

高等数学

(测绘专业用)

上册

陈雄南 编

GAODENG SHUXUE

测绘出版社

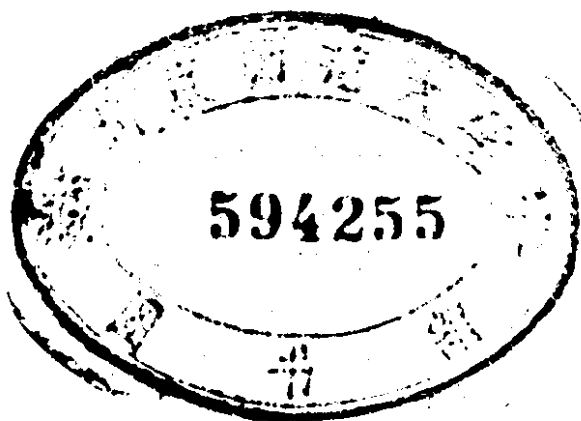
高等数学

(测绘专业用)

上册

陈雄南 编

54112411/4



测绘出版社

本书的特点是数学紧密结合生产实践,书中所举算例大多是测绘工作中提出的数学问题。适合于测绘作业人员、各院校和训练班的测绘专业学生、上山下乡知识青年学习高等数学用,也可供师范院校有关师生参考。

高 等 数 学

(测绘专业用)

上 册

陈 雄 南 编

*

测 绘 出 版 社 出 版

上海商务印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ • 印张 $19 \frac{1}{8}$ • 字数 600,000

1978 年 12 月第一版 • 1978 年 12 月第一次印刷

印数 1—101,000 • 定价 1.84 元

统一书号: 15039 • 新 111

引 言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学。而初等数学是研究常数的数学,高等数学则是研究变数的数学,其中最重要的部分是微积分,它在本质上不外是辩证法在数学方面的应用。

革命导师恩格斯指出:“和其他一切科学一样,数学是从人的需要中产生的:是从丈量土地和测量容积,从计算时间和制造器皿产生的。”初等数学是这样,高等数学也同样如此。随着社会生产实践和科学技术发展的需要,人们从研究常数的数学,发展为研究变数的数学,这是数学发展史上的一个重大的飞跃。而解析几何把曲线图形看作点的运动轨迹,并通过坐标方法用数量形式(代数方程)表达出来;从此引进了变数(动点的坐标),成为数学中的转折点。于是,运动进入了数学,辩证法进入了数学,一门新的数学分科——微积分就相应地产生出来了。于十七世纪后半叶,牛顿和莱布尼兹两人,几乎同时地在总结人们长期研究成果的基础上,大体上完成了微积分的基本思想和方法。

在近代自然科学和工程技术中,高等数学是一种基本的数学工具。在测绘专业中,除了大量运用初等数学的知识外,还经常要用到高等数学的知识。例如:地形测量中的误差理论;控制测量中严密平差的理论基础——最小二乘法原理,基线丈量的各项改正值,正弦对数的秒差计算;工程测量中精度方面的分析,铁路弯道的曲率半径和弧长;等等,这些都需要应用微积分和级数方面的知识。由此可见,高等数学是测绘专业技术人员必须具备的数学知识。

按照“理论和实际统一”的原则,本书在重视数学基础理论的

前提下, 努力加强与专业之间的联系, 密切配合专业课的实际需要. 但这仅是一个初步的尝试, 还有待于进一步提高和完善, 欢迎批评指正.

目 录

引 言

第一章 函数和极限1

第一节 函数概念1

习题 1-1(7)

第二节 初等函数9

一、幂函数(9)

二、指数函数(11)

三、对数函数(13)

四、三角函数(15)

五、反三角函数(16)

六、复合函数(19)

习题 1-2(20)

第三节 极限23

一、数列的极限(24)

二、函数的极限(25)

三、极限运算法则(29)

四、连续函数(33)

习题 1-3(35)

第四节 多元函数37

一、二元函数概念(39)

二、空间直角坐标系(40)

三、二元函数的极限(45)

习题 1-4(46)

第五节 图算原理47

一、函数图尺(47)

二、邻接尺(48)

三、网络图(49)

四、含有三个平行图尺的共线图(52)

五、含有三个辐射图尺的共线图(55) 习题 1-5(58)

第二章 微分法60

第一节 导数和微分60

一、速度问题(60)

二、切线问题(64)

三、导数概念(65)

四、导数的四则运算(68)

五、微分概念(72)

习题 2-1(75)

第二节 初等函数的微分法76

一、常数及幂函数的导数(76)

二、三角函数的导数(76)

三、对数函数的导数(80)

四、复合函数求导法则(81)

五、指数函数的导数(87)

六、反三角函数的导数(90)

