代数拓扑基础

杨鼎文 编

科学出版社

代数拓扑基础

杨鼎文 编

科学出版社

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

拓扑学是近代基础数学的主要支柱之一. 本书系统地论述了拓扑学的基础理论，主要内容包括：第一章，基本群；第二章，覆盖空间；第三章，多面体；第四章，单纯同调群；第五章，单纯逼近；第六章，同伦群；第七章，相对同调，奇异同调. 每章之后还附有少量的练习.

本书可作为高等院校数学系的基础教材，也可作为其他有关学科科研人员的参考书.

代 数 拓 扑 基 础

杨 鼎 文 编

责任编辑 林 鹏

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1992年 7 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1992年 7 月第一次印刷　印张：7

印数：1—2 550　字数：150 000

ISBN 7-03-002770-1/O·517

定价：6.30 元

序　言

代数拓扑学是拓扑学的重要分支，它的特征是借助于代数的对象和方法，如群、环、同态、同构等，研究拓扑空间在连续形变下的不变性质．代数拓扑学的思想方法已渗透到数学的各个分支，不仅与微分几何、代数几何、微分方程、大范围分析、抽象代数、泛函分析等联系密切，而且在其他科学技术领域（如电路网络、理论物理、原子核构造理论等）中，都有广泛的应用．

1966 年以前，高等师范院校数学专业一般是不开设拓扑课程的．改革开放以来，"点集拓扑"已作为必修课列入了教学计划，接着在本科高年级我们又开设了代数拓扑选修课．当时由于教学的需要，我们以参考文献 [1] 和 [10] 为蓝本编写了《代数拓扑讲义》，作为选修课的教材．这本讲义主要讲述基本群、覆盖空间和单纯同调理论．后来因为我校函数论、实分析、拓扑学专业的研究生需要开设代数拓扑课程，原来的教材已不适应新的要求，而国内又缺乏专门讲述代数拓扑基本理论，同时适合一般师范院校使用的教材．有鉴于此，我们主要根据参考文献 [4] 对原讲义进行了充实和修改．经使用反映比较好．在这次出版前又根据专家们的评审意见做了较大的修改．修改后的教材定名为《代数拓扑基础》，顾名思义，本书主要是讲述代数拓扑学的基本理论和方法的．

本书内容包括：基本群、覆盖空间、单纯复形、单纯同调

群、单纯逼近、高维同伦群、奇异同调理论概述等．为了阐明代数拓扑在几何学中的应用以及阅读的方便，书末附有“紧曲面的拓扑分类”、“交换群与非交换群”两个附录．

编写此书时编者力求做到：

（一）叙述简明，内容精炼，尽量用较少的篇幅，使读者在掌握代数拓扑经典内容的同时，能够对高维同伦理论、奇异同调理论等代数拓扑学的较新发展也有所了解．

（二）在阐述抽象理论的过程中，尽力揭示其产生的背景、理论的功用，以及潜在的数学思维方法，以便于理解．

（三）在保持科学性、系统性、逻辑严谨性的前提下，努力使抽象概念形象、直观化，而且选择了适量典型的例题，以加深对概念的理解．

（四）考虑到读者在阅读时加深对概念、理论的理解，需要有习题进行练习，每章后附有适量的练习题．

本书可供高等院校数学专业的学生及研究生阅读，也可供需要代数拓扑知识的科技人员、教师参考．

由于编者水平有限，书中的错误和不妥在所难免，请批评指正．

编者

目　　录

第一章 基 本 群

确定两个给定的拓扑空间是否同胚是拓扑学的基本问题之一，目前还没有解决这一问题的普遍方法，只是有些技巧适用于其中的某些特殊情形.

为证明两个空间同胚，只要构造一个同胚映射，它能将一个空间映到另一个空间上即可.

证明两个空间不同胚是另一回事，找不到它们之间的同胚映射，不等于不存在这样的映射. 通常采用的办法是：如果能够找到某一个拓扑性质为一个拓扑空间所具有而不为另一个空间所具有，那末这两个空间一定不同胚. 例如闭区间不同胚于开区间，因为前者是紧的，而后者却不是；实直线 $\mathbf{R}$ 不同胚于平面 $\mathbf{R}^2$，因为从 $\mathbf{R}^2$ 中挖去一点之后，剩下的空间还是连通的，但从直线 $\mathbf{R}$ 挖去一点之后剩下的空间就不是连通的.

