高等学校教学参考书

数学分析

第一册

何琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数 学 分 析

第 一 册

(一元微积分)

何 琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

内容简介

本书系参照1980年5月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会（扩大）会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”编写的．全书共分三册．第一册为一元微积分．本册除传统内容外，还讨论了一般的映射和逆射概念、凸函数、上极限和下极限，并较详细地讨论了实数的连续性．第二册为多元微积分．该册内容与传统内容有较大的差异，讨论了映射的微分、隐射和逆射定理，并严格地讨论了平面上的Riemann积分，直观地介绍了R^3中的外微分运算．第三册为无穷级数和广义积分．该一册较详细地讨论了无穷级数、广义积分和求导次序交换的问题，还讨论了Weierstrass逼近定理和处处连续而处处不可导的例子，以及Fourier分析初步等内容．

本书可作为数学专业的教学参考书．

高等学校教学参考书

数学分析

第一册

（一元微积分）

何琛 史济怀 徐森林 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.875 字数 262,000

1983年12月第1版 1984年8月第1次印刷

印数 00,001—11,550

书号 13010·0958 定价 1.70 元

序　言

本书共分三册．第一册是一元微积分，第二册是多元(二元、三元和相当一部分 n 元)微积分，第三册是无穷级数和广义积分．内容大体与 1980 年 5 月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”相仿．

早在 50 年代，微积分的面貌在国外开始出现较大的变化，到了 60 年代就出现了很多观点较高的多元微积分著作．自此，我们深感微积分教材改革的首要问题是内容的现代化，这就是我们编写本书的指导思想．我们在书中对多元微积分部分的内容作了比较大的改变，对一元微积分部分也作了不少变动．无穷级数和广义积分是经典的分析基础，对此我们编写得比较充实，单独成册．

我们在编写时的基本想法是：线性代数要进入微积分，并且要在 R^3 中引进外微分运算．下面就本书的主要内容作一简介．

(1) 实数．我们认为，对于实数重要的是在思想上认识清楚它是如何产生的，它的最深刻部分是什么，以及实数公理大意．至于详尽的构造过程是很次要的，对初学者尤是如此．所以我们在第一册中，前后分两至四个部分，反复讲解了上述内容．由于人们习惯于用无尽小数表示实数，我们证明了无尽小数有连续性(确界的存在性)．

(2) 函数．传统的教材大都忽略了函数的代数运算，似难跟上数学发展的需要．本书开始，我们按照《大纲》讲了从集合到集合的映射(函数)，这样可以避免以后对这个概念作重复枯燥的叙述．

在此基础上着重讲了函数的代数运算. 由于“复合”是一种很重要的代数运算,因此我们严格地讲了逆射(反函数)的概念. 凡此,均应区分函数 f 和函数值 $f(x)$,这在一切现代著作中早已这样做了. 但由于演算和应用的需要,我们保留了一个不定义的概念——“变量”. 视 x 为变量时,$y=f(x)$是因变量,x 是自变量. 并仍用变量处理微分的运算,以使初学者易于掌握.

(3) 极限. 关于数列极限我们分“两步走”. 第一步讲至单调数列为止,但对单调数列有极限这一命题暂不作出证明. 其中关于无理指数的问题,在讲授时不必详讲. 在第一册将结束时再走第二步——全部实数连续性命题. 在教学时,两步既可分开,也可合一. 这一部分内容的重要性是人所共认的,我们应予以充分的重视.

(4) 微分. 代数进入分析学,由来已久. 自60年代以来,国外数学界已把线代数引入了微积分,这对于较快地提高数学水平是很有帮助的. 因此我们以(从 R^n 中到 R^m 中的)映射为基本对象,讲了微分,切向量,隐射和逆射定理等. 但是,对于象国外流行的那种采用线性变换讲解上述问题的方法未被采用,因为我们认为这似乎应是泛函分析的内容和方法,不宜用于微积分课本中,尤其不宜用于低年级的微积分课本中. 因此我们一律改用矩阵. 相应地,我们突出 Jacobi 矩阵的作用,它就是多元函数和映射的“导数”. 为使初学者易懂,我们仍采用古典的方法(归纳法)证明隐射定理,然后再讲逆射定理,这也与大部分国外现代著作不同.

