线性和拟线性椭圆型方程

〔苏〕O. A. 拉迪任斯卡娅　H. H. 乌拉利采娃 著

科 学 出 版 社

线性和拟线性椭圆型方程

〔苏〕O. A. 拉迪任斯卡娅
H. H. 乌拉利采娃 著

严子谦 王光烈 戴淑环 张功安 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书系统阐述了二阶线性和拟线性椭圆型方程和方程组的边值问题，详细讨论了 Schauder 型和 L_2 型估计，并在此基础上建立了基本边值问题的整体可解性和解的正则性理论，研究了有关的变分问题．它包含了在这个领域内当时所得到的主要成果．就二阶拟线性椭圆型方程和有关的变分问题而言，书中较完满地解答了 Hilbert 第 19，20 问题．

本书叙述清晰而系统，可使只具有泛函和偏微分方程基础知识的读者很快接触椭圆边值问题的当代水平，窥见这一领域的全貌．

本书可作为大学高年级学生、研究生、教师的参考书，也可供有关专业研究者参考．

О. А. Ладыженская Н. Н. Уральцева
Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа
Издательство «Наука», Москва, 1973

线性和拟线性椭圆型方程

〔苏〕O. A. 拉迪任斯卡娅 H. H. 乌拉利采娃 著
严子谦 王光烈 戴淑环 张功安 译
责任编辑 苏芳霞
科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987年7月第一版 开本：787×1092 1/32
1987年7月第一次印刷 印张：21 5/8
印数：0001—4,000 字数：483,000
统一书号：13031·3559
本社书号：5140·13—1
定价：5.10元

第二版序言*)

自本书第一版(编号为[I])问世以来，已将近十年了．我们简述一下作为本书对象的那些问题获得了哪些发展，这一版作了哪些与此有关的补充．

1) 在具有“好”系数的线性椭圆方程和方程组的边值问题的研究方面，获得了很一般的结果．对这些问题，作了如同对于一个二阶方程所作的事情：在反映事物本质的诸条件之下，证明了在 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ 和 $W_p^l(\Omega)$ 空间的正规可解性(参看 S. Agmon, A. Douglis 和 L. Nirenberg 的文章 [1], B. A. Солонников 的文章 [35] 等等)．在这里，Schauder 关于冻结系数的思想，即把问题归结为研究常系数方程的相应问题，是一个重要的因素．对 $W_p^l(\Omega)$ 空间的情形而言，如果主项系数在通常意义下连续，对 $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ 空间的情形而言，如果所有系数 Hölder 连续，那么这样归结是可能的．对于上述诸问题，作出了 Green 矩阵，并对这些矩阵及其导数给出了极其精确的逐点估计．在许多重要的场合，可以计算出问题的指标(参看引起广泛注意的 M. Atiyah 和 I. Singer 的工作及其继续；在此以前，有关于计算平面问题和某些特殊的三维问题的指标的工作)．

当试图将第三章 §13—§15 关于具间断系数的方程的结果推广到高阶椭圆方程和方程组时(在文章 [I] 的第 49 页末至第 50 页首，或者在本书的第 39 页上，都谈到了希望作这种考虑)，情形就不一样了，原来，这些结果的形状要有所改变．E. De Giorgi [11_4] 和 B. Г. Мазья [22_3] 都作出了高于二

*) 第一、二两版序言是解放军某部王志同志翻译的．——译者注

阶的齐次方程，它们有能量模有限的间断解。

2）对主部为散度形式的任意 $2l$ 阶拟线性方程，在六十年代初期即已给出证明古典边值问题在 $W_m^l(\Omega)$ 空间的可解性的"直接"方法(它也可以应用于这样的方程组)。现在又用熟知的办法（Галеркин 方法）作出了近似解，并借助 G. Minty 关于在凸算子符号下取弱极限的思想（参看与此有关的 F. Browder 等人的工作），独立地证明了近似解趋向于所论问题的（广义）解的收敛性。这种思想，辅之以 J. Leray 和 J. L. Lions 关于在低阶项中取极限的新颖证法，可以用来证明上述边值问题的可解性，只要对构成方程的函数在自变量取大值时的性态加上近乎必要的条件。这种方法的原型，一方面是在某种边值条件下寻求使泛函 $J(u)=\int_\Omega F(x, u, u_x)\,dx$ 达到绝对最小的函数所用的"直接"方法，另一方面是关于线性问题的 Галеркин 方法。由于众多数学家的研究(参看与此有关的 [**7**, **32**$_3$, **36**, 18] 等等)，使它逐渐形成。我们在第四章 §9 中叙述这种方法，把它应用于本书的基本对象——主部为散度形式的二阶拟线性方程。在 § 10 中，把 §9 的结果同用其他方法得到的结果作了比较。