七、微分法小结(91)	八、函数的近似值(93)
九、微分中值定理(98)	习题 2-2(99)
第三节 偏导数和全微分	103
一、偏导数(103)	二、全微分(105)
三、多元复合函数的求导法则(109)	习题 2-3(113)
第四节 测量误差理论	114
一、绝对误差和相对误差(115)	二、偶然误差(120)
三、中误差(121)	四、误差传播定律(125)
五、权(130)	习题 2-4(135)
第五节 高阶导数及高阶偏导数	137
习题 2-5(142)	
第三章 微分法的应用	143
第一节 一元函数图形的研究	143
一、函数单调性的判定(143)	二、曲线的凹向(146)
三、函数图形的描绘(149)	习题 3-1(153)
第二节 曲线的曲率	153
一、曲率概念(154)	二、曲率的计算公式(156)
三、曲率半径(158)	四、子午椭圆与大地纬度(162)
习题 3-2(166)	
第三节 函数的极值	167
一、一元函数的极值(167)	二、最大值、最小值问题(171)
三、二元函数的极值(175)	四、条件极值(178)
习题 3-3(183)	
第四章 最小二乘法与测量平差	185
第一节 直接观测平差	185
一、最小二乘法原理 平均值(185)	二、直接观测平差示例(188)
习题 4-1(190)	
第二节 间接观测平差	191
一、误差方程(191)	二、法方程式 高斯约化法(195)
三、间接观测平差示例(198)	习题 4-2(207)
第三节 条件观测平差	209
一、条件方程(209)	二、联系数法方程式(210)
三、条件观测平差示例(214)	习题 4-3(231)
第四节 矩阵平差	233

一、矩阵及其运算(233)	二、矩阵方程及其解法(241)
三、间接观测平差的矩阵表示法(260)	
四、条件观测平差的矩阵表示法(263)	习题 4-4(267)
第五章 积分法	271
第一节 定积分概念	271
一、曲边梯形的面积(271)	二、变速直线运动的路程(276)
三、定积分的定义(276)	四、定积分的基本性质(277)
五、积分和微分的辩证关系(281)	习题 5-1(283)
第二节 原函数与不定积分	284
一、原函数(284)	二、基本积分表(286)
三、不定积分的运算法则(287)	四、定积分计算的基本公式(290)
习题 5-2(294)	
第三节 换元积分法	295
一、不定积分的换元法(296)	二、定积分的换元法(303)
习题 5-3(307)	
第四节 分部积分法	309
习题 5-4(313)	
第六章 积分法的应用	314
第一节 面积计算	315
一、曲线形面积(315)	二、梯形法和抛物线法(317)
三、面积仪(320)	习题 6-1(327)
第二节 体积计算	331
一、旋转体的体积(331)	
二、已知平行截面面积的立体体积(334)	
三、土方计算(337)	习题 6-2(339)
第三节 弧长计算	341
一、弧长公式(341)	
二、悬链线与悬空丈量 微分方程(344)	
三、缓和曲线(350)	四、旋转曲面面积(355)
习题 6-3(358)	
第七章 无穷级数	359
第一节 无穷级数的一般概念	359
一、级数的收敛与发散(360)	二、级数收敛的必要条件(364)
三、正项级数的收敛判定法(365)	四、交错级数的收敛判定法(368)

五、绝对收敛与条件收敛(370)	习题 7-1(371)	
第二节 幂级数		372
一、幂级数的收敛半径(373)	二、幂级数的运算(376)	
三、泰勒级数(377)	四、初等函数的幂级数展开式(385)	
五、多元函数的泰勒级数(389)	习题 7-2(391)	
第三节 幂级数的应用		392
一、用级数进行近似计算(392)	二、级数在测量中的应用(401)	
习题 7-3(406)		
第四节 内插法		406
一、插值多项式(407)	二、差商 牛顿基本内插公式(410)	
三、差分 牛顿前、后插公式(412)		
四、斯梯林公式及贝塞尔公式(417)	习题 7-4(421)	
第八章 球面三角		423
第一节 球面几何		423
一、球面上的大圆和小圆 极(423)	二、球面角(424)	
三、球面三角形(425)	四、极三角形(425)	
五、球面坐标(426)	习题 8-1(427)	
第二节 球面三角		427
一、正弦公式(427)	二、余弦公式(428)	
三、正余弦公式(430)	四、余切公式(431)	
五、半角公式(431)	六、半边公式(433)	
七、半角(半边)和差公式(435)	八、球面上两点间距离的计算(437)	
习题 8-2(437)		
第三节 球面直角三角形		438
一、球面直角三角形的边角关系(438)		
二、子午线收敛角(441)	习题 8-3(441)	
第四节 球面三角形面积和球面角超		442
一、球面三角形面积(442)	二、球面角超(444)	
三、球面上小三角形的解算(445)	习题 8-4(450)	
第五节 地球椭圆柱体面上法截弧的曲率半径		451
一、主曲率半径(452)	二、平均曲率半径(454)	
习题 8-5(455)		
附录一 公式汇编		457
附录二 习题解答		481

