應用微積分

〔美〕R.E.拉森 R.P霍斯泰特勒 著

曉園出版社
世界图书出版公司

應用微積分

原著者 Larson · Hostetler
譯著者 梁 基 岩

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安
1992

内 容 简 介

本书是专为非理工专业的大学生所写的微积分入门书。全书对微积分的基本概念、解题方法及应用均作了详细的介绍。

应用微积分

R. E. 拉森、R. P. 霍斯泰特勒 著

梁基岩 译

晓 园 出 版 社 出 版

世界图书出版公司 北京分公司重印

(北京朝阳门内大街 137 号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华店经售

1992 年 7 月第一版 开本:787×1245 1/20

1992 年 7 月第一次印刷 印张 25

印数:0001—1200

ISBN:7—5062—1362—1/O·53

定价:19.00 元 (WB9202/17)

譯　序

美國Pennsylvania州立大學Roland E. Larson及Behrend學院Robert P. Hostetler兩位教授依多年教學經驗所著的"Brief Calculus with Applications"一書是一本專為非理工科學生撰寫的微積分教科書。該書內容深入簡出，說明務實。在美國極為暢銷，在國內也廣受各大專院校採用。

全書對微積分的基本概念、解題方法及應用均作了詳細而系統的解說，而對較艱深的理論則儘量避免繁瑣的敘述及深奧的證明，改以直觀或圖解、舉例方式說明。文字敘述流暢，使初學者可以很容易就獲得一完整的認識。書中的例題及習題極為豐富，大部分均為商科的重要應用，是以幫助學生們加強理論與實務的結合。

譯者兼備理工與商科背景，瀏覽過多種微積分版本深覺坊間甚缺乏理工科以外學生所適用之書籍。所以決定將此書譯為中文，以饗讀者。此書之完成蒙李利華小姐及李鴻瑋先生在編譯方面大力協助，謹此致謝！

譯者謹識
75年4月

原　　序

這是一本專爲管理、社會及生態科學學生所寫的微積分入門書，在撰寫本書時，我們一直秉持著兩項基本理念：爲學生著想，我們要以嚴謹而易讀的方式來編寫，把基本的微積分觀念和法則儘可能清楚地定義和說明；從教師的角度考慮，我們希望能設計出一種內容廣泛、易於傳授的教學工具，讓教師們能將課堂時間做最充份有效的利用。這兩件事情是我們從事多年微積分教學中所得的體驗，也是我們一直希望能達到的目標。

從三十年以上的微積分傳播歷程，以及十年來的編書經驗，我們發現下列幾項功能對於微積分的教與學有著極高的價值。

預備範例　1～7 章每一節的開頭均有一個刺激學習慾的開味範例，說明該節內容的應用性。這些範例是要讓讀者帶著輕鬆的態度去研讀，並不要求深入精通，因爲範例中所包含的許多觀念和技巧將在該節中討論。我們希望學生在看過預備範例後，能更有興趣來學習該節的數學內容，因爲它們有著趣味又實用的一面。

代數複習　在第 0 章中，我們將學習微積分所需的代數觀念做一次快速的瀏覽。根據班上學生的數學背景，老師們也可以考慮跳過第 0 章而直接從第 1 章開始，此時第 0 章就當做學生們的代數參考。

本節目的　每一節開始前先爲該節的主要目標做一簡要的敘述。

定理與定義　我們儘量以簡單而不失精確性的方式闡述各定理與定義。定理與定義均加上方框以強調其重要性。

例題　本書包括有 325 個以上的例題，每一個例題均經過仔細挑選以說明一個特殊的觀念或解題技巧。

習題　多做題目才能學好數學，所以一本微積分教科書必須有足夠的習題，讓初學者從練習中達到增加瞭解、培養實力以及熟能生巧的地步。本書有 1525 個以上的習題均依難易深淺分等，多做練習可收事半功倍之效。

書後附有奇數題的習題解答，爲了儘可能提供完全正確的答案，每一道題目均至少由四個人分別做過。

有不少習題均標示爲計算器問題（題前有Ⓒ記號），雖然大部分此類問題不用計算器也可求解，但我們發現學生可以從使用計算器中獲益，因此建議他們在做這些題目時能備有計算器。

