（A·M·Legendre）发表了《决定彗星轨道新方法》一文，从代数观点独立地提出了最小二乘法，主要用以消除由观测得出的方程组的不定性问题。细查历史，“最小二乘法”这个名称是由勒戎德尔确定的。

直到1809年，高斯才在《天体运动的理论》一文中，从概率论观点，详细地叙述了他所提出的最小二乘原理。这个原理如下：如果未知参数个数等于观测个数，或者说等于方程个数，未知参数有唯一解，如果观测个数或方程个数多于未知参数个数，此问题是不定解。在这种情况下，为了求唯一解，必须提出一些条件，例如，使计算出的观测值与原始观测值之差V_i，满足

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^2 = \min \qquad (1)$$

上式就是著名的最小二乘原理。

高斯强调指出，他论述的最小二乘原理，对于实际应用最为简单，所有其它的方法都过于复杂并在解题时要作出较繁重的计算。高斯还指出，“我们已经在1794年应用的这个原理却又在著名的勒戎德尔的《决定彗星轨道新方法》著作中出现”。

高斯关于他远在1794年就应用最小二乘法的说法，引起了法国，特别是勒戎德尔的抗议。于是，关于谁最先提出最小二乘法的问题，在当时曾一度引起争论。

后来，当高斯全集及书信集出版后，查明了高斯从1794年起就已在自己的工作中实际应用了最小二乘法原理。

3．高斯最小二乘原理的两次证明

高斯对最小二乘平差进行了长期的研究，特别是当欧洲积累了大量弧度测量与天文观测成果时，高斯以充沛的精力开始了进一步的研究和论证最小二乘法的工作，于1821～1826年间出版了他的三本最小二乘法巨著，题为《加以最小误差的观测组合理论，第一篇、第二篇和附录》。现代通常把高斯的最小二乘原理分为两个时期。第一个时期属于1809年发表《天体

运动的理论》时期，在这篇文章中，高斯假定算术平均值为最或然值，观测误差服从正态分布导出了最小二乘原理。第二时期为发表《加以最小误差的观测组合理论》时期，在上述文章第一篇中，高斯为了使最小二乘原理建立在更稳固的基础上，放弃了算术平均值为最或然值，观测误差服从正态分布的假定，证明了只要观测误差各分量随机独立，误差中数为零，方差代表观测精度，亦可导出同样的最小二乘原理。在这篇文章中高斯还研究了未知数权的问题。在第二篇文章中，高斯拟定了解法方程的方法，解决了推求线性函数权的问题，并首次提出单位权中误差的公式。高斯称为"附录"的第三篇文章是过去著作的总结，包括了制订大地网平差的基本问题，提出了按条件法平差三角网的理论，在该文最后给出了三角网平差算例。

4．高斯——马尔柯夫模型

1912年，马尔柯夫（A·A·Markov）发表文章系统地论述了高斯最小二乘原理的第二个证明，得出了测量平差中著名的高斯——马尔柯夫模型

函数模型：

$$L = AX + \Delta \tag{2}$$

随机模型：

$$\left\{\begin{array}{ll} E(\Delta) = 0 & (3) \\ \Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} & (4) \end{array}\right.$$

或写为

$$\left.\begin{array}{l} E(L) = AX \\ \Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \end{array}\right\} \tag{5}$$

文献中也常称$E(L) = AX$为函数模型，（4）式为随机模型。式中，L为观测向量，Δ为误差向量，X为未知参数向量，A为X的系数矩阵，E（·）为数学期望，Σ为Δ或L的对角协方差阵，Q为对角权逆阵，P为对角权阵、σ_0^2为单位权方差。

（2）式中的Δ用估值$-V$表示，X用估值$\hat{X}$表示，按最小二乘原理

$$V^TPV = \min \tag{6}$$

得出法方程

$$A^TPA\hat{X} = A^TPL$$

当A为列满秩阵时，唯一解为

$$\left.\begin{array}{l} \hat{X} = (A^TPA)^{-1}A^TPL \\ Q_{\hat{x}} = (A^TPA)^{-1} \end{array}\right\} \tag{7}$$

根据条件（3）和（4）可得

无偏性：　$E(\hat{X}) = X$ （8）

最优性：　$tr(Q_{\hat{x}}) = \min$ （9）

$tr(\cdot)$为矩阵的迹。（8）和（9）式表明：

由高斯——马尔柯夫模型，按最小二乘原理可以得出最优线性无偏估计量，无偏性由（8）式得出，最优性由（9）式得出。高斯——马尔柯夫模型是测量平差研究的最重要模型之一。

5．经典平差研究的重点

自1794年高斯创立最小二乘原理以来，许多测量学者对测量平差的理论和方法进行了大量的研究。因为，测量平差总是归结为解算法方程组，电子计算机出现之前，大量法方程的解算，不但要花费很长的时间，而且解算精度也不易保证。因此，过去手算时代，经典平差