在本书的第一版中(参看 [I] 的第 58 页，或者本版的第 46 页)，我们曾经注意到下述重要而复杂的问题，即对任意 $2l$ 阶拟线性方程和方程组研究 $W_m^l(\Omega)$ 中 ($l>1$) 广义解的光滑性，并证明它们的边值问题的古典提法容许作这样的扩充，也就是在这种解类中对小区域证明唯一性定理（J. Nečas 的工作 [**42**$_{1,3}$] 就属于这个方面）。本书相当大的一部分是就二阶方程解答这些问题。对于高阶方程和方程组，M. Miranda, E. Giusti 和 B. Г. Мазъя 发现了新的现象。当 $n>2$ (n——处处表示自变量空间的维数）时，这些方程可能有非光滑的

广义解，哪怕构成方程的函数是光滑（甚至解析）的（[**22**$_2$]，[22$_3$]）．而且，M. Miranda 和 E. Giusti 还证明了，当 n 充分大时，他们所作的解是问题的唯一解和使某一泛函取最小值的唯一函数．（正如第五章所证明的那样，这对形如 $J(u)=\int_\Omega F(x, u, u_x)dx$ 的泛函是不可能的．）因此，C. B. Morrey [**39**$_7$]（亦见 E. Giusti 的文章 [**22**$_1$]）关于广泛的几类高阶拟线性方程和方程组的广义解 $u(x)$ 在全测度开集上（而不是在所有点 x 处！）的光滑性结果，具有很大的意义．在证明中，C. B. Morrey 利用了 F. Almgren 对推广的 Plateau 问题，即多维变分问题的广义解研究同样问题所用的一个重要思想．关于具光滑（甚至解析）函数的高阶非线性方程和方程组可能有解在零测度集合上具有奇性这个一般的想法，正是来源于与此有关的多维 Plateau 问题．作为 Plateau 问题的"广义解"，用肥皂膜所作的物理实验表明，这样的解可能有奇点，甚至奇线．在前面提到的 C. B. Morrey 的工作 [**39**$_7$] 之前，在 E. Reifenberg 的文章 [**47**] 和 F. Almgren 的文章[**4**]中，已经证明 Plateau 问题和推广的 Plateau 问题的广义解对于几乎所有自变量值的光滑性．意大利数学家所举的例子表明，对所有自变量值，这是不成立的．在 E. De Giorgi 的文章 [**11**$_{1,3}$] 和 M. Miranda 的文章 [**38**$_2$] 中，用别的方法研究了在 n 维 Euclid 空间中构造极小超曲面的问题．

这里提到的结果没有反映到本版中．这些结果的阐述需要单独的书，因为它们的证明使用了不同于本书所用的工具．已经出现一本这样的书——这就是 H. Federer 的专著 [**14**$_1$]．该书反映了作者自己和 W. Fleming 等人的研究工作（特别是文献 [**14**$_2$]）．在这些工作中所用的研究方法，是甚为独特的，几何的，而且不总是很明显的．它们不同于我们用以进行

工作的方法．我们认为（正如在数学中多次看到的一样），随着时间的推移，许多东西会变得明朗化和简化，在简化中，本书所讲的方法是会起作用的（参看 C. B. Morrey 的书 [39₆] 中与此有关的后面几章和 W. Allard 的文章 [3]）．

3）在五十年代末期以前，使得比式

$$\frac{\max\limits_{|\xi|=1} a_{ij}(x, u, p)\xi_i \xi_j}{\min\limits_{|\xi|=1} a_{ij}(x, u, p)\xi_i \xi_j} \equiv \tau(x, u, p)$$

对一切 $p \in E_n$ 都不超过某一连续函数 $\tau_0(x, u)$ 的拟线性椭圆方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0$$