(5) 积分. 严格处理多重 Riemann 积分,国外也是从60年代就已很普遍. 本书为使初学者易学,我们把重点放在讲清二重积分上,读者自然也就懂得了多重积分,其中的讲法也可能是最简便的. 我们认为,Riemann 积分的直观意义即“微元求和”的思想,对初学者是十分重要的,因此我们保留了积分的极限定义. 既

然二重积分起到承上启下的作用，那么有关它的理论应是一个重点，所以在教学时，一重积分的可积性问题可以跳过不讲. 这样，第一册的最后一章就可并入到第二册的开头一章(R^2 拓扑)中去. 重积分换元是一个难点，我们就二重积分给出了严格的证明，但其方法同样适用于 n 重积分.

在 R^3 中引进外微分运算，早在 60 年代初期就已为龚昇同志积极主张，并成为我们教材改革的最早动机. 之后他又在《简明微积分》一书中实践了上述想法. 1980 年 5 月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会(扩大)会议上将微分形式列入"数学分析教学大纲"，这对于提高数学分析水平是有好处的. 一方面，可为以后学习微分流形提供预备知识. 另一方面，外微分是一个有力的运算工具，它使得整个线面积分包括正交曲线坐标在内的内容易于处理. 最明显的是统一了 Green 公式，Gauss 公式和 Stokes 公式，从而使我们在 R^3 中看到了"微积分基本公式". 当然，我们只能用直观的，初等的方法处理这个运算，不可能追求过高的严格性. 在低年级微积分课本中这样做尚属少见，我们这种大胆尝试，恐未必十分妥当，难免有错，望识者指正.

(6) 无穷级数和广义积分. 这部分内容是"硬分析"(古典分析学)的基本功，对大部分数学工作者都是必不可少的. 这一"硬功"的基本训练，现今对学生仍然是很重要的. 因此我们在书中编入了一些大纲要求以外的内容，如无穷乘积，Weierstrass 逼近定理，处处连续而处处不可导的例子，以及均值求和等. 讲授时可以酌情删减.

本书配置了较多的习题. 除大部分练习性的习题外，还有少量具有一定难度的习题. 这些难题大多有提示，或采用了大题化小的办法，实际已非难题了. 我们并不认为每一个初学者都必须全部完成书中的作业. 我们编写了较多的习题，一方面使教师有挑

选的余地，另一方面使有余力的学生可以多思考一些问题。初学者应在教师指导下完成课外作业，如果埋头钻到习题堆里，那就与我们的愿望相违了。

全书讲授时数，恐难低于250个学时。使用本书时，内容可根据具体情况作适当调整，同时对一些过难的证明也可降低一些要求，这样就可使学时数相应减少。如果线代数的教学还未能跟上，则二、三册的教学次序可以进行适当的对换。

复旦大学欧阳光中同志在审稿时仔细阅读了全稿，指出了不少疏误，并提出了许多很好的意见，谨在此表示衷心感谢。

微积分是一门传统的基础课，但为适应科学技术发展的需要，它的面貌不停地在发生变化。作为既是入门又与其它学科有广泛联系的课程，欲编好它实非易事。限于我们的水平，深感力不从心，热切期望专家和读者对本书的缺点和错误给予批评指正。

编　　者

1982.7

兵

目 录

第一章　极限与连续

第一节　函　　数

§1.1　实数和数轴

数学中的一个大的分支叫做“分析学”，分析学是从“微积分”开始的．微积分在古代就已可见其思想的萌芽，直至十七世纪才告产生．其后的一百余年中它完全处于混沌朦胧的状态，无严格的叙述和论证方法，因此众论纷纭，争论不休．直至十九世纪方始玉宇澄清，这是法、德数学家的贡献．他们提出了一个明确的“极限”概念，从而使微积分有了清楚的语言．极限是一种运算，是四则运算以外的一种运算，可以叫做“分析运算”．分析学就是以此运算为其基础的．但是，要弄清楚极限的道理，归根到底就是要弄清楚数．

