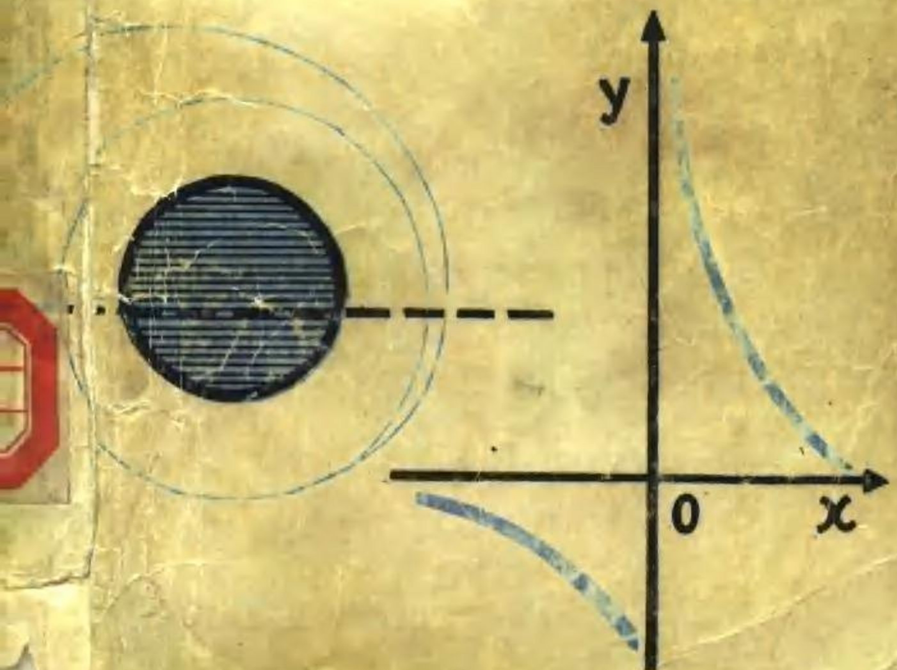
微积分复习全解

孔坤德　林永生编著

南京工学院出版社



微积分复习全解

孔坤德　林永生　编著

南京工学院出版社

微积分复习全解

孔坤德、林永生　编著

南京工学院出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行

封面印刷：安徽省新华印刷厂

内文印刷：安徽肥西印刷厂

开本：787×1029毫米1/32　印张：$17\frac{1}{32}$　字数：367000

1988年8月第1版　1988年8月第2次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7-81023-099-9

O·99　定价：3.85元

前　　言

经济应用数学基础（一）——《微积分》是全国高等教育自学考试统计、物价、人口、会计、工业经济、企业管理等财经类各专业必考课程之一。它理论性强且概念抽象，自学者由于缺乏及时指导，常常在理解概念、分析解题时遇到困难。本书就是针对上述情况，根据全国高等教育自学考试规定的考试大纲，并分析了近年来全国性各类考试的微积分试题后编写而成的。在编写中，我们围绕指定教材的基本内容，力求做到深入浅出，通俗易懂，条理清楚，重点突出。本书除使用于高等教育自学考试财经类各专业外，亦可作为电视大学、函授大学、夜大学、职工大学的教学参考书。

本书内容有：一、内容提要：列出了各章的基本理论知识和常用计算公式，便于自学者学习查阅；二、典型例题分析：精选了适当数量的例题，并将学习和解题时容易出现的错误和疏忽之处都作了较详细的分析，有的还给出多种解法，以供比较；三、习题：反映各章的具体要求，主要选自全国高教自考指定教材；四、参考题解：将习题全部作了详细解答，以供参考。

承蒙安徽大学数学系副教授李明曙审阅书稿，并提出宝贵意见，谨此致谢。

限于编者的水平，加之时间仓促，难免有错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

一九八八年一月于合肥

目 录

第一章　函　数

函数是微积分学研究的对象，也是高等数学中最重要的基本概念之一。

本章首先介绍现代数学中最基本的数学概念——“集合”；然后引入集合元素间的“关系”概念。而函数是一种特殊的“关系”，着重讨论函数的简单性质和反函数、复合函数、初等函数等概念。对函数概念必须理解得很清楚。