圖形 解微積分問題的能力與看清並瞭解該問題的能力有密不可分的關係，我們在本書的內文和習題中準備了 525 個以上的圖例，可以培養學生對問題的透視與瞭解能力。

應用 爲了參考方便，本書封面內頁列出了應用問題索引。在本書中我們從各個不同的領域擷取了 325 個以上的應用問題，特別強調了商業與經濟上的應用。3.5 節中摘要了一些重要的基本商業名詞與公式以供參考。

Roland E. Larson
Robert P. Hostetler

The Pennsylvania State University
The Behrend College

目　　錄

第零章

基本代數複習

0.1 實數線與大小順序

本節目的：複習實數線及實數的重要性質•討論實數線上的區間符號•說明不等式的性質及其用途。

數學上用以表示實數的座標系統稱爲**實數線**（real line）或 x 軸。實數線的**正向**（positive direction）（右邊方向）是指 x 值漸增的方向。實數線上任一特定點所代表的實數稱爲該點的**座標**（coordinate）。如圖 0.1 所示，當我們繪實數線時，通常均將座標爲整數的點標示出來。

實數線的作用在於幫助我們對實數有更完整的認識，換言之，實數線上的每一點均恰與一個實數對應。同理，每個實數也均恰與一個實數線上的點相對應，這種對應的關係稱之爲**一對一對應**（one-to-one correspondence）（參見圖 0.2）。

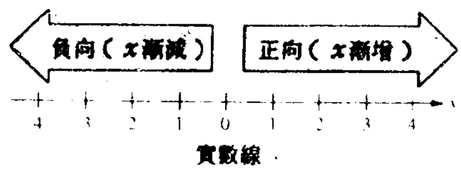


圖 0.1

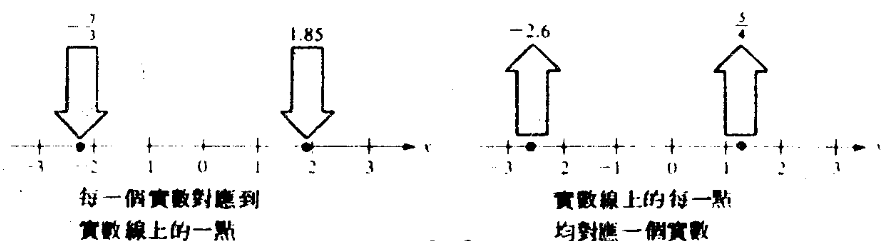


圖 0.2

圖 0.2 中所示的各點均對應於一個可以用兩個整數之比值來表示的實數，（注意 $1.85=\frac{37}{20}$ 及 $-2.6=-\frac{13}{5}$），這種數我們稱爲**有理數**（rational），有理數可以被表爲有限小數或無限循環小數：

有限小數	無限循環小數
$\frac{2}{5}=0.4$	$\frac{1}{3}=0.333\ldots=0.\overline{3}$*
$\frac{7}{8}=0.875$	$\frac{12}{7}=1.714285\overline{714285}\ldots=1.\overline{714285}$

* 橫線所示爲循環位數。

不是有理數的實數稱之為無理數(irrational)，無理數無法表示成兩個整數的比值（或表示為有限小數或無限循環小數）。為了表示一個無理數，我們通常利用一個小數近似值來代表，不過，因為有些無理數在數學上經常出現，所以我們就以一些特殊記號來表示它們，例如：$\sqrt{2}$、π 及 e 均代表不同的無理數，其小數近似值為：

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623$$
$$\pi \approx 3.1415926535$$
$$e \approx 2.7182818284$$

