

高等分析力学

ADVANCED ANALYTICAL
MECHANICS

梅凤翔 刘端 罗勇 著

北京理工大学出版社


$$\Omega = \sum dp_i \wedge dq^i$$

70.5.14

高等分析力学

梅凤翔 刘端 罗勇 著

北京理工大学出版社

(京)新登字149号

内 容 简 介

本书是系统全面地论述分析力学的经典与现代理论的一部专著,包括分析力学的基本概念,分析力学的变分原理,分析力学的各种运动微分方程,分析力学的某些专门问题,分析力学方程的积分方法,分析力学的张量方法,分析力学的外微分描述,Hamilton 系统中的混沌初步等八章。每章附有一些历史资料,少量习题和参考文献。

本书可作为高等院校力学、数学、物理以及工程专业高年级大学生和研究生的教材或教学参考书,亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考。

Capsule Summary

This book is a monograph which deals with the classical and modern theories of analytical mechanics in a systematic and comprehensive way. The book consists of the fundamental concepts, the variational principles, the various kinds of differential equations of motion, some special problems, the methods of integration for the equations, the methods of tensor, the exterior differential descriptions, chaos in Hamiltonian systems. At the end of each chapter there are the historical material, a few amount of exercises and references.

The book can be used as a textbook or reference material for the seniors, juniors and graduate students of mechanics, mathematics, physics and engineering as well as a reference material for the teachers of related specialities, researchers of mechanics and scientific workers.

高等分析力学

梅凤翔 刘端 罗勇 著

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 25.25印张 655千字

1991年12月第一版 1991年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-463-9/O·79

印数: 1—2500册 定价: 13.15元

前 言

1788年伟大科学家 J L Lagrange 发表名著《分析力学》。Lagrange 以及后来的 Hamilton, Jacobi, Poincaré, Ляпунов 等人的著作是那样完美, 以致使众多聪明的后人觉得再也没有什么本质的东西可以补充到有限自由度动力系统中去了。上一世纪末出现的经典非完整系统分析力学无疑是将 Lagrange 的成果推进了一大步, 而近20年兴起的几何动力学(可称之为近代分析力学)使 Lagrange 和 Hamilton 的理论更加完美。

分析力学是经典物理学的基石之一, 是近代物理学发展的阶梯。同时, 分析力学又是许多数学理论的发源地和应用对象。很难指出物理-数学科学的其它领域能够像分析力学这样把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来。分析力学不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题科学研究的精美工具, 而且运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制。

分析力学按各种特征可分为经典分析力学与近代分析力学, Lagrange 力学与 Hamilton 力学, 完整系统力学与非完整系统力学, 一阶系统力学与高阶系统力学, 等等。本书写作的方法是兼容以上各种划分, 统一起来论述。全书共分八章。第一章是分析力学的基本概念, 除讲述到通常的约束, 广义坐标, 虚位移, 理想约束等基本概念外, 还涉及到准坐标、准速度、准加速度以及微分运算与变分运算的交换关系等近代概念的研究, 最后给出国内外分析力学名著及分析力学大事年表等资料。第二章是分析力学的变分原理, 包括经典微分变分原理与积分变分原理, 以及一些新型的积分变分原理。第三章是分析力学的各种运动微分方程, 包括 Euler-Lagrange 体系的方程, Nielsen 体系的方程,

Appell 体系的方程, 混合型方程以及正则方程, 其中有完整系统和非完整系统的方程, 一阶系统和高阶系统的方程, Lagrange 力学的方程和 Hamilton 力学的方程等。第四章是分析力学的某些专门问题, 包括运动稳定性和小振动, 刚体定点转动问题, 相对运动动力学, 可控力学系统, 打击运动, 变质量问题, 机电系统的方程, 事件空间中的方程以及分析动力学的逆问题等九个彼此独立的专题。第五章是分析力学的积分方法, 包括利用循环积分和能量积分的降阶方法, Poisson 定理, 正则变换, Hamilton-Jacobi 方法, 场方法, Noether 定理, 积分不变量等, 这些积分方法概括了 Lagrange 力学与 Hamilton 力学, 完整力学与非完整力学的各种积分手段。第六章是分析力学的张量方法, 包括张量分析初步以及完整、非完整系统方程的张量表达。第七章是分析力学的外微分描述, 包括流形, 外微分等近代几何概念, 完整与非完整系统的几何描述。第八章涉及 Hamilton 系统中的混沌, 主要有 KAM 定理等近代与分析力学相关的非线性力学成果。