一、内容提要

（一）集　合

集合是现代数学中最基本的数学概念，也是研究基础数学在各个领域中应用的出发点。掌握集合论的知识，不仅有助于对经济数学中许多概念的理解，而且也有利于将许多复杂的经济问题按各自合适的数学形式进行分析与处理。

1．集合的概念

集合是数学中不能精确定义的最基本概念之一。

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是按照某一法则进行研究的对象的全体，构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

如果a是集合A的元素，则记作$a\in A$；如果a不是集合A的元素，则记作$a\overline{\in} A$。

这里记号“$\in$”与“$\overline{\in}$”分别表示“属于”与“不属于”。$a\in A$，读作“a属于A”。

集合中元素的数目称为集合的基数或势。基数为有限数的集合，称为有限集；基数不是有限数的集合，称为无限集。

2. 集合的表示法

集合的表示法有二种：

(1)列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，元素之间用逗号分开，并用花括号｛ ｝括起来。

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复。

(2)构造式法：设$p(a)$为某个与a有关的条件法或则，A为满足$p(a)$的一切a构成的集合，则记为

$$A=\{a \mid p(a)\}$$

构造式法也叫说明法或描述法，就是在花括号内用语言或其它表达方式写明集合的元素应具有的特点。所以上面集合A的表示式的意思就是

$$A=\{a \mid a\text{所具有的特点}\}.$$

对于集合的构造法，应很好地理解和掌握。

集合有如下三个特性：

①**确定性**：对于一个集合A来说，任何对象a都应能确定或$a\in A$，或$a\notin A$，不能两者兼得。因此，高身材的人，好看的花布，不好吃的东西都不是集合。

②**互异性**：同一个集合中不能重复出现同一个元素。例如．$A=\{a, a, b, b, c, c\}$，应该写成$A=\{a,b,c\}$．

③**无序性**：普通的集合不考虑集合的顺序。例如，$\{1,2,3\}=\{2, 3, 1\}=\{3, 2, 1, \}$.

3. 空集、全集、子集

空集：不包含任何元素的集合称为空集，记为ϕ，即$\phi=\{\ \}$。

例如$x^2+1=0$的实根集合为空集，可记为

$$\{x \mid x^2+1=0,\ x\text{为实数}\}=\phi.$$

但是集合$\{x \mid x^2=0\}$不是空集，它是一个以数0为元素的单元素集$\{0\}$；即$\{0\}\neq\phi$；集合$\{\phi\}$也不是空集，它是以空集ϕ作为元素的单元素集，因此，$\{\phi\}\neq\phi$。

全集：由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为U。

全集是相对的，例如，讨论的问题仅限于整数，则$U=\{\text{全体整数}\}$；但若讨论的问题在实数范围内，则全体整数就不是全集，此时，$U=\{\text{全体实数}\}$。

子集：如果$a\in A$，则$a\in B$，就称A为B的子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$。读作A包含于B或B包含A。

根据子集的定义有下列结论：

（1）$A\subset A$，即"集合A是其自己的子集"；

（2）对任意集合A，有$\phi\subset A$，即"空集是任意集合的子集"；

（3）如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$，即"集合的包含关系有传递性"。

在任何研究中，U和ϕ都是唯一的，U是最大的集合，ϕ是最小的集合，即对任何集合A有

$$\phi\subset A\subset U$$

必须注意，属于符号"$\in$"，用于元素与集合之间的关系；而包含符号"$\subset$"则用于集合与集合之间的关系，不能混淆乱用。

如果$A\subset B$，又有$B\subset A$，则称集合A与集合B相等，记为$A=B$。

4．集合的运算

集合有并、交、差、补等运算：

集合的并：由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的并，记为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

集合的交：由A和B的所有公共元素构成的集合，称为A与B的交，记为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$$