第一章 函数和极限

世界上一切事物由于内部存在着矛盾，都处在不断运动、变化、发展的过程中。在这过程中，总伴随着数量的变化。因此，在生产实践中，我们经常遇到各种各样变化着的量，譬如，一天的温度，地面的高程，河水的流速，等等，这种在某一过程中可以取不同数值的量，叫做变量（或变数）。相反地，在某一过程中保持相对不变的量，如平面三角形的内角和，测区的面积，重锤的重量，等等，这种量叫做常量（或常数）。

值得注意的是，常量不“常”，它具有相对性。例如，一根钢尺的长度一般是个常量，但在温度变化的情况下，尺长受热胀冷缩的影响，是个变量，精密量距时需要进行温度改正。由此可见，一个量是常量还是变量，要根据具体情况进行具体分析。

在同一过程中，往往出现几个不同的量，其中有些量是常量，有些量是变量。例如，在画地形图时，等高线的等高距 h 是常量，平距 d 是变量，地面坡度 i 也是变量。 i 和 d 之间有关系式 $i = \frac{h}{d}$ 。显然， d 愈大 i 愈小，而坡度小地面平坦。

研究变量与变量之间的依赖关系，及变量的变化趋势，是高等数学首先要讨论的内容。

第一节 函数概念

客观事物的运动和变化都是互相联系、互相制约的。反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系，即所谓函数关系。例如：

对于同一等高距 h , 地面坡度 i 与平距 d 之间有函数关系

$$i = \frac{h}{d}.$$

i 随 d 变化而变化, 且当 d 增大时 i 减小, 当 d 减小时 i 增大.

视距测量中, 视线水平时, 水平距离 D 与上、下视距丝的读数差 n 之间有函数关系

$$D = Cn \quad (C = 100).$$

D 随 n 变化而变化, 且当 n 增大时 D 也增大.

高程测量中, 已知水平距离 D , 则地面上两点间的高差 h 与高度角 α 之间有函数关系

$$h = D \operatorname{tg} \alpha.$$

h 随 α 变化而变化, 且当 α 值确定之后, h 值也随之而定.

我们看到, 上述函数关系所代表的实际意义和表达形式虽然各不相同, 但是都具有共同的本质, 这就是: 在某一过程中有两个变量, 它们是互相联系的, 当其中一个变量取某个确定值时, 另一个变量按照一定规律总有一个确定的值同它对应. 概括这些共同的本质, 就得出下面的定义.

函数定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 随着变量 x 变化. 对于变量 x 在变化过程中所取的每一个值, 按照一定的规律, 变量 y 总有一个确定的对应值. 这时, 就说 y 是 x 的函数, 一般记作

$$y = f(x) \text{ 或 } y = y(x),$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量.

在函数 $y = f(x)$ 中, 记号“ f ”表示变量 y 与变量 x 之间的对应规律, 而不是 f 乘以 x . 正象在代数中用字母 a 、 b 、 c 代表任何数值一样, 在函数研究中, $f(x)$ 可以代表 x 的任何函数, 如代表 x^2 、 $\frac{1}{1+x^2}$ 、 $\sin x$ 等等, 它是抽象的函数记号.

当我们把一个具体的函数, 如函数

$$y = 2x^2 + 5x + 1,$$

用记号 $y = f(x)$ 来表示时, 就有

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1.$$

对于函数 $y = f(x)$, 当自变量 x 取某个定值 x_0 时, 对应的函数值记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0}.$$

例如, 函数 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 2 \times 0^2 + 5 \times 0 + 1 = 1$;

当 $x = 1$ 时, $f(1) = 2 \times 1^2 + 5 \times 1 + 1 = 8$;

当 $x = -2$ 时, $f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) + 1 = -1$;

当 $x = x_0$ 时, $f(x_0) = 2x_0^2 + 5x_0 + 1$.

使因变量有确定对应值的自变量的取值范围叫做函数的定义域. 在研究函数关系时必须注意函数的定义域, 因为只有当自变量在定义域内取值时, 因变量才有确定的对应值, 函数关系才有意义. 通常从以下两方面考察函数的定义域.

(i) 联系函数所反映的实际问题, 其定义域由实际意义来确定. 如:

地面坡度函数 $i = \frac{h}{d}$ 的定义域是 $d > 0$;

地面高差函数 $h = D \operatorname{tg} \alpha$ 的定义域是

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

(ii) 一般在数学上研究函数关系时, 其定义域由函数式本身来确定. 如:

(1) 函数 $y = x^2 + 3$, 它对于 x 的任何实数值都有意义, 记其定义域为

$$-\infty < x < +\infty,$$

式中“ $+\infty$ ”和“ $-\infty$ ”这两个记号分别读作“正无穷”和“负无穷”.