本书由梅凤翔(第一章至第四章)、刘端(第五章、第八章)、罗勇(第六章、第七章)著述。本书可作为大学生、研究生较高层次的分析力学教材, 可按需要选取有关章节讲授60—80学时。

本书在成书过程中得到北京理工大学李向平教授、褚亦清教授、郑锡琰副教授和分析力学教研室同志们的关心和支持。作者的老师、北京大学陈滨教授, 北京理工大学刘桂林副教授、史荣昌副教授在百忙中审阅了书稿并提出宝贵意见。作者对他们一并表示衷心地感谢。限于作者水平, 书中难免有疏漏, 敬请读者指正。

作者

1990年10月

目 录

第一章 分析力学的基本概念

§ 1.1 约束及其分类	1
1.1.1 约束	1
1.1.2 约束方程	2
1.1.3 约束的分类	3
1.1.4 微分约束的可积性定理	7
1.1.5 约束概念的扩充	11
§ 1.2 广义坐标、广义速度和广义加速度	12
1.2.1 广义坐标	12
1.2.2 广义速度	13
1.2.3 广义加速度	15
1.2.4 非完整约束方程在广义坐标、广义速度下的表达式	16
§ 1.3 准速度、准坐标和准加速度	17
1.3.1 准速度	17
1.3.2 准坐标	20
1.3.3 准加速度	21
1.3.4 高阶准速度	23
§ 1.4 虚位移	24
1.4.1 虚位移	24
1.4.2 实位移处于虚位移中的充要条件	28
1.4.3 虚位移概念的推广	29
§ 1.5 理想约束	31
1.5.1 约束反力与理想约束	31
1.5.2 理想约束的例子	32
1.5.3 理想约束假定的重要性和可能性	32
§ 1.6 微分运算与变分运算的交换关系	32

1.6.1	一阶非完整系统的交换关系	33
1.6.2	高阶非完整系统的交换关系	38
1.6.3	新型交换关系	41
§ 1.7	历史资料	42
1.7.1	名家介绍	42
1.7.2	国外分析力学名著与教材	42
1.7.3	我国出版的力学专著和教材	45
1.7.4	分析力学大事年表	46
1.7.5	关于分析力学的历史与现状研究	49
1.7.6	关于分析力学的基本概念的研究	49
习题		49
参考文献		50

第二章 分析力学的变分原理

§ 2.1	微分变分原理	52
2.1.1	D'Alembert-Lagrange 原理	52
2.1.2	Jourdain 原理	57
2.1.3	Gauss 原理	58
2.1.4	万有 D'Alembert 原理	59
2.1.5	微分变分原理的应用	63
§ 2.2	完整系统在广义坐标下的积分变分原理	68
2.2.1	Hamilton 原理	68
2.2.2	Lagrange 原理	76
§ 2.3	完整系统在准坐标下的积分变分原理	84
2.3.1	完整系统在准坐标下的 Hamilton 原理	84
2.3.2	完整系统在准坐标下的 Lagrange 原理	89
§ 2.4	非完整系统的积分变分原理	90
2.4.1	变分 $\delta \dot{q}_i$ 的定义	90
2.4.2	非完整系统广义坐标下的积分变分原理	93
2.4.3	非完整系统准坐标下的积分变分原理	105
§ 2.5	一类新型积分变分原理	107
2.5.1	m 次速度空间中的积分变分原理	107

2.5.2	二次速度空间中的积分变分原理及其极值特性·····	111
2.5.3	新型积分变分原理的应用·····	113
§ 2.6	新型交换关系下的 Hamilton 原理和高阶非完整系统的 Hamilton 原理 ·····	115
2.6.1	完整非保守系统的 Hamilton 原理 ·····	116
2.6.2	非完整非保守系统的 Hamilton 原理 ·····	118
2.6.3	高阶非完整系统的 Hamilton 原理 ·····	121
§ 2.7	历史资料·····	124
2.7.1	名家介绍·····	124
2.7.2	力学的变分原理发展简史·····	125
习题	·····	127
参考文献	·····	129