但是我们通常在点集拓扑学中研究过的拓扑性质远不能解决这个问题. 例如，如何证明平面 $\mathbf{R}^2$ 不同胚于三维空间 $\mathbf{R}^3$，查遍拓扑性质，如紧性、连通性、分离性，可度量性等等，还是找不到一种拓扑性质能够用于区别这两个空间. 作为另一个例子，考虑二维球面 S^2 与环面 T，也找不到一种在点集拓扑学中研究过的拓扑性质能够把它们区别开来.

所以，我们应当引进一些新的性质和方法. 为此目的，这一章我们研究与拓扑空间相联系的一种最直观而又特别重要的代数对象——基本群.

§1.1 映射的同伦与空间的同伦等价

定义 1.1 设 $f, g: X \to Y$ 是从空间 X 到空间 Y 的连续映射，所谓 f, g 是同伦的，是指在 Y 中可以将 f"连续地形变"成 g。如图 1.1(a) 中 f 和 g 同伦，而 (b) 中 f 和 g 不同伦。

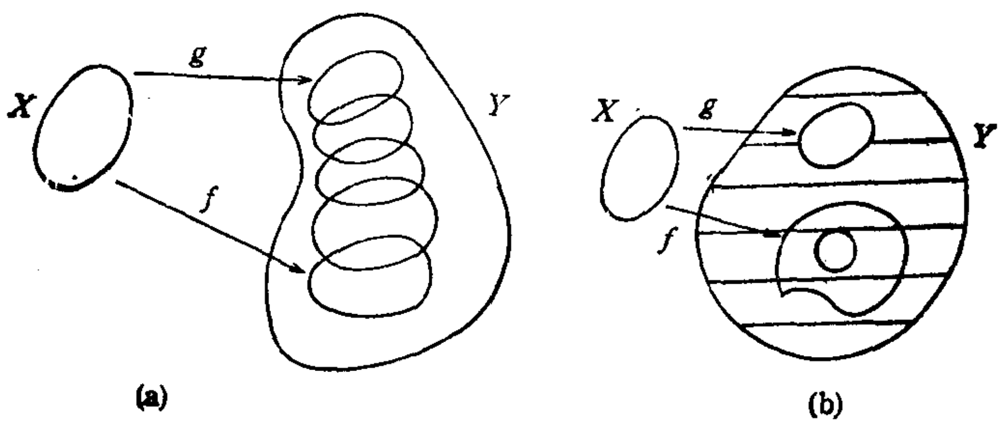

图 1.1

更确切地说，设 $f, g: X \to Y$ 是连续映射，I 表示单位闭区间 $[0,1]$，如果存在连续映射 $H: X \times I \to Y$ 使得对所有 $x \in X$，$H(x,0) = f(x)$，$H(x,1) = g(x)$，则称 f, g 是同伦的映射，记作 $f \simeq g: X \to Y$，H 称为连接 f 和 g 的一个同伦（图 1.2），当要指明同伦 H 时，常记为 $f \overset{H}{\simeq} g$。

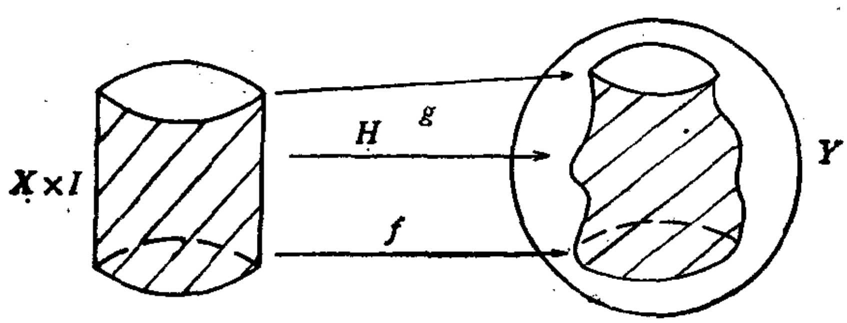

图 1.2

对 $t\in I$，令 $h_t(x)=H(x,t)$，则 $\{h_t:X\to Y\mid t\in I\}$ 是依赖于实参数 t 的一族映射．我们可将 t 看成时刻，在时刻 $t=0$，有映射 $f=h_0$，在时刻 $t=1$ 有映射 $g=h_1$，当时刻 t 从 0 变到 1 时，f "连续地形变" 成 g．需要注意的是，$h_t(x)$ 不仅当 t 固定时对 x 连续，而且同时连续地依赖于 x 和 t．

