高等财经专科学校教材

经济应用数学

(修订版)

上册

刘应辉　主编

中国财政经济出版社

高等财经专科学校教材

经　济　应　用　数　学

（修　订　版）

上　册

刘应辉　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学（上）/刘应辉主编．—修订版．—北京：中国财政经济出版社，1996

高等财经专科学校教材

ISBN 7-5005-3009-9

Ⅰ．经…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．经济数学-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 21774 号

中国财政经济出版社出版

社址：北京东城大佛寺东街 8 号　　邮政编码：100010

北京印刷三厂印刷　　各地新华书店经销

850×1168 毫米　32 开　8.125 印张　191 000 字

1996 年 1 月第 2 版　　1996 年 7 月北京第 2 次印刷

印数：10 031—36 040　定价：8.80 元

ISBN 7-5005-3009-9/F·2838

（图书出现印装问题，本社负责调换）

编 审 说 明

本书是全国财经类通用教材。经审阅，我们同意作为高等财经专科学校教材出版。书中不足之处，请读者批评指正。

财政部教材编审委员会

1995年11月2日

再 版 说 明

1989年财政部委托湖南财经高等专科学校刘应辉副教授主持编写的《经济应用数学》，是全国高等财经专科学校各专业的通用教材。该书自出版发行以来，被全国许多高等院校财经专业选作教材，在一定程度上满足了各类学校财经专业经济应用数学的教学需要。

在当前，为了适应发展社会主义市场经济的需要，适应新会计制度以及财经工作在新形势下对经济应用数学的新的教学要求，培养和造就千百万跨世纪财经工作的应用型人才，根据1995年财政部大中专教材编审会的精神，对原版《经济应用数学》进行修订。

在修订的过程中，编者力求在原版的基础上有所前进，有所提高。一方面要求不削弱基础理论，另一方面又要求加强应用性的教学。为此，对原版内容进行了谨慎的筛选和必要的补充，对其编章结构作了一些调整。根据现行教学计划学时分配的特点，全书分上、下两册。上册：微积分；下册：包括矩阵代数、概率初步和线性规划方法等三编。全书在编章结构上既注意到数学自身的科学性，又比较注意它在经济学中的（初步）应用，较好地体现了以应用为教学目的经济应用数学的逻辑结构和教学规律。

本教材仍力图体现高等财经专科学校的培养目标，选编“必须”和“够用”的数学基础理论和数学基本方法，并在不增加学

生不必要的数学难度负担的基础上，着意选编了适量的经济学应用数学的实例，以引导学生掌握作为中级财经管理人员所必备的数学基础和数学方法，并在运用上下功夫，切实有效地提高学生的数学思维能力和分析解决财经实际问题的能力。

本教材为了适应各专业的不同要求，把概率初步和线性规划方法编写成平行学时的两编，供各校不同专业在不增加总学时的前提下，选择讲授。

本教材文字简练，阐述正确，循序渐进，通俗易懂。参加第一版编写与审阅的有：刘应辉、李静芬、赵斯泓、张祖毅、白富志、程理民、董承章、王尚文，由刘应辉任主编。参加本次修订编写的有：湖南财经高等专科学校刘应辉副教授（执笔：第七、十一、十五、十六、十七章），山东财政学院李静芬副教授（执笔：第一、二、五、六章），山西财政税务专科学校杨文安副教授（执笔：第八、九、十、十二章），江西财院九江分院刘超讲师（执笔：第三、四、十三、十四章），由刘应辉任主编。

本次修订，对原版编写及排印中的疏漏进行了修正；对每章适量的习题（A）（B），在书后附有参考答案。

《经济应用数学》教材能及时地修订再版与财政部培训中心教材编审室的大力支持和具体指导是分不开的。中国财政经济出版社对本教材的出版给予了很大的支持；本书得到财政部组织的教授专家刘冠军等具体指导和审定，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，祈望得到专家和读者的批评指正。

编　者

1995年7月

目　录

第一编　微　积　分

第一编 微 积 分

第一章 函　数

函数是微积分中最重要的基本概念之一，是微积分研究的对象，也是分析经济变量的重要工具。本章将在中学数学的基础上，对函数作个简单的复习、补充和提高。最后介绍几种常见的经济函数以及它在经济领域中应用的实例。