的主要研究方向是如何少解一些法方程。许多测量学者为此进行了大量的研究，他们寻求捷径，简化方法以及合并计算步骤，提出了各种少解法方程的平差方法，如1876年史赖伯（O·Schreiber）提出的在解法方程之前消去一些未知数和合并一些误差方程式的所谓史赖伯法则；1905年克里格尔（L·Krueger）提出的将条件方程分为两组解算的分组平差法；1923年博尔兹（H·Boltz）提出的扩展法以及用大地线代替三角锁部的赫尔默特（F·R·Helmert）平差法，克拉索夫斯基（F·N·Krasovsky）平差法，爱格特（O·Eggert）平差法，鲍威（W·Bowie）平差法和赫尔默特的分区平差法等等。

二、测量平差的当代进展情况

随着测量工程的逐渐精密和现代化，特别是电子计算机、矩阵代数、泛函分析、最优化理论和概率统计在测量平差中的广泛应用，对测量平差的理论和实践产生了深刻的影响，使测量平差，从经典平差进入到近代平差的新时期。

电子计算机在测量平差中的应用，从根本上改变了手算时代某些传统的平差计算观点，并使得大量法方程的解算成为可能。平差方法与计算工具紧密相关，回顾一下测量平差计算的发展过程，可以看到计算工具对平差计算方法的巨大促进作用。在台式计算机不发达的时代，为了避免繁重的乘、除法运算，不得不采用对数运算，把乘、除法变为加减法。台式计算机大量使用后，乘、除法运算已不是主要矛盾，因此在平差计算中，改用三角函数代替对数，用真数形式的条件方程式代替对数形式的条件方程。电子计算机的出现，平差计算方法也必须进行相应地改变，使之适应于电子计算机的要求。在电算时代，我们不能把手算时代的某些平差计算方法原封不动地搬来照用。用电子计算机进行平差计算，选用平差方法和计算公式时，主要考虑的是全部运算过程是否适用于电算，是否便于程序设计，能否充分发挥电子计算机高速自动化的特点，较少考虑方法的难易，公式的繁简。一般说来，一个理想的电算平差方案，是整个计算过程应始终顾及到充分利用电子计算机来代替繁重的手工运算，使得在平差计算的全过程中，所花费的人工准备时间和机器工作时间的总和为最少，而且便于程序设计，数据准备简便有规律。

矩阵代数、泛函分析、最优化理论和概率统计在测量平差中的应用，推动了测量平差理论的发展，扩展了经典平差的数学模型，出现了一些称之为近代平差的新方法。

1．相关平差

1947年，田斯特拉（T·M·Tienstra）从测量平差观点，扩展了高斯——马尔柯夫模型，将（4）式中的Σ、Q和P由对角阵扩展为满秩非对角方阵，提出了相关平差法，将经典平差对观测值随机独立的要求，推广到随机相关的观测值。相关平差的出现，观测值的概念广义化了，使得不仅随机独立的直接观测值可以作为平差的对象，而且它的导出量，例如随机独立直接观测值的函数或任何一种初步平差的结果都可作为平差的对象。相关平差对测量平差的理论研究有重大的促进作用，推动了测量平差的发展。测量平差的许多方法都可以从相关平差原理导出。相关平差还具有很强的概括性，有的作者认为，近代平差方法如此之多，但从相关平差的角度看，再运用矩阵的符号和运算，就可以把一些性质和方法完全不同的平差概括成便于记忆的统一形式。最小二乘平差包括经典平差和相关平差，根据函数模型的不同，通常又将最小二乘平差分为参数平差、条件平差、带约束的参数平差和带参数的条件平差。这些平差都可用下面通用的平差模型加以概括：

$$\left.\begin{array}{c} BV + A\hat{X} = f \\ C\hat{X} = W_c \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{c} E(\Delta) = 0 \\ \Sigma = \sigma_0^2 Q,\ P = \sigma_0^2 \Sigma^{-1} \end{array}\right\} \tag{11}$$

当$B = -I$，$C = 0$时，（10）式变为参数平差的函数模型

$$V = A\hat{X} - f \tag{12}$$

当$A = 0$，$C = 0$时，（10）式变为条件平差的函数模型

$$BV = f \tag{13}$$

当$B = -I$时，（10）式变为带约束的参数平差的函数模型

$$\left.\begin{array}{c} V = A\hat{X} - f \\ C\hat{X} = W_c \end{array}\right\} \tag{14}$$

当$C = 0$时，（10）式变为带参数的条件平差的函数模型

$$BV + A\hat{X} = f \tag{15}$$

当Σ，Q和P为对角阵（包括单位阵）时，则为经典平差，当Σ，Q和P为满秩方阵时，则为相关平差。

由此可见，相关平差用矩阵符号书写，不但可以将不同性质的平差概括成统一形式，而且可以将不同的函数模型概括成一个统一的函数模型。相关平差的出现，使得按最小二乘原理进行平差的概念广义化了，是测量平差理论的一大进展。