那么数是什么呢？它又是如何产生的呢？也许大家会认为，这是不成问题的问题．其实不然．像今天这样文明的世界上，尚可找到一些偏僻的少数民族，他们几乎没有数的概念，只有少量几个数：1，2，3，或多至 4，5．自4，5以上概曰为“多”．数的体系是人们在长期的生产和科学实践中逐渐创造出来的，但在很长的时期里，人们对数的认识很不完善，直至十九世纪，随着数学各学科的发展，人们对数才有了比较完善的数系理论．

我们说，桶内有 5 公升水，这话说明桶内水的含量，这个量是由数“5”和单位“公升”来共同表达的．所以数是反映量的，是量的抽象．量无非是多寡、长短和大小，是比较出来的．比如说，2 匹

马，5 头羊，这是量的多寡，是可以数的量．似乎可以说，由这种可数量的多寡比较，产生出了自然数1, 2, 3, ⋯．但自然数远远不足以度量长短，这是因为，长短是连续变化的，这种“连续”的量与上述“可数”的或“离散”的量有根本区别．人们想到，规定一个标准长叫做“一尺”，一切长短拿来与这个标准长比较，就产生了有尽小数的概念，如 3 尺 2 寸 5 分，即 3.25 尺．大小就是面积或体积的比较，而面积是长度的平方，体积是长度的立方，因此要用数反映量，归根到底，就是要创造出足以反映一切长短的全部数来．也就是说，规定了标准的单位长以后，每一个线段都相应有一数表示其长短，并且数与数的关系能反映线段的长短关系．

那么有尽小数是否能度量一切线段的长短呢？还是远远不能！下面我们就先来讲解这个问题．

数既然是反映量的，为了反映量与量之间的关系，就要对数做运算．我们暂且不考虑加减法，而先讨论除法的运算．将 3 尺布平分给 5 个人，这就要做除法，每人得$\frac{3}{5}$尺．于是就产生了“分数”．若 p, q 是两个无公因子的自然数，则$\frac{p}{q}$是一个分数．

从分数（除法）又产生有尽小数或无尽循环小数．例如

$$\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

用 7 除 22，除不尽，产生余数 1；再除，产生余数 3；如此下去，每次所余只能是 0, 1, ⋯, 6 这七个数之一．因此最多除七次必得重复出现的余数．如果重复出现的余数是 0，就得有尽小数．现在是得重复出现的非零余数 1，因此得循环小数．所以分数都是有尽小数或无尽循环小数．

反之，一个有尽小数显然可以化为分数．例如

$$3.25=\frac{325}{100}=\frac{13}{4}.$$

而一个无尽循环小数也一定可以化为分数．例如，记

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+0.\dot{1}4285\dot{7}=3+\alpha,$$

则

$$10^6\alpha=142857+\alpha,$$

于是

$$\alpha=\frac{142857}{10^6-1}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7},$$

所以

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}.$$

由以上讨论知道：分数都是有尽小数或无尽循环小数，反之亦然．所以有尽小数只是分数的一部分．那么分数能否度量一切线段的长短呢？仍是远远不能！

我们知道，勾股均为 1 的直角三角形斜边之长为$\sqrt{2}$．这个数就不是分数．事实上，设$\sqrt{2}$为分数：

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

其中 p, q 是无公因子的自然数．于是

$$p^2=2q^2,$$

即 p^2 是偶数，所以 p 也是偶数．设 $p=2k$（k 是一自然数），代入上式则得

$$q^2=2k^2.$$

所以 q 也是偶数．于是 p, q 有公因子 2，这与 p, q 的假设矛盾．所以$\sqrt{2}$非分数．由此可见分数不足以度量一切线段的长短，它不能表示勾股均为 1 的直角三角形斜边之长，因此我们还应补充新的数！