第三章 分析力学的各种运动微分方程

§ 3.1	Euler-Lagrange 体系的方程·····	131
3.1.1	完整系统的 Lagrange 方程 ·····	131
3.1.2	非完整系统带乘子的 Lagrange 方程 ·····	145
3.1.3	非完整系统的 Mac-Millan 方程·····	150
3.1.4	非完整系统的 Volterra 方程·····	151
3.1.5	非完整系统的 Чаплыгин 方程·····	155
3.1.6	非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程 ·····	161
3.1.7	高阶非完整系统的 Euler-Lagrange 形式的方程·····	165
§ 3.2	Nielsen 体系的方程 ·····	170
3.2.1	完整系统的 Nielsen 方程 ·····	170
3.2.2	非完整系统的广义 Nielsen 方程 ·····	175
3.2.3	高阶非完整系统的广义 Nielsen 方程 ·····	182
3.2.4	Euler-Lagrange 体系的方程与 Nielsen 体系的方程的等价性 ·····	188
§ 3.3	Appell 体系的方程·····	193
3.3.1	Appell 方程·····	193
3.3.2	Ценов 方程·····	215
§ 3.4	混合型方程 ·····	222

3.4.1	两大体系方程的混合	222
3.4.2	一类新的混合型方程	234
§ 3.5	正则方程	238
3.5.1	完整系统的 Hamilton 正则方程	238
3.5.2	非完整系统的正则方程	242
§ 3.6	历史资料	248
3.6.1	名家介绍	248
3.6.2	关于分析力学的运动方程	249
习题		250
参考文献		251

第四章 分析力学的某些专门问题

§ 4.1	运动稳定性和小振动理论	255
4.1.1	完整系统平衡的稳定性和运动稳定性	255
4.1.2	完整系统的小振动	262
4.1.3	非完整系统平衡状态附近的小振动	266
§ 4.2	刚体定点转动问题的分析动力学	271
4.2.1	Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形	272
4.2.2	Харламов 方程及其降阶问题	276
4.2.3	Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形	281
4.2.4	带有非完整约束的刚体绕固定点转动问题	285
§ 4.3	相对运动动力学	288
4.3.1	完整系统的相对运动动力学	288
4.3.2	非完整系统的相对运动动力学	297
§ 4.4	可控力学系统的分析动力学	303
4.4.1	带参数约束系统的分析动力学	303
4.4.2	包含伺服约束系统的分析动力学	310
4.4.3	有约束受迫运动控制问题的分析动力学	317
§ 4.5	打击运动的分析动力学	321
4.5.1	给定打击冲量的情形	321
4.5.2	瞬时加上约束的情形	329
§ 4.6	变质量系统的分析动力学	333

4.6.1	变质量力学系统的 D'Alembert-Lagrange 原理	333
4.6.2	变质量系统的 Hamilton 原理	339
4.6.3	变质量系统的运动微分方程	342
§ 4.7	机电系统的分析动力学	349
4.7.1	机电系统分析力学的基本概念和 Lagrange-Maxwell 方程	349
4.7.2	Lagrange-Maxwell 方程的应用	354
4.7.3	非完整动力学与电机的一般理论	360
§ 4.8	事件空间中的分析动力学	360
4.8.1	事件空间中的 Hamilton 原理	361
4.8.2	事件空间中完整保守系统的运动方程	365
4.8.3	事件空间中非完整系统的运动方程	366
§ 4.9	分析动力学逆问题	371
4.9.1	动力学逆问题的提法	371
4.9.2	运动方程的建立	373
4.9.3	运动方程的修改	376
4.9.4	运动方程的封闭	378
4.9.5	非完整系统动力学逆问题	382
§ 4.10	历史资料	385
4.10.1	名家介绍	385
4.10.2	关于分析动力学的专门问题	386
	习题	386
	参考文献	389

第五章 分析力学方程的积分方法

§ 5.1	动力学方程的降阶方法	392
5.1.1	循环积分和广义能量积分	392
5.1.2	完整系统的 Routh 方程和 Whittaker 方程	400
5.1.3	非完整系统方程的降阶方法	404
§ 5.2	Poisson 定理及其应用	416
5.2.1	Poisson 括号及其性质	416
5.2.2	关于第一积分的 Poisson 定理	419