（其中符號≈代表近似於）。注意，雖然我們不能把一個無理數精確地表為（有限）小數，但是我們仍能正確無誤地用實數線上的一點來表示，如圖 0.3 所示。

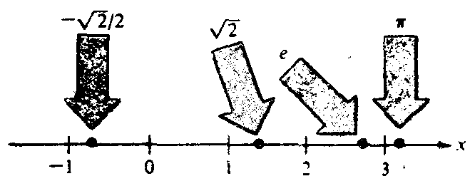


圖 0.3

實數的一個重要性質是它們具有大小順序(order)，如 0 小於 1，-3 小於 -2.5，π 小於 $\frac{22}{7}$ 等等。此種性質也可以在實數線上表現，若且唯若 a 在 b 的左邊，則 a 小於 b，數學上我們用不等式

$$a < b$$

來表示" a 小於 b "，例如，不等式 $\frac{3}{4} < \frac{7}{5}$ 成立係因在實數線上 $\frac{3}{4}$ 位於 $\frac{7}{5}$ 的左邊，如圖 0.4 所示。

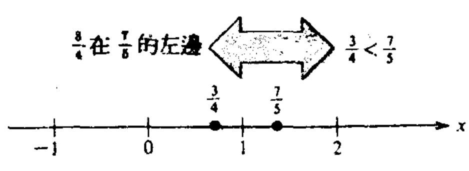


圖 0.4

在實際應用上，我們通常使用實數線的一部分而非整個實數線，例如水在華氏32°及212°間爲液態，如圖0.5所示，我們將該實數子集合記爲不等式

$$32 < x < 212$$

或區間（interval）

$$(32,\ 212)$$

同理，對應於不等式

$$212 \leq x$$

的無限區間（infinite interval）

$$[212,\ \infty)$$

可用以代表蒸汽的溫度範圍，如圖 0.6 所示。注意，中括號代表“小於或等於”（≤）；∞及 −∞分別代表正無限大與負無限大，這些符號並不代表實數，只是用以幫助我們更正確地描述無界的情況。

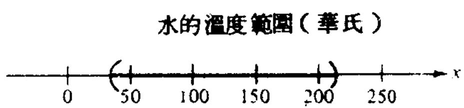


圖 0.5

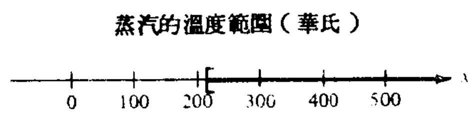
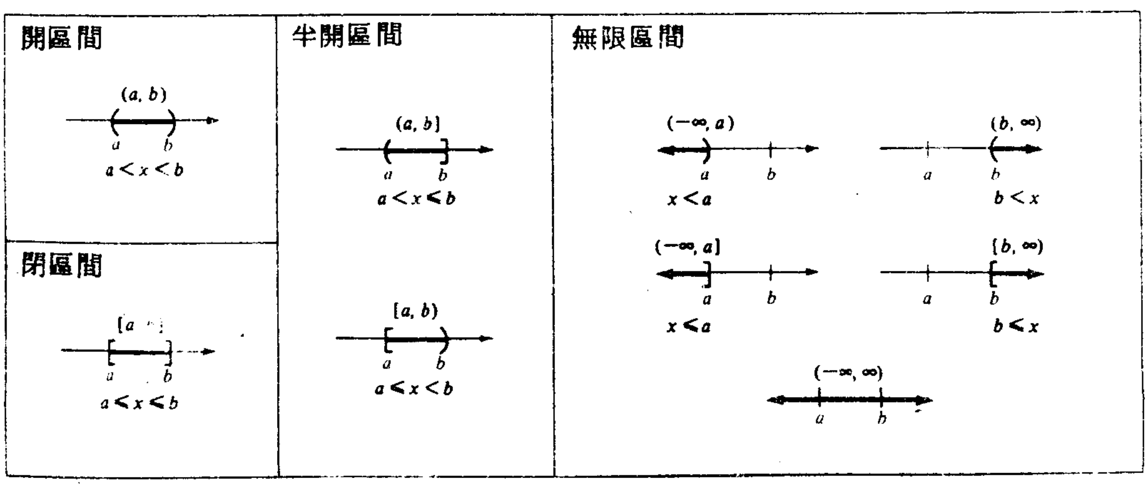