一直是基本的研究对象．这种方程因此称为一致椭圆方程．它们正是本书所要着重讨论的．六十年代，对各类非一致椭圆方程，即当 $|p| \to \infty$ 时 $\tau(x, u, p)$ 无限增加的方程的研究，作了很多努力．Euclid 空间和 Riemann 空间内具有确定平均曲率的曲面方程就属于这种方程，其中包括极小曲面方程，含参数的变分问题的 Euler 方程，以及微分几何中许多其它有趣的方程．

非一致椭圆方程的基本问题，在于对其解 $u(x)$ 作 $\max\cdot|\nabla u|$ 的先验估计．如果得到了这种估计，那么也就会有关于 u 的一切进一步的估计，因为 $\tau(x,u(x),u_x(x))$ 关于 $u(x)$ 有界，从而一致椭圆方程的结果可以应用．估计 $|\nabla u|$ 可以分为两个问题：a）求得 $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 的估计，然后用以得到 $\max\limits_{\Omega}\cdot|\nabla u|$ 的估计；b）求得 $|\nabla u|$ 的局部估计，即对 $\forall\Omega' \subset \Omega$，用已知函数的某些特征数，$\max\limits_{\Omega}|u|$ 和 Ω' 到边界 $\partial\Omega$ 的距离，去估计 $\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$．对于一致椭圆方程，估计 $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 的方法包

含在 С. Н. Бернштейн 的工作的实质性部分之中。它可以推广于若干类非一致椭圆方程(参看第六章 § 2).在 J. Serrin 不久以前发表的论文 [**51**$_{11}$] 中，给出了估计 $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 的另外方法，它适用于范围更加广泛的各类非一致椭圆方程(其中包括平均曲率曲面方程). 对于这种方程，边界面 $\partial\Omega$ 在 x 空间内的几何特征 (例如凸性或平均曲率的大小——参看文献 [**28**$_2$]) 可能起作用. 对于有确定的平均曲率的曲面方程，И. Я. Бакельман 给出了估计 $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 的另外方法 ([$3_{2,3}$]).

在已知 $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 估计的条件下估计 $\max_{\Omega}|\nabla u|$，通常采用我们的书 [I] 第四章和第六章所述的两种方法之一. 第六章中所讲的方法，来源于 1956 年发表的文章 [21_8]，其中指出，作这样的估计可以归结为构造某个常微分不等式(或特别地，常微分方程) 的解 $\varphi(t)$. 文章 [21_8] 本身还考虑了比较狭窄的一类拟线性方程 (文章 [21_8] 讲的是更复杂的对象——抛物方程，但就 $|u_x| \equiv |\nabla u|$ 的估计而言，对于两种类型的方程是一样的). 但是，这就表明，在不能对 ∇u 获得 Hölder 常数估计的时候，那里所提出的估计 $\max_{\Omega}|\nabla u|$ 的方法是不能用的. E. De Giorgi 和 Nash 的著名工作 [**11**$_1$] 和 [**41**]，为获得解 u 及其导数 ∇u 的 Hölder 常数估计奠定了基础. 从这些工作和文章 [21_8] 出发，可以处理全部拟线性的一致椭圆方程，这在 [I] 中用比较容易理解的形式作了阐述. 但是，在 [I] 的第六章中，文章 [21_8] 估计 $\max_{\Omega}|\nabla u|$ 的基本思想的叙述被大大地复杂化了，这是由于我们从一开始就对不是在每一点 x 都有二阶导数 u_{xx} 的广义解 u 进行讨论所造成的(为了进行比较，让我们回忆一下，甚至在作简单得多的估计——根据极值原理估计 $\max_{\Omega}|u|$ 之时，通常都作这种假定). 这种

困难的积累导致与我们没有直接联系的研究,即对文献 [21_8] 中所述 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 的估计方法那种简单的"工作"形式进行改造(参看与此有关的前述 J. Serrin 的文章 [**51**$_{11}$] 和 И. Я. Бакельман 的文章 [$5_{2,3}$]),这种形式在文章[21_8]中被应用于特殊情形,我们在研究各类拟线性方程时使用了它. 在本书的这一版中,我们注意到了我们在方法论上的错误,而在第六章,假定 u 是方程的古典解(对非古典解,请看第一版的第六章),以比较容易理解的形式,阐述了估计 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 的第一个方法. 而且,我们还指出了(参看文献 [21_{22-24}]),它适用于迄今为止还是最广泛的一类二阶拟线性非一致椭圆方程.