5.2.3 求非完整力学系统第一积分的 Poisson 方法	423
§ 5.3 正则变换	430
5.3.1 正则变换及其群性	430
5.3.2 母函数	435
5.3.3 Mathieu 变换和点变换	441
5.3.4 无限小正则变换	444
§ 5.4 Hamilton-Jacobi 方法	446
5.4.1 化零正则变换	446
5.4.2 Hamilton-Jacobi 定理	448
5.4.3 Liouville 和 Stäkel 情形	451
5.4.4 Hamilton-Jacobi 方法对特殊非完整系统的应用	458
§ 5.5 场方法	467
5.5.1 求解常微分方程的场方法	467
5.5.2 完整系统的场方法	471
5.5.3 非完整系统的场方法	474
§ 5.6 Noether 定理	483
5.6.1 变换群	484
5.6.2 作用量的变分	485
5.6.3 作用量与 Lagrange 方程的关系	488
5.6.4 对称变换, 准对称变换, 广义准对称变换	491
5.6.5 Noether 定理及其逆定理	496
5.6.6 力学中基本守恒定律的推导	500
5.6.7 Noether 定理的推广形式	501
§ 5.7 力学系统的积分不变量	510
5.7.1 Poincaré 一阶线性相对积分不变量	511
5.7.2 高阶积分不变量	515
5.7.3 正则变换与积分不变量	520
5.7.4 关于积分不变量的唯一性定理	523
5.7.5 Poincaré-Cartan 积分不变量	526
5.7.6 没有积分不变量的动力学方程	528
§ 5.8 历史资料	529
5.8.1 名家介绍	529

5.8.2 关于分析力学方程的积分理论.....	530
习题	531
参考文献	533

第六章 分析力学的张量方法

§ 6.1 张量分析的某些结论.....	536
6.1.1 张量的基本概念.....	536
6.1.2 张量的性质.....	540
6.1.3 绝对微分.....	541
§ 6.2 基本动力学量和运动学量的张量表示.....	544
6.2.1 速度与加速度.....	544
6.2.2 动能和加速度能.....	547
§ 6.3 定常系统的运动方程.....	549
6.3.1 Schouten-Vranceanu 方程.....	551
6.3.2 Boltzmann-Hamel 方程.....	555
6.3.3 Appell 方程.....	563
§ 6.4 非定常系统的运动方程.....	568
6.4.1 Добровправов 方程.....	568
6.4.2 Добровправов 方程与分析力学中其它方程的等价性.....	577
6.4.3 Boltzmann-Hamel 方程	580
6.4.4 应用.....	586
§ 6.5 历史资料.....	593
6.5.1 名家介绍.....	593
6.5.2 关于分析力学的张量方法.....	593
习题	594
参考文献	594

第七章 分析力学的外微分描述

§ 7.1 可微流形.....	597
7.1.1 拓扑空间.....	597
7.1.2 微分流形.....	599

7.1.3	切空间	603
7.1.4	子流形	610
§ 7.2	外微分	614
7.2.1	张量丛	614
7.2.2	微分形式	615
7.2.3	微分形式的运算	619
7.2.4	Frobenius 定理	627
7.2.5	微分形式的积分	630
§ 7.3	Hamilton 力学的几何描述	637
7.3.1	辛流形	637
7.3.2	积分不变量	640
7.3.3	Poisson 括号	643
7.3.4	Noether 定理	645
7.3.5	正则变换	646
7.3.6	非定常力学	651
7.3.7	Hamilton 原理	653
7.3.8	Hamilton-Jacobi 方程的几何意义	656
§ 7.4	Lagrange 力学的几何描述	656
7.4.1	Legendre 变换	657
7.4.2	非定常力学	663
7.4.3	Legendre 逆变换	665
7.4.4	Hamilton 原理	667
§ 7.5	非完整力学系统的微分几何理论	670
7.5.1	Lagrange 矢量场	671
7.5.2	广义 Noether 定理	680
7.5.3	Hamilton 原理	687
7.5.4	高阶非完整力学系统的微分几何结构	688
§ 7.6	历史资料	692
7.6.1	名家介绍	692
7.6.2	年事介绍	692
7.6.3	关于近代分析力学	693
习题		694

