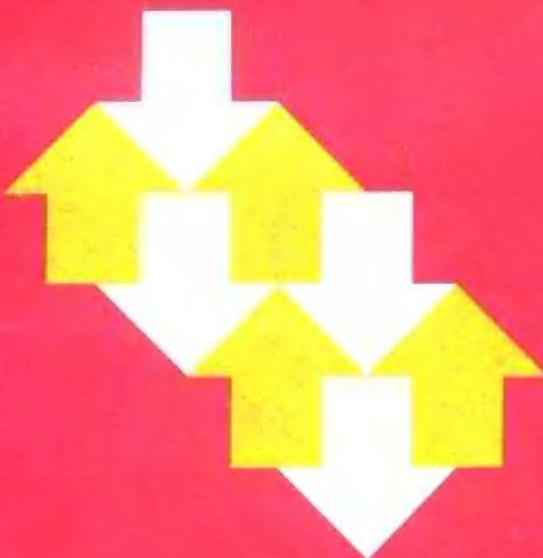
理论力学基础

吴德明 编



北京大学出版社

理论力学基础

吴德明 编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

理论力学基础/吴德明编. -北京:北京大学出版社,
1995.12

ISBN 7-301-02906-3

Ⅰ.理… Ⅱ.吴… Ⅲ.理论力学 Ⅳ.031

书　　名:理论力学基础
著作责任者:吴德明
责 任 编 辑:李采华
标 准 书 号:ISBN 7-301-02906-3/O·363
出 版 者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排 印 者:国防科工委印刷厂
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
850×1168 毫米　32 开本　8.5 印张　220 千字
1995 年 12 月第一版　1995 年 12 月第一次印刷
印　　数:0000—0,000册
定　　价:12.80 元

内 容 简 介

本书主要讲述分析力学的基本内容. 其特点是从分析力学的基本原理——哈密顿原理出发,导出拉格朗日方程和正则方程,以此建立整个力学理论体系,使其更完整、更清晰. 书中注意了与后续物理和无线电类课程的联系,最后给出一定数量的习题.

本书增加了非线性振动简介,介绍了相图的概念,并用它处理线性和非线性振动问题,为进一步研究非线性现象提供了一种既简便又有效的方法.

本书虽然是为理科无线电专业编写的,但仍是讲述力学的基本原理,可供物理类各专业的学生使用.

前　言

本教材是编者在讲授理论力学课程的基础上编写而成的. 在长期的教学和教改实践中我们决定普通物理中力学部分以讲授矢量力学为主,理论力学以讲授分析力学为主. 本教材的内容正是反映了这样的思想.

本教材首先以曲线坐标系为例介绍了运动学基本公式,其中加速度公式又与动力学中的拉格朗日方程相联系.

在动力学的讲授中首先介绍哈密顿原理,并由此导出拉格朗日方程,再用拉格朗日方程处理各种动力学问题,包括有心运动、振动、刚体运动和相对运动等. 最后从哈密顿原理导出正则方程,并介绍了哈密顿力学的有关内容.

教材中增加了非线性振动简介,介绍了相图的概念,并用此处理线性和非线性振动问题. 当前物理学研究的许多方面正从线性发展到非线性. 在这种情况下,在基础课教学中讲一点非线性和处理非线性的有效方法对进一步学习物理学中的非线性问题,如电子学中的非线性信号与系统分析、非线性声学以及非线性光学和混沌现象都是有好处的.

理论力学是一门基础课程,它有助于训练思维和提高分析问题、解决问题的能力,它所研究的运动规律具有普遍意义,并不完全限于力学问题,特别是分析力学中的变分原理具有更大的普遍性. 由于分析力学中的许多定律在形式上与现代物理如统计力学和量子力学中的规律相似,因而分析力学又为后续课程作了准备. 分析力学是理论物理学习阶段的一个内容,它仍属于经典力学范畴,但理论形式更高级,使用的处理方法具有更一般、更抽象的形

式，也更多地使用了数学工具. 这些特点要在学习中多加注意.