如果我们用尺去量$\frac{5}{4}$尺（将 5 尺 4 等分），得 1 尺 2 寸 5 分，即得 1.25 尺．如果我们用尺去量$\frac{22}{7}$尺，得 3 尺 1 寸 4 分 2 厘 8 毫

5丝…，永远量不尽，即得 $3.\dot{1}4285\dot{7}$ 尺.如果我们用尺去量勾股均为1尺的直角三角形的斜边，则得1尺4寸1分4厘2毫1丝…，也永远量不尽，并且不会循环，否则$\sqrt{2}$就是分数了. 因此我们说$\sqrt{2}$是一个无尽不循环小数:

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots.$$

于是我们看到，用标准长去量一切线段只能出现上述三种情况：量得尽，得长为有尽小数；量不尽，出现循环，得长为无尽循环小数；量不尽，且不出现循环，得无尽不循环小数. 对于第三种情况，我们自然用量得的无尽不循环小数表示该线段之长. 也就是说，在分数（有尽或循环小数）的基础上再补充无尽不循环小数，就可度量一切线段之长了.

直至七世纪才开始出现0这个数，为了反映量的盈亏，后来才又出现负数. 由运算的角度来看，方程

$$3x+2=1$$

在正数范围内无解，而这样的方程随处可见，所以必须有0和负数. 这是容易理解的. 我们把

$$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

叫做"整数". 把0和正负分数（整数也是分数）叫做"有理数". 所以有理数包括正、负有尽和循环小数. 把正、负无尽不循环小数叫做"无理数". 有理数和无理数统称"实数"，或简称为"数". 有尽小数当然也可以看作特殊的无尽（循环）小数，例如

$$1.25=1.2500\cdots=1.2499\cdots.$$

这样，实数就是全体无尽小数.

构造了实数以后，我们就可以建立"数轴". 在直线 l（图1）上任取一点 O 叫做原点. 再取定一个线段叫做单位长. 以此单位长从原点开始往右量，量得线段 OP 之长为 x，则以 x 表示 P 点，叫做 P 点的"坐标". 以此单位长从原点开始往左量，量得线段 OQ 之

长为 x'，则以 $-x'$ 表示 Q 点，叫做 Q 点的坐标．这样，l 上每一点都对应一个数，即该点的坐标，l 叫做“数轴”．有了数轴就可以建立平面和空间坐标系，因而就可以建立解析几何学．但要记住，这只有在构造了实数以后才能办到．

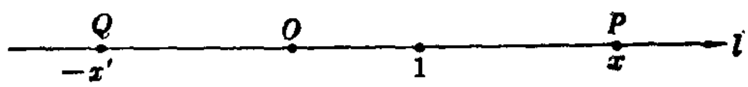

图 1

至此，问题还没有完．数轴上每一点都对应一个实数为其坐标．那么，每一实数是否都是数轴上某点的坐标呢？也就是说，全体实数是否正好铺满整个数轴？要回答这个问题，我们须得承认直线的“连续性”．什么叫做直线的连续性呢？这就是下述的命题．

直线的连续性：设在直线上有一列带端点的线段 A_1，A_2，A_3，…，且线段 A_2 套在 A_1 之中，A_3 套在 A_2 之中，如此继续下去，并且它们一个比一个无限制地缩短(图2)，则存在唯一的一点 P 位于这列线段中的每一个线段上．