集合的差：由属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的差，记为

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{且}x\overline{\in} B\}$$

集合的补：由全集U中所有不属于A的元素构成的集合，称为A的补集，记为

$$A'=\{x\mid x\in U\text{且}x\overline{\in} A\}$$

补集也叫余集，有时用记号$\overline{A}$表示，它实质上是指差集$U-A$。

集合运算有如下规律：

（1）交换律：

（i）$A\cup B=B\cup A$

（ii）$A\cap B=B\cap A$

（2）结合律：

（i）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

（ii）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（3）分配律：

（i）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

（ii）$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

（4）吸收律：

（i）$(A\cup B)\cap A=A$

（ii）$(A\cap B)\cup A=A$

（5）摩根律：

（i）$(A\cup B)'=A'\cap B'$

（ii）$(A\cap B)'=A'\cup B'$

我们可以用下式来记忆摩根律：

并之补＝补之交

如果自左读至右，便得（i）式；反之，自右读至左，即为（ii）式。

摩根律在集合运算中很有用处，尤其在概率论中有较多的应用，故应该深入理解并熟记。

必须注意，如果我们把集合运算中的并“$\cup$”和交“$\cap$”分别想象成普通数的运算中的加“＋”和乘“×”，那末象交换律、结合律、分配律等名称两者是相同的，但由于集合运算和数的运算的运算对象不同（一个是集合，一个是数），运算的定义不同（并、交、差、补不同于数的四则运算），所以运算律的内涵也不同。例如分配律，对集合运算来说，不仅交对并可以分配（第(i)式），而且并对交也可以分配（第(ii)式）。但是，在数的运算中与之相当的只有乘法对加法的分配，$(a+b)c=ac+bc$，而加法对乘法是不能分配的，即$ab+c\neq(a+c)(b+c)$。

因此，集合运算与数的运算是两种本质不同的运算，集合运算的许多性质在数的运算中并不成立，反之亦然，这一

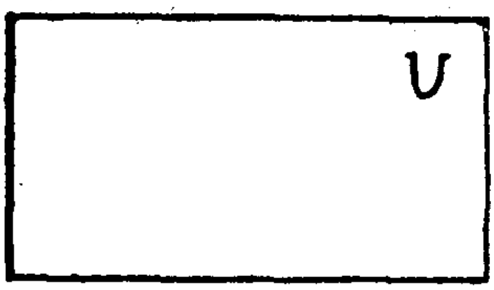
点应该特别牢记。

并、交、差、补是常用的集合运算，要求熟悉它们的定义、符号及运算规律。

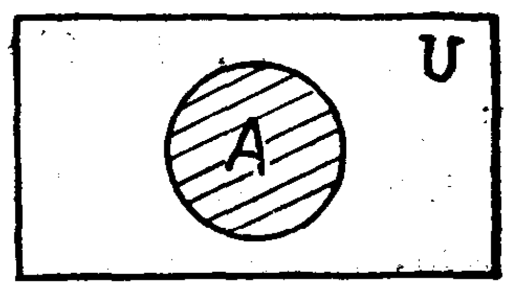
5.集合的图示

抽象的集合概念及其运算，我们可以直观地用图来加以说明，这种图一般地被称为文氏（Venn）图。

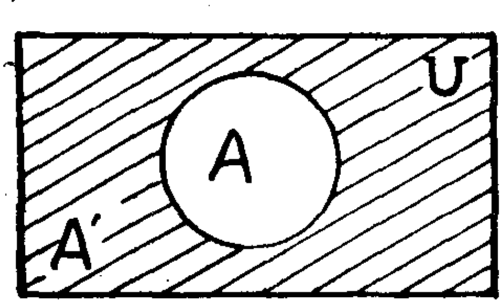
我们用一个长方形来表示全集U，则任何集合A可以用长方形内一个圆形来表示。这仅仅是一种象征性的表示法，圆的大小与集合中元素的多少无关，即使集合A是一个空集，仍可用一个圆形来表示。