本课程教学工作的初期，王楚教授曾组织了许多次有益的讨论，朱辉德副教授直接参加了本课程的教学工作.本教材吸收了他们许多宝贵的意见.朱辉德副教授最近不幸去世，但他对本课程的贡献我们是不会忘记的.

由于编者的水平限制，问题和错误在所难免，恳切希望读者批评指正.

编　　者

1993年8月于北京大学

目　录

第一章 运 动 学

运动学是动力学的基础，运动学中用矢量分析的方法处理问题，即用位矢、速度、加速度等矢量来描述物体的运动. 而分析力学仅指分析动力学，它仍然需要以应用矢量分析的运动学为基础. 因此本章所述内容既属于矢量力学也属于分析力学.

第一节 质点运动学

一、基本概念

力学中已讲过质点运动的基本概念，这里只讨论一些问题，以引起思考.

1. 质点

力学中讲当物体的大小和形状在运动中可以不考虑时就把物体当作质点. 此定义的含义是物体的转动和形变在运动中可以忽略，但这里需要有一个判据.

当一个形状不变化的物体(即刚体)作平动运动时，我们常用质点运动表示物体的运动. 这时物体上各点的运动速度和加速度都相等，因而用任一点表示物体的运动都是一样的. 我们可以把这样的物体运动抽象成质点运动，即好像物体的质量和所受的力都集中在物体上某点时该点的运动.

但许多物体都可能有转动，例如地面上的汽车经过一弧形桥面时的运动、地球的运动等. 这种情况下，物体各点的速度和加速度不相等. 一般说不能把物体的运动抽象成质点的运动，只能用质

心运动定理描述物体跟随质心的平动，用动量矩定理描述物体绕过质心的轴的转动. 当物体上各点速度差的大小的极大值$|\Delta \boldsymbol{v}|_{max}$比质心速度$|\boldsymbol{v}_c|$小很多时($|\Delta \boldsymbol{v}|_{max} \ll |\boldsymbol{v}_c|$)，我们可以忽略物体上各点速度的差别(即忽略转动的影响)，把物体运动抽象成质点运动. 例如，上述例子中，当桥面曲率半径远大于汽车线度时，上述条件成立，汽车运动可当作质点运动；对于地球的运动，如果考虑地球的公转运动，需选用太阳惯性系，其质心运动速度的大小$|\boldsymbol{v}_c| \approx 30\mathrm{km/s}$，而地球上各点速度差的极大值为$|\Delta \boldsymbol{v}_c| \approx 1\mathrm{km/s}$，不等式成立，地球可看作质点. 设想若地球自转角速度极大，$|\Delta \boldsymbol{v}_c|$可能会很大，因而只能用地球质心运动来描述地球公转运动(即看作刚体质心运动). 地球不能看作质点.

2. 参照系和坐标系

这一问题在力学中也讲过，这里只强调两点：

(1) 描述物体运动必须有一参照系.

(2) 参照体必须是一个刚体.

第二点反映了物体运动空间是三度空间，一个参照点不能描述物体在三度空间的位置.

经典力学中的空间是欧氏空间，它是线性空间，可在三个相互垂直的方向上线性地(均匀地、不弯曲地)无限延伸. 参照体无限地刚性延伸组成的空间就是参照系.

在质点组动力学中引入质心参照系，它并不表明以质心这一点作参照系用以描述质点组的运动. 这里仍有一假想的参照体，它随质心作平动运动. 这一参照体的无限延伸组成的空间就是质心参照系.

坐标系是参照系的数学抽象，使得质点在参照系中的位置可以定量描述. 坐标系可固定在参照系中也可不固定在参照系中，例如，我们在描述刚体运动时常常应用固定在刚体上的运动坐标系.