§1.1 函　数

（一）区间和邻域

1. 区间

区间是指介于两个实数之间的一切实数。

定义 1.1 设 a、$b\in R$，且 $a<b$。

（1）闭区间，记作：$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

（2）开区间，记作：$(a, b)=\{x|a<x<b\}$；

（3）半开区间，记作：$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，或 $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$。

通常将闭区间、开区间和半开区间称为有限区间，其右端点

b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间长。如图 1-1（a）、（b）所示。

（4）无限区间，记作：

$$(-\infty,\ b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\} = \{x \mid x \leqslant b\}，(c)；$$

$$(-\infty,\ b) = \{x \mid -\infty < x < b\} = \{x \mid x < b\}；$$

$$[a,\ +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\} = \{x \mid a \leqslant x\}；$$

$$(a,\ +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid a < x\}，(d)。$$

$$R = (-\infty,\ +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

即至少有一个端点为无穷的区间称为无限区间，如图 1-1（c）、（d）所示。

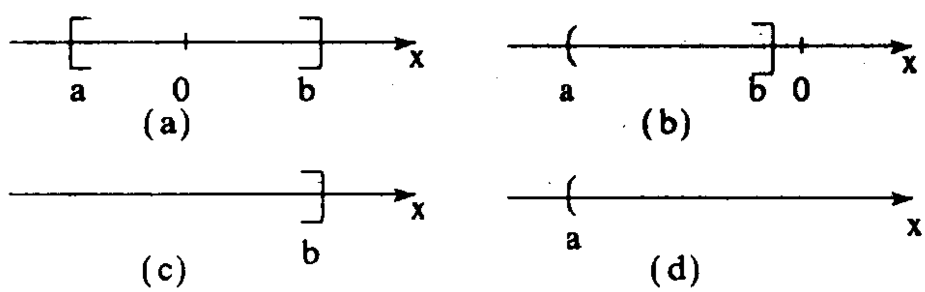

图 1-1

2. 邻域

定义 1.2　设 δ 为某个正数，x_0 为某个实数，称开区间（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$）为点 x_0 的 δ 邻域；x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，如图 1-2 所示。

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 的集合

（$x_0-\delta$，x_0）$\cup$（x_0，$x_0+\delta$）

称为点 x_0 的去心邻域（空心邻域）。

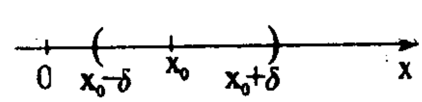

图 1-2

点 x_0 的邻域，又可表示为不等式。

$$x_0-\delta < x < x_0+\delta \quad \text{或} \quad |x-x_0| < \delta$$

点 x_0 的去心邻域，可表示为：$0 < |x-x_0| < \delta$

例如，不等式 $|x-2| < 0.5$，表示以点 $x_0=2$ 为中心，$\delta=0.5$ 为半径的开区间（1.5，2.5）。

不等式 $0<|x-2|<0.5$，表示以点 $x_0=2$ 为中心，$\delta=0.5$ 为半径的去心邻域（1.5，2）∪（2，2.5）。

（二）函数的概念

现实世界中各种变化着的量不是孤立的，而是相互联系、相互影响的。这种变量间的相互依赖关系反映在数学上就称为函数关系。它反映了自然现象中量（当然也包括各种经济量）的变化规律。

定义 1.3 设 D 为一非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使对每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数，记作：

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

称 x 为自变量，y 为因变量，集合 D 为 $f(x)$ 的定义域。

如果 $x_0\in D$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；否则就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义。对于每一个 $x_0\in D$，函数 y 的对应值 y_0，称为 x_0 所对应的函数值，记作：

$$y_0=f(x_0) \qquad \text{或} \qquad y|_{x=x_0}=f(x_0)$$

全体函数值所构成的集合，称为函数的值域，记作值域 Z，即：

$$Z=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

由函数定义可知，定义域（D）和对应规则（f）是确定函数的两个要素。对于已知的两个函数，只要它们的定义域和对应规则相同，那么它们就是相同的函数，否则就是不相同的函数。

例如，$y=\dfrac{5}{x-2}$ 与 $y=\dfrac{5x+5}{(x+1)(x-2)}$ 由于它们定义域不同，所以它们是两个不相同的函数。

值得注意的是，定义 1.3 中要求对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y。在这里“唯一地”是十分重要的，我们研究的都是这种定义下的单值函数。