圖 0.6

形如 (a,b) 的區間並未包含“端點” a 與 b，稱之爲開區間（open interval），區間 $[a,b]$ 則包含了其端點，稱之爲閉區間（closed interval），形如 $[a,b)$ 及 $(a,b]$ 的區間稱爲半開區間（half-open interval），表 0.1所示爲實數線上 9 種不

表 0.1　實數線上的區間



同的區間。

以下所列爲不等式的運算法則，這些法則對＜及≤同樣適用。

不等式的運算

遞移律	**不等式相加**
$a < b$ 且 $b < c$ $\quad a < c$	$a < b$ 且 $c < d$ $\quad a + c < b + d$
乘一正常數	**加上一常數**
$a < b \quad ac < bc$	$a < b \quad a + c < b + c$
乘一負常數	**減去一常數**
$a < b \quad ac > bc$	$a < b \quad a - c < b - c$

注意 同乘一個負數會使不等式反向，此原理對除法同樣成立，換句話說，若同除以一正數，不等式關係不變，但若同除以一負數，不等式將反向。下面三例說明了如何利用上述法則來求解不等式。

例 1 解不等式

求滿足下列不等式的解集合

$$2x - 5 < 7$$

解：不等式兩邊同時加 5

$$2x - 5 + 5 < 7 + 5$$
$$2x < 12$$

兩邊同乘 $\frac{1}{2}$ 可得

$$\tfrac{1}{2}(2x) < \tfrac{1}{2}(12)$$
$$x < 6$$

故知解集合的區間爲 $(-\infty, 6)$，如圖 0.7 所示。

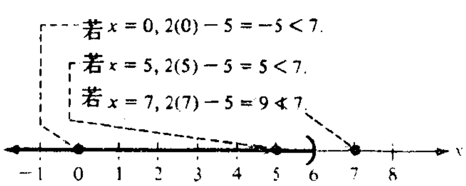


圖 0.7

在解出不等式後，最好能檢查一下解集合中的 x 值是否滿足原不等式，同時也應驗證一下解集合以外的 x 值是否的確未滿足原不等式，例如在圖 0.7 中我們發現 $x = 0$ 及 $x = 5$ 均滿足不等式，而 $x = 7$ 未滿足該不等式。

例 2 解二重不等式

求滿足下列不等式的解集合

$$-3 \le 2 - 5x \le 12$$

該二重不等式意指 $-3 \le 2 - 5x$ 且 $2 - 5x \le 12$。

解：雖然問題中包含兩個不等式，但可同時處理。先從三個式子中同時減去 2 可得

$$\begin{aligned} -3 - 2 \le 2 - 5x - 2 &\le 12 - 2 \\ -5 \le -5x &\le 10 \end{aligned}$$

然後再除以 -5（記得不等式要反向）

$$\frac{-5}{-5} \ge \frac{-5x}{-5} \ge \frac{10}{-5}$$

$$1 \ge x \ge -2$$

故知代表解集合的區間為 $[-2, 1]$。 □

例 3 商業應用

一工廠生產某種產品的單位變動成本為 \$2.50。每天的固定成本為 \$500，現已知某一月份中的每日總生產成本介於 \$1200 及 \$1325之間，試求該月份中的最高及最低生產水準。

解：單位變動成本為 \$2.5，故生產 x 單位的變動成本為 $2.5x$，因為每天固定成本為 \$500，故每天生產 x 單位的總成本為

$$C = 2.5x + 500$$

現因該成本介於 \$1200 及 \$1325 間，故

$$1200 \le 2.5x + 500 \le 1325$$

$$1200 - 500 \le 2.5x + 500 - 500 \le 1325 - 500$$

$$700 \le 2.5x \le 825$$

$$\frac{700}{2.5} \le \frac{2.5x}{2.5} \le \frac{825}{2.5}$$

$$280 \le x \le 330$$

WB|---1 ..