在分析力学中常用广义坐标. 由广义坐标组成了一种特殊的

坐标系，它往往不是由三个相互垂直的轴组成．这一点以后介绍．

二、曲线坐标系

1．曲线坐标的概念

过去我们学过笛卡儿（直角）坐标系、平面极坐标系、柱坐标系和球坐标系等．先看笛卡儿坐标系．如图1.1(a)所示，它由一坐标原点和三根相互垂直的坐标轴组成．三根轴分别是：x 轴为 $y=0$ 平面与 $z=0$ 平面的交线；y 轴为 $z=0$ 平面和 $x=0$ 平面的交线；z 轴为 $x=0$ 平面和 $y=0$ 平面的交线．在此坐标系中等坐标面为平面．所以若 a,b,c 为常量，则 $y=b$ 和 $z=c$ 两平面交线、$z=c$ 和 $x=a$ 两平面交线以及 $x=a$ 和 $y=b$ 两平面交线皆为直线，它们分别平行于 x,y,z 轴．一矢量在这些直线上的投影等于在 x,y,z 轴上的投影．而坐标为 (a,b,c) 的点 P 为等坐标面 $x=a,y=b$ 和 $z=c$ 的交点．在笛卡儿坐标系中，基矢 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴的单位矢量．它们是常矢量．

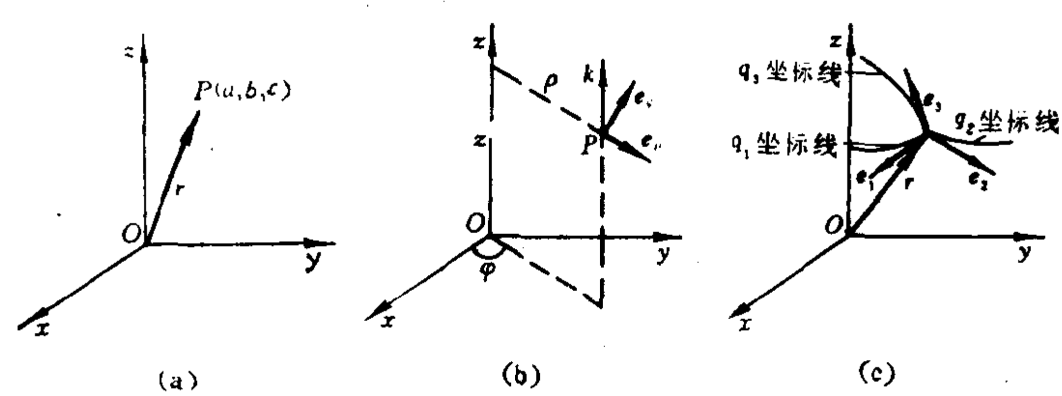


图 1.1 (a) 笛卡儿坐标系 (b) 柱坐标系 (c) 曲线坐标系

但其他坐标系则不一样，例如柱坐标系，如图 1.1(b)所示．坐标为 (ρ,φ,z) 的点 P 为 $\rho=a_1,\varphi=b_1,z=c_1$ 三面的交点．这些面是等坐标面（a_1,b_1,c_1 为常量）．它们不全是平面：

$\rho=a_1$ 为半径为 a_1 的圆柱面；

$\varphi=b_1$ 为边界为 z 轴的半平面；

$z=c_1$ 为平面.

这些面的两两交线也不再都是直线：

$\rho=a_1$ 面和 $\varphi=b_1$ 面的交线为平行 z 轴的直线，线上沿 z 增加的方向单位矢量为 $\boldsymbol{k}$；

$\varphi=b_1$ 面和 $z=c_1$ 面的交线为起始点在 z 轴上的射线，线上沿 ρ 增加方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\rho$；

$z=c_1$ 面和 $\rho=a_1$ 面的交线为在 $z=c_1$ 平面上的圆心在 z 轴上半径为 a_1 的圆，在 P 点圆的切线上沿 φ 增加方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\varphi$.

一般说，若取 q_1,q_2,q_3 为三个独立的坐标变量(它们可唯一地确定空间中一点)，各等坐标面的两两交线看作坐标线(一般为曲线)，如图 1.1(c)所示：

$q_2=$常量的面和 $q_3=$常量的面的交线为 q_1 坐标线(曲线)；

$q_3=$常量的面和 $q_1=$常量的面的交线为 q_2 坐标线(曲线)；

$q_1=$常量的面和 $q_2=$常量的面的交线为 q_3 坐标线(曲线).