例 1 设 $i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是恒等映射，$C:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是常值映射，对 $\forall x\in\mathbf{R}^n$，有 $C(x)=0$，则 $C\simeq i$．因为设 $H:\mathbf{R}^n\times I\to\mathbf{R}^n$，由 $H(x,t)=tx$ 来定义，从而H是连续的且对所有 $x\in\mathbf{R}^n$，$H(x,0)=0=C(x)$，$H(x,1)=x=i(x)$．从几何上看，当 t 从 1 变到 0 时，映射H收缩 i 的象$\mathbf{R}^n$到点$\{0\}$．

同伦 "$\simeq$" 是由X到Y的所有连续映射组成的集合 $C(X,Y)$ 上的一个等价关系，即有

定理 1.1 设 $f,g,h\in C(X,Y)$，则

(1) $f\simeq f$;

(2) 若 $f\simeq g$，则 $g\simeq f$;

(3) 若 $f\simeq g$，$g\simeq h$，则 $f\simeq h$．

证明

(1) 设 $H:X\times I\to Y$由 $H(x,t)=f(x)$ 来定义，易见H连续，且对 $\forall x\in X$，$H(x,0)=H(x,1)=f(x)$，即

$$f\overset{H}{\simeq}f.$$

(2) 设 $F:X\times I\to Y$ 是连接f和g的同伦，即对 $\forall x\in X$，$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=g(x)$．令 $H:X\times I\to Y$ 由 $H(x,t)=F(x,1-t)$ 来定义，易见H连续，且对 $\forall x\in X$，$H(x,0)=F(x,1)=g(x)$，$H(x,1)=F(x,0)=f(x)$，因此H是从g到f的一个同伦，即 $g\simeq f$．

(3) 给定两个同伦 $F,G:X\times I\to Y$ 适合；$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=g(x)$，$G(x,0)=g(x)$，$G(x,1)=h(x)$。

设 $H:X\times I\to Y$ 由

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]\\ G(x,2t-1), & t\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]\end{cases}$$

来定义，由粘接引理知H连续，且对 $\forall x\in X$，$H(x,0)=F(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=G(x,1)=h(x)$，因此H是从f到h的同伦，即 $f\simeq h$。

同伦还有一个重要的性质。

定理1.2 设 X,Y,Z 是拓扑空间，若 $f\simeq f':X\to Y$，$g\simeq g':Y\to Z$，则 $gf\simeq g'f':X\to Z$。

证明 我们分两步证明

(1) $gf\simeq gf':X\to Z$；

(2) $gf'\simeq g'f':X\to Z$。

从而由同伦的传递性，可得 $gf\simeq g'f'$。

设 $F:X\times I\to Y$ 是从f到f'的同伦，令 $G=gF:X\times I\to Z$，则G连续，且对 $\forall x\in X$，$G(x,0)=gF(x,0)=(gf)(x)$，$G(x,1)=gF(x,1)=(gf')(x)$，所以 $gf\simeq gf':X\to Z$。

设 $H:Y\times I\to Z$ 是从g到g'的一个同伦，$\tilde{f}':X\times I\to Y\times I$，由 $\tilde{f}'(x,t)=(f'(x),t)$ 来定义，易知 $\tilde{f}'$ 连续。令

$K=H\tilde{f}':X\times I\to Z$，则$K$连续，且对 $\forall x\in X$，$K(x,0)=H\tilde{f}'(x,0)=H(f'(x),0)=g(f'(x))=(gf')(x)$，$K(x,1)=H\tilde{f}'(x,1)=H(f'(x),1)=g'(f'(x))=(g'f')(x)$，所以

$gf' \simeq g'f'$: $X \to Z$.

几何图形也可以按伦型来分类，这种分类比同胚分类粗略，但是很有用，也较易着手.