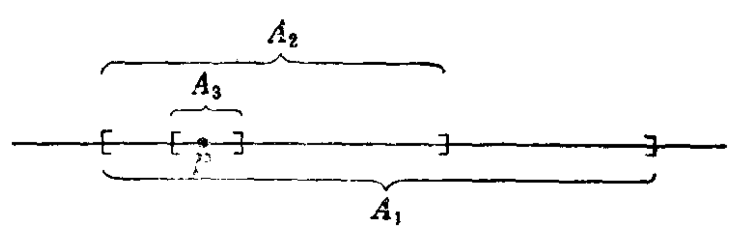

图 2

承认了直线的上述连续性以后，便可知每一个实数都在数轴上有一个位置．事实上，当 α 为一有理数时显然是正确的．但还要证明当 α 为一无理数时，数轴上也必有一点 P 以 α 为其坐标．不妨假定 $\alpha>0$．设

$$\alpha=a.a_1a_2\cdots$$

是一无理数，即是一无尽不循环小数，其中 a 是整数，a_1，a_2，…各为 0，1，…，9 中的一个数．并设

$$\alpha_1 = a.a_1, \qquad \beta_1 = a.a_1 + \frac{1}{10},$$

$$\alpha_2 = a.a_1a_2, \qquad \beta_2 = a.a_1a_2 + \frac{1}{10^2},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

则 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots$ 都是有理数，即是数轴上的点. 设 A_1 是以 α_1, β_1 为端点的线段，A_2 是以 α_2, β_2 为端点的线段，…，则 A_2 套在 A_1 之中，A_3 套在 A_2 之中，…，并且它们一个比一个无限制地缩短. 根据直线的连续性，存在唯一的一点 P 位于一切 $A_1, A_2, \cdots$ 上. 易见，P 点的坐标就是 α.

通过上述方法我们构造了实数，并且指出实数正好铺满整个数轴. 我们的目的是要说明两点:

1. 由实数可以建立数轴，从而就可以建立平面和空间坐标系，就可以用代数和分析方法研究几何问题(例如解析几何).

2. 既然直线有连续性，则实数也应有相应的连续性. 我们尤其要说明的，是这第二点. 以后我们在第四章中将从无尽小数本身，即不依赖于几何直线来发现这种连续性. 我们将逐渐看到，实数连续性对于微积分乃至整个分析学有着无比的重要性，是分析学的基础.

最后我们还要补充说明，上面构造实数的工作是非常初步的和直观的，目的只是为了建立数轴，从而说明实数必然要有某种连续性，但并未真正完成构造实数的工作. 为什么呢?因为我们根本未曾谈及无尽小数如何做四则运算的问题，也未曾谈及运算时大小次序的规律. 如要真正完成这件工作，就要讲究数的表示方法. 无尽小数是实数的一种表示方法，这种表示方法在实用中是非常方便的. 例如在计算时都采用十进制小数;根据所需要的精确度，计算到有限位小数. 但对于构造实数来说，无尽小数就不是一个好的表示方法. 十九世纪数学家致力解决的就是这个表示方法

问题.

以上我们概述了实数大意. 在第四章中我们除了进一步严格讨论实数的连续性以外,还将简单地介绍实数的公理化方法,那时大家对实数就可以有一个比较完整的认识了.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 数是用来反映什么的?

(2) 自然数,整数,有理数和无理数各是哪些数? 何谓实数?

(3) 有理数为什么不够我们应用?

(4) 实数和直线之间有什么关系?

(5) 什么叫做直线的连续性?

(6) 相应于直线的连续性,你认为实数应有什么样的连续性?

2. 化下列循环小数为分数:

(1) $0.24999\cdots$, (2) $0.\dot{3}7\dot{5}$, (3) $4.\dot{5}1\dot{8}$, (4) $2.1\dot{3}\dot{6}$.

3. 回答下列问题:

(1) $0.1010010001\cdots$是有理数还是无理数?

(2) 两个无理数之和是否还是无理数?

4. 证明下列命题:

(1) 一个有理数与一个无理数之和一定是无理数.

(2) 两个不相等的有理数之间有有理数.

(3) 两个不相等的实数之间有有理数,也有无理数.

5. 证明下列命题:

(1) $\sqrt{3}$是无理数.

(2) 若p是素数,则$\sqrt{p}$是无理数.

§ 1.2　函数

我们在中学已经有了"集合"和"函数"的概念. 集合是一切数学的基础,函数是微积分学的运算和研究对象,它们是至为重要的两个概念. 为了与读者统一语言起见,我们再明确一下这两个概