而 q_1,q_2,q_3 坐标线在 P 点的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为 P 点处的基矢，它们的指向沿坐标的增加方向. 由这样的坐标曲线和基矢组成了曲线坐标系. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两相互垂直，则叫正交曲线坐标系. 柱坐标系，球坐标系等都是正交曲线坐标系. 在曲线坐标系中空间一点的坐标由该点所在的等坐标面的坐标值确定. 由上述基矢定义可知 $\boldsymbol{e}_1(q_1,q_2,q_3)$，$\boldsymbol{e}_2(q_1,q_2,q_3)$，$\boldsymbol{e}_3(q_1,q_2,q_3)$ 皆为坐标的函数，不是常矢量.

2. 一般曲线坐标系中质点的速率、速度、加速度公式

设独立的曲线坐标变量为 q_1,q_2,q_3，它们与笛卡儿坐标之间用下式联系：

$$\begin{cases} x = x(q_1,q_2,q_3) \\ y = y(q_1,q_2,q_3) \\ z = z(q_1,q_2,q_3) \end{cases} \tag{1.1}$$

即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1'}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为笛卡儿坐标系中的基矢. 由(1.1′)式可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k} \quad (i = 1,2,3) \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \equiv H_i \tag{1.3}$$

H_i 称为拉密系数,一般说它是有量纲的量. 由图 1.1(c)可知$\partial\boldsymbol{r}/\partial q_i$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 同向,所以可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = H_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} \cos(q_i \cdot x) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{i} = \dfrac{1}{H_i}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial q_i} \\ \cos(q_i \cdot y) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{j} = \dfrac{1}{H_i}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial q_i} \\ \cos(q_i \cdot z) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{k} = \dfrac{1}{H_i}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial q_i} \end{cases} \tag{1.5}$$

由此我们可以导出曲线坐标系中的速度、加速度公式. 由质点速度的定义得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t} \\ &= H_1\dot{q}_1\boldsymbol{e}_1 + H_2\dot{q}_2\boldsymbol{e}_2 + H_3\dot{q}_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

这就是曲线坐标系中速度公式.

以上导出的各式对任意曲线坐标系都成立,而下面则是针对正交曲线坐标系导出的结果. 由正交性可得

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

由此求得在正交曲线坐标系中质点的速率为

$$v = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2} \tag{1.7}$$

质点行进的一段弧元为

$$\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t = \sqrt{H_1^2(\mathrm{d}q_1)^2 + H_2^2(\mathrm{d}q_2)^2 + H_3^2(\mathrm{d}q_3)^2} \tag{1.8}$$

对于加速度，我们只求其在曲线坐标基矢方向上的投影：

$$a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v} \cdot \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$$

$$a_i H_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) - \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) \tag{1.9}$$

又因

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$$

上式中最后一个等式是由于$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}$仅是坐标的函数，与 $\dot{q}_i$ 无关. 应用上式可得

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \tag{1.10}$$

又有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) \\
&= \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_i}\dot{q}_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)
\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \tag{1.11}$$

(1.10)、(1.11)式代入(1.9)式则得

$$a_i H_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

令

$$T=\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}(H_1^2\dot{q}_1^2+H_2^2\dot{q}_2^2+H_3^2\dot{q}_3^2)$$

则

$$a_i=\frac{1}{H_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \tag{1.12}$$

这是一个很有用的式子，它与分析力学中的拉格朗日方程有着密切的联系，那时我们将会了解到其物理含义. 式中 T 与动能仅差一质量 m. 而动能是分析力学中最基本的物理量之一，这一点也是值得注意的. 另一方面用此式求正交曲线坐标系中的加速度公式比较方便，不需要作复杂的矢量分析.

【例】 求柱坐标系中质点的速度 $\boldsymbol{v}_1$、速率 v 和加速度分量 a_i 的表达式.