在第四章,保持了原来对广义解估计 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 的"积分"形式. 由于补充假定了我们所研究的解有有界的导数 ∇u 而得到了一些简化. 这种估计方法应用于各类非一致椭圆方程的可能性,在文献 [$15_{2,3,4}$] 和 [$24_{1,2,4}$] 中作了分析.

在第六章 § 3 中,还讲述了 A. B. Иванов [14_3] 对一类非一致椭圆方程的解所给出的 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 估计. 也提到了 H. Jenkins 和 J. Serrin 关于多维极小曲面方程的研究([**28**$_{1,2}$]).

在第四章和第六章中,讨论了梯度 $|\nabla u|$ 的局部估计,而且在第六章中还对非一致椭圆方程作了这件事情. 第六章所讲的梯度的局部估计也来源于 1956 年的文章 [21_8],现在的叙述接近原来的形式. 它们适用于全部一致椭圆方程和"几乎"一整类可以获得上述 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 估计的非一致椭圆方程. "几乎"的意思在于补充限制: $\tau(x, u, p)$ 关于 p 的增长阶应小于 2. 这个限制排除了前面所提到的平均曲率方程(其中包括极小曲面方程)和含参数的变分问题的 Euler 方程. 对

于它们，必须寻求别的局部估计方法. 我们在文献 [21_{24}] 中给出了这种估计. 在此以前，有 De Giorgi 及其与 E. Bombieri 和 M. Miranda 合作的，对 $n \geqslant 2$ 的极小曲面方程光滑解的 $|\nabla u|$ 进行局部估计的研究工作 [**11**$_5$,**6**]. $n=2$ 的情形已为许多作者所考察(参看文献 [**16**$_{2,4,5}$, **28**$_1$] 等等). 此处不谈文章 [**11**$_5$, **6**, $21_{2,4}$]，因为这将使我们超出第二章所述分析事实的范围. 特别，其中要用到关于积分流 (поток) 的 Federer-Fleming 等周不等式和 M. Miranda [**38**$_1$] 所证明的第二章中嵌入定理 (3.1)*) 的巧妙推广.

这就是说，本书这一版的第四章和第六章，也基本上是讲一致椭圆方程. 对于非一致椭圆方程，只是做了不超出第一版第二章的方法和一般分析结论范围的事情. 这一对象需要进一步研究，其中包括举例和划定界限，使得在这个界限之外，古典边值问题的“整体”可解性不成立(参看与此有关的文献，比方说[**28**$_2$]). 在这方面，J. Serrin 的工作[**51**$_{11}$]是一个明显的推进，其中给出了估计 $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 的新颖方法和 $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ 的估计方法，后者类似于第六章所讲的第一个方法. 文献 [**51**$_{11}$] 关于 $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ 估计的结果和本书所述结果相结合，导致关于非一致椭圆方程的边值问题之古典“整体”可解性方面目前最一般的结果.

4) 在本书的第一版中，我们没有谈到退化方程，虽然 [I] 中所讲的方法，可以成功地用以研究这种对象. 作为这种方法可能用于退化方程的例证，我们在第二版中增加了关于泛函 $\int_\Omega |\nabla u|^m dx$ 和更一般的形如 $\int_\Omega F(\nabla u)dx$ 的拟正则泛函之变分问题的研究. 第五章 § 7 就是讲这个问题. 和它相近

*) 似应为定理 2,1. ——译者注

的还有第八章 § 6，在那里，研究了一类拟线性椭圆方程组．解这些问题的分析基础，是第二章 §9 关于 $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N$ 类元素的 Hölder 连续性结果，而 $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N$ 类乃是 $\mathfrak{B}_m$ 和 $\mathfrak{B}_{m^1}^N$ 类的某种推广．我们提一下关于退化拟线性方程的若干研究．这方面有 Ю. А. Дубинский 的文章 [13]，在该文中作者利用第 2) 款所述 Minty-Browder 方法，对若干类这种方程，证明了 Dirichlet 问题的广义解的存在性．在 J. Serrin 的文章 [**51**$_8$] 中，研究了二阶拟线性退化方程广义解的性质．在 Т. Б. Соломяк 的文章 [34$_{3,4}$] 中，研究了一类与理想可压缩流体的亚声流问题有关的这种方程．在适应性理论中，可以遇到许多饶有兴味的退化方程问题．关于这方面，有不少的专门文献．