故知該月份的每天生產水準介於低限 280 及高限 330 單位之間，如圖 0.8 所示。

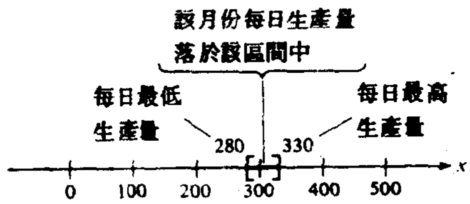
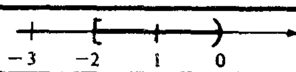
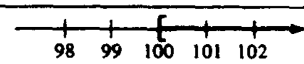


圖 0.8

習題 0.1

1～8 題，試完成其餘兩個空格。

	區間符號	不等式符號	圖形
1.			
2.	$(-\infty, -4]$		
3.		$3 \leq x \leq \frac{11}{2}$	
4.	$(-1, 7)$		
5.			
6.		$10 < x < \infty$	
7.	$(\sqrt{2}, 8]$		
8.		$\frac{1}{3} < x \leq \frac{22}{7}$	

9.～20.題，解不等式並將解集合繪於實數線上。

9. $x - 5 \geq 7$

10. $2x > 3$

11. $4x + 1 < 2x$

12. $2x + 7 < 3$

13. $2x - 1 \geq 0$

14. $3x + 1 \geq 2$

15. $4 - 2x < 3$

16. $x - 4 \leq 2$

17. $-4 < 2x - 3 < 4$

18. $0 \leq x + 3 < 5$

19. $\frac{3}{4} > x + 1 > \frac{1}{4}$

20. $-1 < -\frac{x}{3} < 1$

21～24題，試判斷已知 x 值是否滿足不等式。

21. $5x - 12 > 0$

(a) $x = 3$ (b) $x = -3$

(c) $x = \frac{5}{2}$ (d) $x = \frac{3}{2}$

22. $x + 1 < \frac{2x}{3}$

(a) $x = 0$ (b) $x = 4$

(c) $x = -4$ (d) $x = -3$

23. $0 < \frac{x-2}{4} < 2$
(a) $x = 4$ (b) $x = 10$
(c) $x = 0$ (d) $x = \frac{7}{2}$

24. $-1 < \frac{3-x}{2} \leq 1$
(a) $x = 0$ (b) $x = \sqrt{5}$
(c) $x = 1$ (d) $x = 5$

ⓒ25. P元的本金以單利率r生利，t年後的本利和爲

$$A = P + Prt$$

若欲使 \$1000 的本金在兩年中所生本利和超過\$1250，則利率應大於何值？

ⓒ26. 飲食街販賣燒餅的小店每做一打燒餅需成本 \$1.45，每打賣 \$2.95，除了生產的直接成本外，小店需付水電及租金每天\$25，如果已知每天的利潤介於 \$25 及 \$200間，則每天的銷售量（打）變動範圍爲何？

ⓒ27. 已知銷售某產品x單位的總收入爲

$$R = 115.95x$$

而生產x單位的成本爲

$$C = 95x + 750$$

爲了產生利潤，則R必須大於C，試問若欲產生利潤則x值應如何？

ⓒ28. 一運輸公司其每部卡車的每年營運成本爲

$$C = 0.32m + 2300$$

其中C的單位爲元，m的單位爲英里，如果公司希望每部卡車每年的營運成本小於 \$10,000，則m必須小於何值？

29.及30.題，試判斷兩實數何者較大。

ⓒ29. (a) π 或 $\frac{355}{113}$ (b) π 或 $\frac{22}{7}$

ⓒ30. (a) $\frac{224}{151}$ 或 $\frac{144}{97}$ (b) $\frac{73}{81}$ 或 $\frac{6427}{7132}$

0.2 實數線上的距離及絕對值

本節目的：計算實數線上兩點間的距離•利用絕對值來描述實數線上的區間•計算一區間之中點。

已知a與b爲實數線上相異之兩點，則我們在圖 0.9 中定義三種距離：

1. 由a至b的有向距離（directed distance）用 $b-a$ 表示。
2. 由b至a的有向距離用 $a-b$ 表示。
3. a與b之間的距離用 $|a-b|$ 或 $|b-a|$ 表示。

ⓒ 可藉助計算器