【解】 柱坐标与笛卡儿坐标之间的坐标变换式为

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

则拉密系数

$$H_\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}=1$$

$$H_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\rho$$

$$H_z=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1$$

则

$$\boldsymbol{v}=H_\rho\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+H_\varphi\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+H_z\dot{z}\,\boldsymbol{e}_z=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{z}\,\boldsymbol{e}_z$$

$$v=\sqrt{H_\rho^2\,\dot{\rho}^2+H_\varphi^2\dot{\varphi}^2+H_z^2\dot{z}^2}=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}$$

$$T=\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

由此可得出各加速度分量为

$$a_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho}\right] = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$

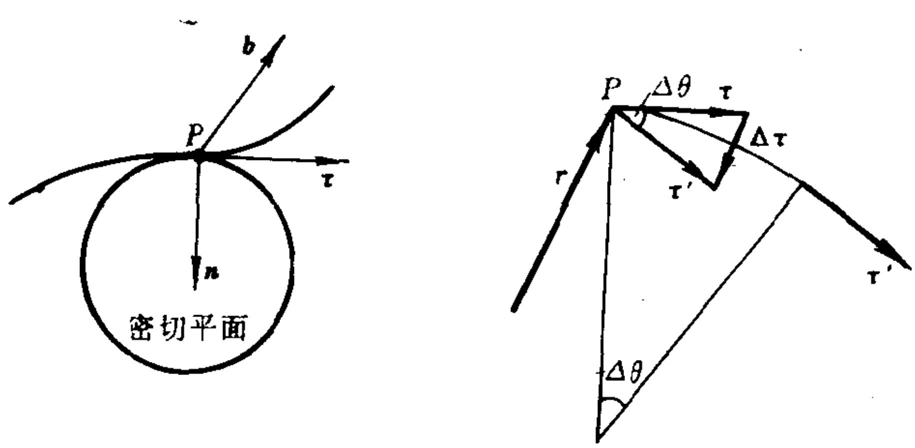
$$a_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{\rho}(2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}) = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}$$

$$a_z = \frac{1}{H_z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z}\right] = \ddot{z}$$

我们过去讲过的坐标系都属于正交曲线坐标系. 由本节结果可导出这些坐标系中的速度、加速度公式. 球坐标系的结果留作习题由读者导出.

三、自然确定法、切线加速度和法线加速度

所谓自然确定法就是在质点运动轨道的空间曲线上自然三面体的三个轴上表示速度和加速度. 如图 1.2(a)所示,在此曲线上一点 P 存在相互垂直的三个方向,单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$,$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{\tau}$ 在 P 点曲线的切线方向,其正向与质点运动方向相同. 在微分几何中定义:过 P 点与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直的平面为法向平面;轨道的切线与轨道上无限接近切点的一点所确定的极限平面为密切平面. 密切平面与法向平面的交线为主法线. $\boldsymbol{n}$ 沿主法线并指向轨道的凹面. 垂直密切平面的法线叫次法线. $\boldsymbol{b}$ 为次法线方向单位矢量,规定 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$. 由



(a)　　(b)

图 1.2

基矢 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 构成一个自然三面体，它被称作自然“坐标系”. 这里基矢的方向也是地点的函数. 因质点沿曲线运动，实际上是一维问题，所以坐标只有一个独立变量，例如 s(弧长). 此坐标系即由坐标 s 与基矢 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 组成.

此坐标系中质点的位矢、速度和加速度表达式如下：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\boldsymbol{\tau} \tag{1.13}$$

其中 $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 为质点速率，$\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$.

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

从图 1.2(b)可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}=\frac{v}{\rho}\boldsymbol{n}$$

其中 $\rho=\mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta$ 为曲线在 P 点的曲率半径，则

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n} \tag{1.14}$$

其中 $a_\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 为切向加速度分量，$a_n=v^2/\rho$ 为法向加速度分量.

说明：

(1) 自然确定法适合于处理轨道已知情况下的运动，即约束运动. 而分析力学也是适合于处理约束运动，它们有一点是相似的，即用约束来减少独立变量的数目.

(2) 有人提出：在 P 点质点的速度、加速度都在密切平面内，因而力也在密切平面内. 为何质点不始终在此平面内运动？运动轨迹可以是一条空间曲线？此问题留读者考虑.

(3) 曲率半径 ρ 的公式为(平面曲线情况)

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right| \qquad \text{当轨迹方程为 } y=y(x)$$

$$=\left|\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\right| \qquad \text{当轨迹方程为}\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$