5) 与第 2) 款中所谈广义解的光滑性问题有关的，还有一批关于拟线性椭圆方程之解的可去奇性的研究工作．这批工作的古典原型，乃是众所周知的在奇点附近有界的解析函数之奇点可去性定理．J. Serrin ([**51**$_{6-10}$] 等) 也成功地研究了许多类似的问题．其中的一些结果，已由 В. Г. Мазья [22$_4$] 推广到高于二阶的方程．R. Finn, J. Serrin 等人研究了各种方程的解在无穷远点或奇点附近的性态．R. Finn 研究了 $n=2$ 时右端等于 ku 的极小曲面方程的解在边界上角点附近的性态 ([**16**$_6$])．

6) 许多力学和近代控制论问题，都要求解各种条件变分问题．其中之最简单的问题，是确定线性对称算子的固有数和固有值的问题(参看第三章 § 17 末)，以及在具有某种光滑性，满足任何一种边值条件，并适合附加条件 (1)：$|u(x)| \leqslant M$ 的所有函数 $u(x)$ 中确定

$$\inf J(u) \equiv \inf \int_\Omega F(x, u, u_x)dx$$

的问题(参看第五章有关部分)．

根据第五章§2就普通变分问题所讲的关于所论泛函的半有界性和半连续性的道理，通常可以对各种极为不同的条件变分问题，其中包括近年来提出的问题，比较简单地证明其广义解的存在性(当然，也有那样的问题，其中这些基本事实的确立，现在尚未标准化——参看 C. B. Morrey 的书 [**39**$_6$] 之第四章或 G. Fichera 的文章[**15**])。当研究这些广义解的光滑性时，面临无比巨大的困难。例如，对上面所提到的第二个问题，首要的一步是证明其广义解的 Hölder 连续性。而在解决这个问题时，限制 (1) 的存在是比较容易克服的(参看第四章§4末)；这时，不难看出，条件 (1) 可代之以更一般的条件 (1')：$f_1(x) \leqslant u(x) \leqslant f_2(x)$。反之，要对这种问题的广义解，研究其进一步的光滑性(特别地，只是在解 $u(x)$ 同限制曲面 $u = f_i(x)$ 的接触点附近进行研究)，就需要专门的讨论(参看文献 [**33**$_3$])。

在解控制论的多维变分问题时产生的广义解的光滑性很少研究。在这些问题和许多流体力学问题中(参看例如[9])，我们碰到这样一些拟线性方程，其中的已知函数，有一些关于变元 u 或 u_x 是间断的。

在 J. Lions, G. Stampacchia, F. Hartman 等人的工作(参看 [**34**$_{2,3}$, **24**] 等)中，还研究了特殊形式的变分问题，它们的解所满足的不是 Euler 方程，而是某些不等式(最简单的例子是下述第二种条件变分问题：关于其解的一阶变分非负——这个恒不等式替代了 Euler 方程)。在若干这类问题的研究中，第二章所讨论的，并在本书中多次使用的 $\mathfrak{U}$ 类和 $\mathfrak{B}$ 类是有用的。据我们所知，J. Lions 已经写了一本书，详细阐述了本款所讨论的变分问题[1]。

1) 校样时补充。参看 C. Duvaut, J. L. Lions, Les inequations en mecanique et en physigue, Paris, 1971.

熟悉本书的读者，完全有条件阅读上面提到的文章. 只有多维 Plateau 问题及其推广方面的工作例外.

除了 1)—6) 款所列举的研究之外，还有不少与 [I] 直接有关的工作. 其中的一些工作，乃是用另外的更简单或者作者更习惯的方法，证明 [I] 中的这个或那个结果（多半是在某种特殊但相当有趣的场合下）. 其它一些，则是分析将 [I] 中所给解的估计方法和手段应用于别的方程的可能性，这些方程是 [I] 中讨论过的方程在某一方面的推广. 例如，我们前面就曾提到过这样一些工作，其中 $\tau(x, u, p)$ 可以随 p 而增长，或者那样一些工作，其中构成方程的函数 $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ 随 p 增长的程度（正是这种增长阶在 [I] 中是基本的）可以换成别的条件. 还有不少工作，将 [I] 中的方法和结果同一些补充的想法和手段结合起来，就可以研究退化方程或特殊类型的拟线性方程组.