定义 1.2 设 X，Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是连续映射，如果存在连续映射 $g: Y \to X$，使得 $gf \simeq I_X$: $X \to X$，$fg \simeq I_Y$: $Y \to Y$，其中 I_X 和 I_Y 分别是 X, Y 到自身的恒同映射，则称 f 为同伦等价，称 g 为 f 的同伦逆. 这时拓扑空间 X 和 Y 称为同伦等价的，或称具有相同的伦型，记作 $X \simeq Y$.

对于任意给定的一族拓扑空间，同伦等价"$\simeq$"是这拓扑空间族上的等价关系.

$\simeq$的反身性和对称性是显然的，这里只证传递性. 设

$$X \simeq Y,\ Y \simeq Z,$$

相应的同伦等价为 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，它们的同伦逆分别为 $f': Y \to X$，$g': Z \to Y$，则 $gf: X \to Z$ 及 $f'g': Z \to X$ 都连续，且

$$(f'g')(gf) = f'(g'g)f = f'f \simeq I_X: X \to X,$$
$$(gf)(f'g') = g(ff')g' = gg' \simeq I_Z: Z \to Z,$$

因此 $X \simeq Z$.

显然，两个同胚的空间一定同伦等价，但反之不一定成立. 所以拓扑空间按照同伦等价分成的类比按照同胚所分成的类要"粗".

伦型相同的拓扑空间所共有的性质称为伦型不变性. 伦型不变性一定是拓扑不变性，但反之不一定，例如紧性.

定义 1.3 一个拓扑空间 X 叫做可缩的，如果 X 上的恒同映射 I_X 同伦于在 X 某点处的常值映射.

定理 1.3

(1) 空间 X 可缩，当且仅当它与单点空间有相同的伦型;

（2）任意映入可缩空间的两个连续映射同伦；

（3）若X可缩，则 I_X 同伦于在X任意点x处的常值映射。

证明 （1）对于 $p\in X$，以 c_p 表示在p点处的常值映射，i 表示 $\{p\}$ 到X的包含映射。若X可缩，由定义，I_X 同伦于 c_p，则 $i\cdot c_p=c_p\simeq I_X$，$c_p\circ i=i=I_{\{p\}}$，表明X与单点空间 $\{p\}$ 有相同的伦型。

反之，若空间X与单点空间 $\{a\}$ 有相同的伦型，即存在连续映射 $f:X\to\{a\}$ 及 $g:\{a\}\to X$ 使得 $g\circ f\simeq I_X$，$f\circ g\simeq I_{\{a\}}$，则 I_X 同伦于点 $p=g(a)$ 处的常值映射，因此X可缩。

（2）若 $I_X\simeq c_p$，则对于任意两个连续映射 f，$g:Y\to X$，有 $f=I_X\circ f\simeq c_p\circ f=c_p\circ g\simeq I_X\circ g=g$。

（3）设 $I_X\simeq c_p$，由（2），连续映射 $c_p,c_x:X\to X$ 同伦，所以 $I_X\simeq c_x$。

与常值映射同伦的连续映射也叫做零伦的，因此一拓扑空间X是可缩的，当且仅当它上面的恒同映射 I_X 是零伦的。

由例 1，欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是可缩空间。

例 2 欧氏空间的凸集是可缩空间。

事实上，若X是凸集，$p\in X$，令 $i:\{p\}\to X$ 包含映射，$c_p:X\to\{p\}$ 是常值映射，则首先有 $c_p\circ i=I_{\{p\}}$，其次定义 $H:X\times I\to X$ 为 $H(x,t)=(1-t)i\circ c_p(x)+tI_X(x)$，$x\in X$，$t\in I$，则$H$是从 $i\circ c_p$ 到 I_X 的一个同伦，于是

$$i\circ c_p\simeq I_X.$$

所以X与 $\{p\}$ 有相同的伦型，由定理 1.3(1) 知X可缩。

定义 1.4 设X是一个空间，A是X的子空间，如果存在连续映射 $r:X\to A$ 使得对于 $\forall a\in A$ 有 $r(a)=a$，即 $r|_A=I_A$，则称A是X的一个收缩核，r 称为收缩映射；如果