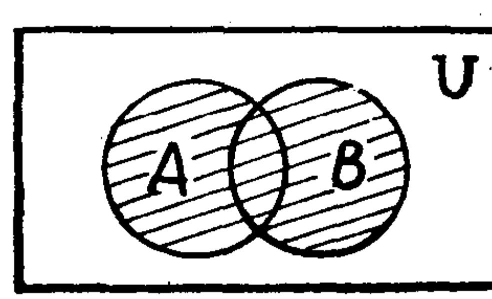
(a) 全集U



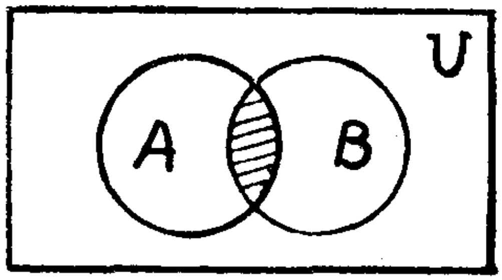
(b) 集合A



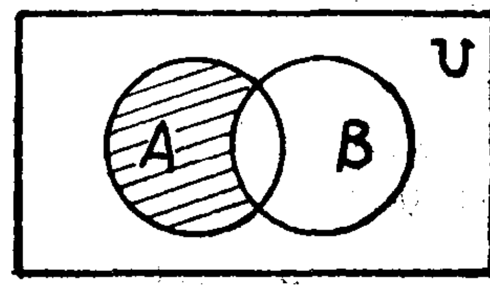
(c) 补集A'



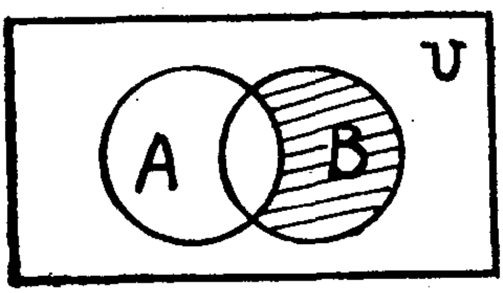
(d) 集合$A\cup B$



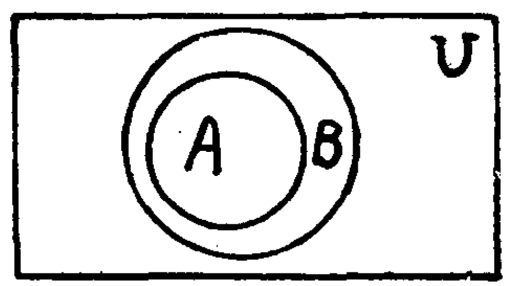
(e)集合$A\cap B$



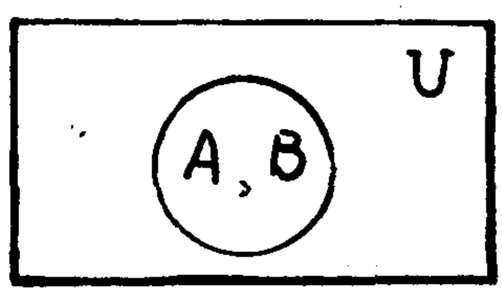
(f)集合$A-B$



(g)集合$B-A$



(h)$A\subset B$



(i)$A=B$

图1—1

其中阴影部分表示所指的集合，图1－1(e)包含了两集不交的特殊情况，此时只需认为公共部分是一个空集。

集合的运算定律及一些关系式，可以通过文氏图加以验证和说明，因此，集合的文氏图表示法是一个有用的直观工具。但必须注意，它不能代替严格的数学证明。

6.有限集元素的计数

计算有限集合中元素的个数是研究集合时经常遇到的问题。

若用$N(P)$表示有限集合P的元素个数，则有下面的集合的计数基本公式：

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B) \qquad (1.1)$$

上面右端所以要减去$N(A\cap B)$，是因为前二项的和$N(A)+N(B)$中，$A\cap B$的每一元素被计算了二次。因此，特别地，当二集合不交时，即$A\cap B=\phi$，则(1.1)式变得很简单：

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B) \quad (A\cap B=\phi) \qquad (1.2)$$

如果是三个集合，便有下面的类似公式：

$$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)$$
$$-N(A\cap C)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C) \qquad (1.3)$$