最后，我们还要指出 J. Serrin 的文章 [**51**$_{4,8}$] 和 N. S. Trudinger 的文章 [**54**]，它们将 J. Moser 关于 Harnack 不等式的结果推广到了主部为散度形式的拟线性方程；而在 W. Littman, G. Stampacchia 和 H. Weinberger 的文章 [**35**] 中，对第三章中具间断系数的线性方程，构造并研究了 Green 函数. 所有这些工作都同这里研究的对象有直接关系，自然可以列入本书对象和方法的范围之内. 只是限于时间和篇幅，这里才没有讲到它们.

下面列举第二版与第一版不同之处. 第一，我们改正了已发现的错误，印刷差错和各种粗糙的地方. 本书刚一出版发行，我们就发现了这些问题，并把这些更正通知了将我们的书译成英文的美国出版社. 可惜，这些更正既没有为英文本注意到，也没有为法文本注意到，两种文本都重复了俄文版的所有缺点. 第二，在第二章的叙述中，我们作了许多改进和补

充，其中包括，按照我们关于抛物方程的书[21_{II}]所作的那样，分出了 $\mathfrak{U}$ 函数类，补充了关于 $\mathfrak{B}_m^N$ 类的 §9，它在研究拟正则变分问题（第五章 §7）和若干类型的拟线性退化方程组（第八章 §6）时有用．第三章增加了以下几节：关于近似方法的 §16，关于任意函数按椭圆算子的固有函数展开成为级数的 §17，以及关于有限差分法的 §18．为了不使书的篇幅大量增加，我们删去了不在本书基本方向之列的关于绕射问题的 §16．与此同时，在 §13 中，补充了一些在第一版中只是提了一下的广义解的积分模估计和广义解的极值原理．借助于第二章中提供的工具，这两者都是容易处理的．

在第四章中，补充了关于边值问题在 $W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ 空间内可解性（即这种问题的广义解之存在性）的 §9．与此相应，对关于这些问题之古典可解性的 §8（现在是 §10）作了一些修改．关于古典解的最大模估计，单独列为一节，并扩充了材料．重新改写了关于广义解最大模估计那一节，并将第四章其它各节的积分模估计放在这里．在 §5 中，对广义解二阶导数的存在性，和原 §3 中从“不难证实，…”开始的一句未加仔细解释的话，给出了比较完整的证明．总之，§3—§5 的材料作了一些变动，我们的希望是使它便于理解．我们所作的这个变动，与 C. B. Morrey 的书 [39_6] 中一个附注有关；在那个附注中，他在谈到我们关于广义解的结果时，曾经委婉地指出，不可能对我们所断定但未作任何解释的一个事实给出证明．现在给出了这些解释，而且是必须的．这就是说，第四章的结构有相当大的变动，虽然其中所讲的方法和结果，还跟第一版的第四章一样．只有 §9 例外．

第五章重新改写了 §1—§3，因为原来的叙述不恰当；并且增加了关于拟正则问题的 §7．

讨论解的梯度估计和存在定理的第六章的大部分（即 §2

和§3)作了改动,分成了四节. 在上述第3)款中,我们谈到了这些变动的特点. 我们希望,材料的这种叙述方式易于理解. 诚然,我们在这里把结果弄得粗糙了一些,假定了$u(x)$是古典解,而在第一版中只假定$u(x)$是$W_2^2(\Omega)\cap \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$中的广义解. 对于古典解,我们可以进行逐点估计,而对[I]中的广义解则必须进行积分估计,读起来比较困难. 将第一版第四章的结果如此粗化,并不影响它的基本目的:研究Dirichlet问题的古典可解性. 在作这种研究时,我们对之进行分析的所有解显然属于C^2.

第八章增加了关于一类退化拟线性方程组的§6,而在第九章§5,对最简单的具间断系数的线性方程,证明了Moser所建立的Harnack不等式.

最后,在第十章中,加强了关于拟线性方程在包含解$u(x)$的导数u_{x_i}这种非线性边值条件下之可解性的基本结果:取消了问题至多只有一解的假定. 这就需要对全部材料的叙述作一些改动,增加许多补充讨论.