（三）函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x \in D$，恒有：

(1) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；

例如，函数 $y=sinx$ 及 $y=x^3$ 都是奇函数；

函数 $y=cosx$ 及 $y=x^2$ 都是偶函数；

函数 $y=sinx+cosx$ 是非奇非偶函数。

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称。

例 1 判断函数 $y=x^3cosx$ 的奇偶性。

解 因为对于任何 $x\in R$，都有：

$$f(-x)=(-x)^3cos(-x)=-x^3cosx=-f(x)$$

所以，$y=x^3cosx$ 是 R 上的奇函数。

2. 函数的单调性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，对于任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时：

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加，常用“↗”符号表示；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少，常用“↘”符号表示。

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，使函数 $f(x)$ 单调的区间，称为单调区间。

如何判断一个函数是否单调？一般可以根据函数单调的定义来判断，在学习导数之后，将给出判断函数增减性的一种相当有效的简便方法。

3. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 a，使对任意的 $x\in D$，恒有：

$$f(x+a)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数。满足上式的最小正数 a_0，称为函数 $f(x)$ 的周期。

例如，我们熟悉的三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 等都是周期函数。

4. 函数的有界性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意的 $x\in D$，恒有：

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界；

如果存在一个实数 L，恒有 $f(x)\leqslant L$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界；

如果存在一个实数 L，恒有 $f(x)\geqslant L$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界。

容易证明，有界函数必有上界和下界，而既有上界又有下界的函数才是有界函数。

例如，$y=\sin x$ 是 R 上是有界函数，因为对于任意的 $x\in R$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上虽有下界，但无上界，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上无界。但是它在 $[1,+\infty)$ 上是既有上界又有下界，因而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界。可见，函数的有界性与区间有关。

有界函数 $y=f(x)$，在 D 上的图象，必介于两条平行直线 y

$=M$和 $y=-M$（$M>0$）之间，如图 1-3 所示。

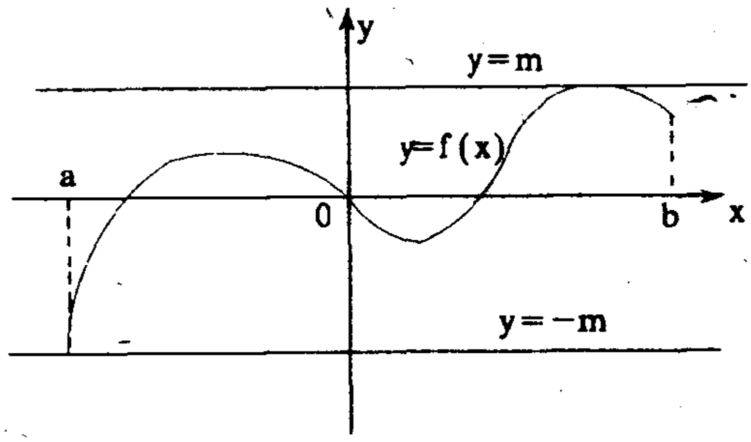

图 1-3

值得注意的是，讨论函数的性质时，必须指出所给函数的定义域。因此，不能笼统地说，某函数是有界或无界（或其它性质），必须指明某函数在什么范围内（定义域）具有什么性质。

例如，前例 $y=\dfrac{1}{x}$在不同的研究范围（定义域）：$x\in(0, 2)$是无界函数，而 $x\in[1, +\infty)$ 却是有界函数。因此，回答函数的性质时，必须指出函数 $f(x)$ 在什么区间上具有什么样的性质。如 $y=x^2$，$x\in[-6, 5)$ 上根本就谈不上什么奇偶性，因此，不能笼统地说函数 $y=x^2$ 是偶函数，而必须指出它在整个定义域 R 上，(或是对称的区间上）是偶函数。

（四）函数的表示法

在函数的定义中，对函数的表示方式并未限制。中学数学曾经运用列表、图象和只用一个式子表示的解析式等来表示函数。但是，在有些情况下，有的函数对其定义域内自变量 x 取不同值，却不能用一个统一的数学解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这种函数称为分段函数。