存在收缩映射 $r:X\to A$ 使得 $i\circ r\simeq 1_X: X\to X$，其中 $i:A\to X$ 是包含映射，则称 A 为 X 的形变收缩核，连接 $i\circ r$ 和 1_X 的同伦 $H:X\times I\to X$ 称为收缩形变。换句话说，如果存在同伦$H:X\times I\to X$ 使得对 $\forall x\in X$ 有

$$H(x,0)=1_X(x)=x,\ H(x,1)=i\circ r(x)\in A,$$

则 A 为 X 的形变收缩核；设 A 是 X 的形变收缩核，$H:X\times I\to X$ 是收缩形变，如果对于 $\forall a\in A$ 和 $t\in I$，有 $H(a,t)=a$，则称 A 为强形变收缩核，映射 H 称为一个强收缩形变。

直观地说，A 是 X 的形变收缩核是指 X 可以连续地形变成 A。在形变过程中若 A 的每一点保持不动，那么 A 就是 X 的一个强形变收缩核。

强形变收缩核必是形变收缩核，但反过来不一定成立。

一拓扑空间与其形变收缩核同伦等价。

事实上，设 A 为 X 的形变收缩核，$r:X\to A$ 为收缩映射，$i:A\to X$ 为包含映射，$H:X\times I\to X$ 为收缩形变，那么有 $i\circ r\simeq 1_X:X\to X$，$r\circ i=1_A:A\to A$ 所以 $X\simeq A$。

利用形变收缩核使我们在有些情况下能够寻找一个与给定空间同伦等价的较简单的空间。

一拓扑空间 X 是可缩的，当且仅当它以自身的一点构成的独立空间为形变收缩核。

事实上，若空间 X 以 $\{p\}$ 为形变收缩核，由前面的结论知 $X\simeq\{p\}$，因此 X 可缩。反之若 X 可缩，p 为 X 的任一点，由定理 1.3(3)，1_X 同伦于 p 点处的常值映射 $c_p:X\to\{p\}$，即 $1_X\simeq c_p$。又设 $i:\{p\}\to X$ 为包含映射，于是 $i\circ c_p\simeq 1_X$，即 X 以 $\{p\}$ 为形变收缩核。

这里需要注意的是：可缩空间 X 以任一点的单点空间为形变收缩核，但不必是强形变收缩核。

虽然同伦等价是比形变收缩核更一般的概念，但 M. Fuchs 证明了：两个空间 X,Y 同伦等价，当且仅当存在空间 Z，使 X,Y 分别同胚于 Z 的两个强形变收缩核。

§ 1.2 同伦道路和基本群

定义 1.5 拓扑空间 X 里的一条道路是单位闭区间 $I=[0,1]$ 到 X 里的一个连续映射 α，点 $\alpha(0)$ 和 $\alpha(1)$ 分别是 α 的始点和终点。

设道路 $\alpha,\beta:I\to X$，有公共始点 $\alpha(0)=\beta(0)$ 和公共终点 $\alpha(1)=\beta(1)$. 它们叫做同伦等价的，如果有一个连续映射 $H:I\times I\to X$ 使得

$$H(t,0)=\alpha(t),\ H(t,1)=\beta(t)\quad t\in I,$$
$$H(0,s)=\alpha(0)=\beta(0),\ H(1,s)=\alpha(1)=\beta(1),\quad s\in I.$$

映射 H 称为 α 和 β 间的同伦. 对于给定的 s 值，H 在 $I\times\{s\}$ 上的限制叫做同伦的 s-水平，记为 $H(\cdot,s)$.

定义 1.6 拓扑空间 X 里的一个圈是 X 中始点和终点重合，即 $\alpha(0)=\alpha(1)$ 的道路 α，始点和终点的公共值叫做这个圈的基点，有公共基点 x_0 的两个圈 α 和 β 是同伦等价的，如果作为道路它们是同伦等价的. 换句话说有公共基点 x_0 的两个圈 α,β 是同伦等价的(记为 $\alpha x_0\beta$)，如果有一个同伦 $H:I\times 1\to X$ 使得

$$H(t,0)=\alpha(t),\ H(t,1)=\beta(t),$$
$$H(0,s)=H(1,s)=x_0,\quad s\in I.$$

因为不管 s 在 $[0,1]$ 里如何选择，$H(0,s)$ 和 $H(1,s)$ 的值总是 x_0，有时说基点在“整个同伦中保持不动”.