对 В. Г. Мазья 的宝贵建议,对 А. П. Осколков 阅读原稿和编辑加工,对于 Л. С. Захаров 帮助设计版面,表示感谢.

О. А. 拉迪任斯卡娅
Н. Н. 乌拉利采娃
1970年9月于列宁格勒

第一版序言

看来，在本世纪五十年代以前，有界域内二阶线性椭圆方程的研究，如果不是详尽无遗，那也是相当完善，以致关于这方面的基本问题，都已得到十分简单的解答. G. Giraud 和 J. Schauder 在其三十年代的工作中，在系数和区域边界充分光滑的条件下，对这种方程证明了基本边值问题的可解性.

其后，人们开始从泛函分析的角度来了解这种方程. K. O. Friedrichs 1934 年关于对称椭圆算子半有界扩张的工作 [**19**$_1$]，创立了这一观点的开端. 这个工作以及 H. Weyl, K. O. Friedrichs, С. Г. Михлин, М. И. Вишик, О. А. Ладыженская 等人在四十年代末期的进一步研究表明，解椭圆方程(我们到处都只谈二阶方程) 的基本边值问题，等价于解形如 $x + Ax = f$ 的方程，其中 A 是某 Hilbert 空间内的全连续线性算子，是按微分算子的对称主部的二次型作出来的. 关于边值问题的这种观点，曾经有助于 Ritz, Галеркин 以及其它近似方法的收敛性研究. 诚然，这种办法只是给出了所谓广义解 (按微分性质来说是不好的解) 的存在性，而关于广义解所知道的是，它们只有一阶导数. 至于这些解的更高阶(哪怕是二阶)导数的存在性问题，以及因此满足方程的问题，必须利用前面提到的 J. Schauder, G. Giraud 等人的工作来解决，所以，仅仅在泛函分析的范围内，是不可能对边值问题进行严谨而又简单的研究的. 原来，这与椭圆算子在 L_2 中的闭包的定义域问题直接有关，该问题是 И. М. Гельфанд 在其著名的讨论班上，作为从 Hilbert 空间中线性算子一般理论的观

点来研究椭圆方程的中心问题之一提出来的.

1950 年,本书作者之一在短文 [21_1] 中,就带有各种边值条件的 Laplace 算子及其重叠，解决了这个问题(稍晚一些，С. Г. Михлин 在 [23_1] 中,就带有第一边值条件的球内 Laplace 算子，对这个问题给出了另外的解答),而在 1951 年 R. Caccioppolli [8_2] 就带有第一边值条件的一般二阶椭圆算子 L, О. А. Ладыженской [21_2]1) (也可参看 [21_3, $_5$]，就带有第一,第二和第三边值条件的同样算子 L 及其重叠,回答了这个问题.回答是简单的,且在第一边值问题的情况下与算子的系数无关;确切地说，取闭包的结果得到这样的函数，它们有直到二阶的属于 $L_2(\Omega)$ 的广义导数. 这就在一定方面完成了从泛函分析观点对于有界域内椭圆方程的基本边值问题的研究.

在四十年代末期，对这些问题研究了有限差分法的收敛性(参看 Д. М. Эйдус 的工作 [37] 和 О. А. Ладыженская 的工作 [21_3, $_6$])，给出了其可解性的简单证法和实际可行的解的算法.

这就是说,对于线性方程的了解似乎已相当不错,而应把注意力放在非线性问题上. 但是，在作非线性问题的过程中发现,我们关于线性方程（在任意多个自变量的情形下）的知识，首先是关于解的微分性质对方程系数的微分性质之真实依赖关系的知识,是多么地不完善. 当 $n \geqslant 2$ 时,在以前的所有结果中,只有一个在各方面都是无可非议的——这就是(由 Caccioppolli 补充了的) Schauder 关于系数和自由项属于

---

1) [8_2, 21_2] 这两篇文章引起一大批工作，对于高阶方程以及椭圆和抛物方程组的解，求其在 L_2, L_p 以及其它一些函数空间内的所谓最佳估计. 目前这批工作已接近于自然完成. 在 L. Hörmander 的工作中业已指明，粗略地说,只是对椭圆和抛物型算子,才有这样的最佳估计.