上面三个公式（1.1）、（1.2）和（1.3），在集合的应用中很有用处，必须理解和掌握。

（二）实数集

对于一般的集合，其元素可以是数，也可以是其它具体的事物或对象，甚至可以是比较抽象的事物或对象，如方案、决策等。然而经济学的数学方法是以数和量（如销货和价格）的运算为起点，因此，主要和数的集合特别是和实数的集合有关。

1.实数的三个基本性质

（1）**有序性**　任意两个实数a，b之间必有且仅有下面三种关系之一：

$$a=b，\text{或}a>b，\text{或}a<b$$

（2）**稠密性**　任何两个实数a，b，不论它们相差多么

小，在它们之间一定存在着另外无穷多个有理数（或无理数）。

（3）**连续性** 具有原点、方向和单位长度的直线称为数轴。全体实数与数轴上的全体点之间有着一一对应的关系。因此实数充满整个数轴而没有空隙，实数可以用数轴上的点来表示。所以，常把点和实数混同使用而不加区别。

在数学中用以下的符号来表示常用的一些数集：

N：自然数集（正整数集）；

Z：整数集（也有用"J"表示的）；

Q：有理数集；

R：实数集。

显然，有如下关系：

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

2.绝对值

在正负数自身中包含了两种因素：一是包含事物的绝对含量；二是包含该事物的"方向"。但在很多场合下，我们无需注意"方向"，而只需知道事物的绝对含量，这就产生了"绝对值概念"。

一个实数x的绝对值，记为$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$|x|$的几何意义是表示数轴上的点x与原点O之间的距离，而距离是一个非负值。

绝对值及其运算有下列性质：

（1）$|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$

(6) $|x| > b \Longleftrightarrow x < -b$ 或 $x > b$

(7) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(8) $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$　　$y \neq 0$

其中(7)—(10)是二数的和、差、积、商的绝对值性质，在绝对值的运算和不等式证明中常要用到。

(5)、(6)两式是绝对值不等式的二个基本等价关系，用这两个关系可解不等式。

另外，由绝对值的定义知：

如果 $|x| = a$，则 $x = a$ 或 $x = -a$

如果 $|x| = |a|$，则 $x = a$ 或 $x = -a$

用此两个性质可以解一些含绝对值的方程。

掌握好绝对值的知识，对于学好高等数学是很必要的。

3.区间和邻域

区间是实数集R的一种特殊形式的子集，在微积分中经常用到的有以下三种有限区间和三种无限区间，要会区分它们的意义和表示方法。

三种有限区间：

(1)开区间　　$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

(2)闭区间　　$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$

(3)半开区间 $(a, b] = \{x|a<x\leqslant b\}$

$[a, b) = \{x|a\leqslant x<b\}$

差$|b-a|$称为区间的长。

三种无限区间：

(4) $(a, +\infty) = \{x|a<x\}$

$[a, +\infty) = \{x|a\leqslant x\}$

(5) $(-\infty, b) = \{x|x<b\}$

$(-\infty, b] = \{x|x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty, +\infty) = \{x|x\in R\}$

由于在微积分中常局限于在某个固定的实数x_0附近去研究函数的性质，所以，关于一点x_0的邻域的概念是重要的。

邻域是一种特殊的开区间，在数轴上一个以点x_0为中心，长度为2δ的开区间

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x|\,|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$$

称为点x_0的δ邻域（图1－2）。

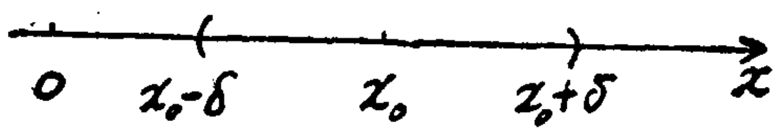


图1－2

如果将点x_0从它的邻域中去掉，则得到微积分中另一个常用的集合：

$$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta) = \{x|0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$$

（三）关系

我们已经讨论过两种关系：一种是从属关系“$\in$”，即元素属于集合；另一种是包含关系“$\subset$”，即一个集合包于另一个集合，现在我们一般地研究给定的两集合（可以是