例如，若公共汽车在 A、B 两地间行驶，已知旅客携带行李不超过 10 公斤者，不收行李费；超过 10 公斤至 25 公斤者，每公斤收行李运费 0.12 元；超过 25 公斤至 100 公斤者，每公斤收行李运费 0.20 元，试列出行李收费解析式。

解 设 x 表示旅客行李的公斤数，依题意，得：

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 0.12\ (x-10) & 10<x\leqslant 25\\ 0.2\ (x-25)\ +1.8 & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

注意：分段函数是用 n 个式子表示的一个函数，而不是表示几个函数。

五、关于函数定义域的求法

如果函数是用解析式表示，且未赋予其实际意义，则其定义域就是使函数式具有实数意义的那些自变量的全体。具体求法与中学相同。如果这个函数是分段函数，其定义域是其各分段函数上不相交子集的并集。

例如，上面行李收费函数的定义域是：

$$[0,10]\cup(10,25]\cup(25,100]=[0,100]$$

对于实际问题的函数，其定义域应由实际问题本身的经济背景来确定。

例 2 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$，并绘出它的略图，求出它的定义域。

解 根据绝对值的定义，得

$$\begin{aligned}y&=3-|x-1|\\&=\begin{cases}3-(1-x) & x<1\\ 3-(x-1) & x\geqslant 1\end{cases}\\&=\begin{cases}2+x & x<1\\ 4-x & x\geqslant 1\end{cases}\end{aligned}$$

其定义域：

$(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = R$

如图 1-4 所示。

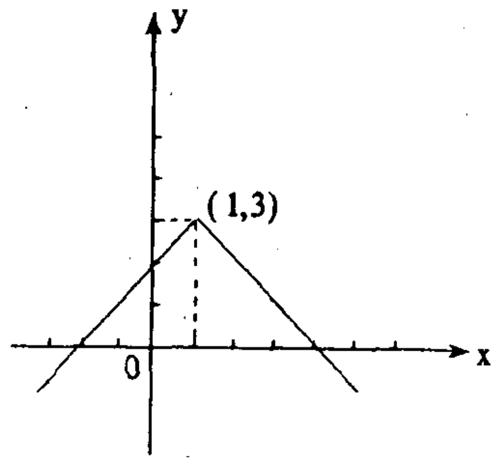

图 1-4

§1.2 初等函数

（一）几种有关函数的概念

1. 隐函数

有些函数它的因变量是用自变量表示出来的。例如，$y=x^2$，$y=\sqrt{a^2-\sin^2 x}$等，我们称此为显函数。而有些函数它的因变量与自变量的对应规则是用一个方程

$$F(x,y)=0$$

表示的，例如，$y+\sin(xy)=1$，$3^{xy}+\lg(x+y)-5=0$ 等，我们称此为隐函数。简单地说，我们把 $y=f(x)$ 的函数关系隐含在方程 $F(x,y)=0$ 中的函数叫做隐函数。

2. 反函数

定义 1.8 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，其值域为 Z，如果对每个 $y\in Z$，都有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数，记作 $x=f^{-1}(y),y\in Z$，这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。

由定义可知，函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域，分别是函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域。我们习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，$y=f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x),x\in Z$。因为函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x、y 互换，所以它们的图象是关于直线 $y=x$ 对称的。

应当注意的是，一个函数如果有反函数，那么，x 与 y 必是一一对应的，换句话说，也只有一一对应的函数才有反函数。

例如，在 R 上，$y=x^2$ 没有反函数，因为 1 个 y 值可以对应着两个 x，但 $x\in(-\infty,0)$ 上 $y=x^2$ 便有反函数 $y=-\sqrt{x}$ $(x>0)$。

3. 复合函数

定义 1.9 设函数 $y=f(u),u\in D_f$，而函数 $u=\varphi(x),x\in D_\varphi,u\in Z_\varphi$。若 $Z_\varphi\cap D_f$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数。其中，x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量。把 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域仍记为 D，即：

$$D=\{x\,|\,\varphi(x)\in D_f\}$$

值得强调的是，不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，$y=arcsinu$，$u\in D_f=[-1,1]$；$u=2+x^2$，$x\in D_\varphi=R$，$Z_\varphi=[2,+\infty)$，由于 $Z_\varphi\cap D_f=[-1,1]\cap[2,+\infty)=\Phi$，所以 $y=arcsinu$ 与 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数。

例 1 求复合函数 $y=arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域。