例 图 1.3 中的两条道路 α 和 β 是同伦等价的，同伦可由

$H(t,s)=s\beta(t)+(1-s)\alpha(t)$，$(s,t)\in I\times 1$ 定义，这个同伦实质上是不变动端点而把“α 拉到 β”。如果空间在 α 和 β 的值域之间有一个“洞”，那么这两个道路就不可能是等价的。

定理 1.4

(1) 道路的同伦等价是空间 X 的道路集上的一个等价关系。

(2) 圈的同伦等价是 X 里有基点 x_0 的圈集上的等价关系。

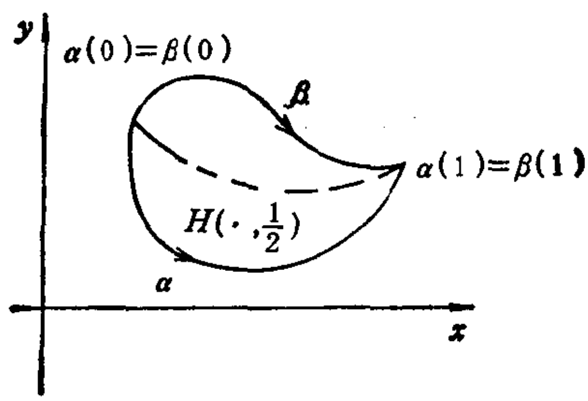

图 1.3

证明　我们先证明(2)，然后作必要的修改即可得到(1)。

考虑 X 中以 x_0 为基点的圈组成的集，设 α 为集中任一圈，它在同伦 $F(t,s)=\alpha(t)$，$(t,s)\in I\times I$ 之下等价于自身，说明关系 x_0 是自反的。

假定 $\alpha x_0\beta$，则有一同伦 $H:I\times I\to X$ 满足

$$H(t,0)=\alpha(t),H(t,1)=\beta(t),H(0,s)=H(1,s)$$
$$=x_0,s\in I.$$

于是同伦

$$\overline{H}(t,s)=H(t,1-s);(t,s)\in I\times I$$

使

$$\overline{H}(t,0)=\beta(t), \overline{H}(t,1)=\alpha(t), \overline{H}(0,s)=\overline{H}(1,s)=x_0,$$

这说明 $\beta\underset{\sim}{x_0}\alpha$，因此圈的等价是对称的.

现在设 $\alpha\underset{\sim}{x_0}\beta$，$\beta\underset{\sim}{x_0}\gamma$，则有同伦 H，$K: I\times I\to X$ 使得 $H(t,0)=\alpha(t)$，$H(t,1)=\beta(t)$，$H(0,s)=H(1,s)=x_0$，$s\in I$，$K(t,0)=\beta(t)$，$K(t,1)=\gamma(t)$，$K(0,s)=K(1,s)=x_0$，$s\in I$，α 和 γ 间要求的同伦 L 由

$$L(t,s)=\begin{cases}H(t,2s), \text{如果} 0\leqslant s\leqslant \dfrac{1}{2}\\ K(t,2s-1), \text{如果} \dfrac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

所定义，L 的连续性由连续性的粘接引理得到，其中

$$A=I\times\left[0,\ \frac{1}{2}\right], B=I\times\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$$

均为闭集，这样 $\alpha\underset{\sim}{x_0}\gamma$。

因此，$\underset{\sim}{x_0}$ 是个等价关系。

定义 1.7 如果 α 和 β 是 X 里的道路，且 $\alpha(1)=\beta(0)$，道路积 $\alpha*\beta$ 是由

$$\alpha*\beta(t)=\begin{cases}\alpha(t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的道路。$\alpha*\beta$ 的连续性是连续性引理的直接推论.把变量 t 看成时间，X 里的道路 α 可想像成一个点，若从 $\alpha(0)$ 出发移动到 $\alpha(1)$ 所画出的是一条连续路径，那么乘积 $\alpha*\beta$ 可以想象为：动点从 $\alpha(0)$ 出发用两倍的正常速度经过道路 α，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时到达 $\alpha(1)$，再以两倍的速度经过道路 β，当 $t=$