2．H空间的最小二乘平差

测量平差引进矩阵代数后，使得公式的书写和推导简化了，而且由于矩阵符号的高度概括性，因此可以把性质和形式不同的平差公式概括成便于研究的统一形式。但是，事物总是发展的，目前国内外许多测量工作者，又在用矩阵符号书写和推导测量平差公式的基础上，致力于用希尔伯特（Hilbert）空间（简称H空间）理论研究最小二乘平差问题。从数学观点看，H空间理论比矩阵代数更基本，用它来研究平差问题，能使人们深入地理解平差问题的实质和数学结构，提供更清晰直观的几何概念。

测量平差的两个基本函数模型为

参数平差：
$$\underset{m\times 1}{V} = \underset{m\times t}{A}\ \underset{t\times 1}{\hat{X}} - \underset{m\times 1}{L} \tag{16}$$

条件平差：
$$\underset{r\times m}{B}\ \underset{m\times 1}{V} = \underset{r\times 1}{W} \tag{17}$$

平差值$\hat{L}$为

$$\hat{L} = L + V = A\hat{X} \tag{18}$$

式中，$L\in H_L$，$V\in H_B$，$\hat{L}\in H_A$，H_L为m维观测空间，H_A为t维A的值域空间，H_B为r维由B的行向量构成的空间，L，V和$\hat{L}$的关系可用最小二乘平差的基本三角形图(0-1)表示。

为了能在观测空间H_L中引进概率意义，在H_L上引进概率测度P，于是H_L为概率测度空间，P为$m\times m$阶正定对称阵，其逆阵为Σ，即L的协方差阵。

在H_L中选择一个基底后，内积可用P表示，再引进L的范数，定义L的距离，则H_L为一有限维m维内积空间，当然是完备的，而完备的内积空间就是H空间，故H_L为一具有核函数Σ的H空间。

投影定理；$H_A\subset H_L$，对任何$L\in H_L$，L在H_A的投影唯一存在。也就是，有$\hat{L}\in H_A$，

$V \perp H_A$，使$L = \hat{L} - V$，而且这种分解是唯一的。

由投影定理可知，最小二乘平差可叙述为在值域空间H_A中找一个向量$\hat{L}$，使L到$\hat{L}$的距离比到H_A中其它向量的距离都短，即

$$\| \hat{L} - L \|^2 = \min \tag{19}$$

或写为

$$\| V \|^2 = \min \tag{20}$$

上式等价于将H_L空间直交分解为H_A和H_B，即

$$\left.\begin{aligned} H_L &= H_A \oplus H_B \\ \dim(H_L) &= \dim(H_A) + \dim(H_B) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$m = t + r$$

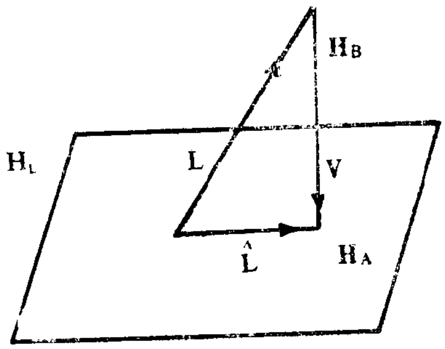

图 (0-1)

求L在H_A中的投影$\hat{L} \in H_A$，或L在H_B中的投影$V \in H_B$，使$\hat{L} = L + V$。设$L \rightarrow H_A$的投影算子为J_A，$L \rightarrow H_B$的投影算子为J_B，则有

$$\hat{L} = J_A L \tag{22}$$

$$V = -J_B L \tag{23}$$

因为

$$\left.\begin{aligned} J_A &= A(A^T P A)^{-1} A^T P \\ J_B &= Q B^T (B Q B^T)^{-1} B \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

于是对于参数平差，则有

$$\hat{L} = A(A^T P A)^{-1} A^T P L = A\hat{X} \tag{25}$$

两端左乘$A^T P$，得

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \tag{26}$$

由投影算子的性质

$$J_A + J_B = I \tag{27}$$

于是

$$V = (J_A - I) L \tag{28}$$

对于条件平差

$$\hat{L} = (I - J_B) L \tag{29}$$

$$V = -J_B L \tag{30}$$

由上面的讨论可以看到，在H空间中讨论最小二乘平差问题，可以简化公式推导，具有明显的几何意义。如果进一步引入对偶空间、对偶算子和伴随算子，则可利用对偶关系图直接由图写出最小二乘平差公式。因此进一步研究H空间理论在最小二乘平差中的应用是非常有意义的。

3. 最小二乘滤波、推估和配置

最小二乘滤波、推估和配置起源于最小二乘内插和外推重力异常的课题。1969年，克拉鲁普（T·Krarup）把推估重力异常的方法，推广到用重力异常场中不同类型的数据，例如重力异常，垂线偏差等，去估计重力异常场中的任一元素，例如扰动位，大地水准面差距等，提出了最小二乘滤波、推估和配置。莫里兹（H·Moritz）对最小二乘滤波、推估和配置进行了系统的研究，提出了带系统参数的最小二乘配置，并概述了这种方法在大地测量其它方面的应用，进而导致几何位置和重力异常场的最小二乘联合求定，为整体大地测量奠