参考文献	696
第八章 Hamilton 系统的混沌初步	
§ 8.1 一些基本概念	700
8.1.1 相空间中的运动	700
8.1.2 扩充相空间	702
8.1.3 作用积分	703
8.1.4 截面	705
8.1.5 可积系统和近可积系统	707
8.1.6 转动和摆动	708
§ 8.2 作用-角变量	709
8.2.1 作用-角变量	709
8.2.2 作用-角变量的应用	711
§ 8.3 经典摄动理论	719
8.3.1 单自由度系统	720
8.3.2 两个和两个以上自由度	724
8.3.3 对时间的明显依赖性	726
§ 8.4 浸渐不变量	728
8.4.1 概述	728
8.4.2 浸渐不变量	730
8.4.3 浸渐不变量的构造	733
§ 8.5 长期摄动理论	738
8.5.1 共振的排除	739
8.5.2 偶然退化和内在退化	742
8.5.3 高阶共振的排除	746
§ 8.6 Hamilton系统和正则映射	751
8.6.1 可积系统	751
8.6.2 近可积系统	754
8.6.3 Hamilton形式和映射	756
§ 8.7 正则映射的一般特性	758
8.7.1 无理旋转数和 KAM 稳定性	758
8.7.2 有理旋转数和 Poincaré-Birkhoff 定理	767

8.7.3 非线性映射的整体描述.....	771
8.7.4 Arnold扩散.....	774
8.7.5 数值例子.....	776
§ 8.8 历史资料.....	777
8.8.1 名家介绍.....	777
8.8.2 关于 Hamilton 系统的混沌.....	778
习题	779
参考文献	781
名词索引	782

第一章 分析力学的基本概念

分析力学的基本原理与基本运动微分方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移等。在这一章里，我们介绍约束、广义坐标、准坐标、虚位移、理想约束、交换关系等基本概念及其近代发展，最后给出一些历史资料。

§ 1.1 约束及其分类

本节讨论约束、约束方程、约束的分类、微分约束的可积性定理以及约束概念的近代推广等问题。

1.1.1 约束

研究质点系相对某个惯性坐标系的运动。

定义 1 在系统点的位置和速度上，事先加上一些几何的或者运动学特性的限制，我们把这些限制称为约束。

例如，火车被限制在铁轨上运动，铁轨是火车的约束。刚体内任意两点间的距离保持不变的条件是约束。这些约束是加在点的位置上的几何限制。冰刀运动的速度只能沿冰刀平面与冰面的交线上，这个约束是加在点的速度上的运动学限制。注意，约束是事先加上的限制，因此，当系统运动时，不论作用于其上的力和运动初始条件如何，这些限制都必须得到满足。

受到约束的系统称为非自由系统。反之，不受约束的系统称为自由系统。自由系统在主动力作用下可能在空间中任意运动。在同样主动力作用下，非自由系统与自由系统相比较，加在系统的点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动。

1.1.2 约束方程

一般的约束条件都可用约束方程或约束不等式来表达。这就需要根据已给条件, 利用几何学和运动学知识来写出具体的数学表达式。

例 1 两个质点在半径为 R 的固定球面上运动, 且两点间距离 l 保持不变。

以固定球面中心为原点, 取一固定直角坐标系。设两质点在此坐标系中的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 于是两点间距离为常值 l 的条件可表为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1.1.1)$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 \quad (1.1.2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0 \quad (1.1.3)$$

约束方程 (1.1.1)、(1.1.2) 和 (1.1.3) 就是加在该系统的点的位置上的几何限制。

例 2 两个质点用变长度 $l = f(t)$ 的杆相联结, 其中 t 为时间, f 为 t 的函数。

设两质点在空间某固定直角坐标系中的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 则约束方程为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - f^2(t) = 0 \quad (1.1.4)$$

例 3 在平面上运动的两个质点用不变长 l 的杆相联结, 并且杆中点的速度沿杆方向。

设两个质点的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 则两点间距离为 l 的条件表为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1.1.5)$$

而杆中点速度沿杆方向的条件可表为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_2 - y_1} \quad (1.1.6)$$