(2) 函数 $y = \frac{5}{x-2}$, 它只有当 $x \neq 2$ 时, y 才有确定的对应

值(因分母为0),即函数没有意义. 因此,函数的定义域为 $x \neq 2$ 的所有实数.

(3) 函数 $y = \sqrt{9-x^2}$, 它只有当 $9-x^2 \geq 0$ 时, 根式才有意义. 所以,函数的定义域为

$$-3 \leq x \leq 3.$$

(4) 函数 $y = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$, 这个函数的定义域应是两个函数 $\sqrt{x^2-1}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域的公共部分. 而函数 $\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $x \geq 1$ 及 $x \leq -1$, 函数 $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 $x < 2$. 因此,所给函数的定义域为

$$x \leq -1 \text{ 及 } 1 \leq x < 2.$$

通常还用“区间”来表示函数的定义域. 如果变量 x 的变化范围是 $a \leq x \leq b$, 就说 x 在闭区间 $[a, b]$ 上变化; 如果变量 x 的变化范围是 $a < x < b$, 就说 x 在开区间 (a, b) 内变化. 闭区间和开区间的区别是: 闭区间包含两个端点, 开区间不包含端点.

此外,还有所谓无穷区间: 如果 x 的变化范围是 $x \geq a$, 即 $a \leq x < +\infty$, 就说 x 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 内变化; 如果 x 的变化范围是 $x < b$, 即 $-\infty < x < b$, 就说 x 在无穷区间 $(-\infty, b)$ 内变化; 如果 x 可取任何实数, 即 $-\infty < x < +\infty$, 就说 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上变化. 这些区间可以用数轴上的图形来表示, 如图 1-1 所示.

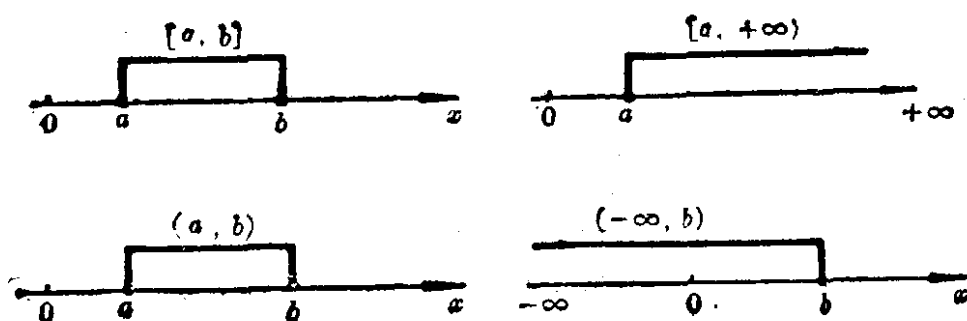


图 1-1

因此,上面各函数的定义域可用区间表示为

- (1) 函数 $y=x^2+3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.
- (2) 函数 $y=\frac{5}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$ 及 $(2, +\infty)$.
- (3) 函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3, 3]$.
- (4) 函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, 2)$.

请读者用数轴上的图形来表示上面的区间,并将不包含在区间内的端点用空点“ $\circ$ ”表示,将包含在区间内的端点用实点“ $\bullet$ ”表示.

表达函数关系的方法,除了用数学式子来表示自变量与因变量之间的对应关系外,实用上还常采用列表、图形等方法来表示自变量与因变量之间的对应关系.

各种测量成果表就是用列表方法表示函数的例子.如在下面的建筑物沉降观测成果表中,可以把观测日期看成自变量,而把建筑物静荷重和观测点沉降量看成因变量.这样,自变量与因变量之间的对应关系于是成立.此外,大家熟知的三角函数表、对数表、三角函数对数表等数学用表,以及视距表、圆曲线偏角表、地球椭

建筑物沉降观测成果表

工程名称: ×××
仪器: SB 型 引用标志: BM48 观测者: ×××

观测点 编号	开始观测 时的高程 (米)	开始观测 日期	观测日期和结果			备 注
			58-10-1	58-12-15	59-2-15	
1	127.546	58-8-1	$\frac{2.0}{0.7}$	$\frac{3.4}{1.0}$	$\frac{4.1}{1.3}$	左列数值中 分子为沉降 量(毫米), 分母为观测 时的静荷重 (吨/米 ²)
2	127.722	58-8-1	$\frac{0}{0.6}$	$\frac{1.2}{0.9}$	$\frac{3.0}{1.2}$	
3	127.548	58-8-1	$\frac{1.5}{0.6}$	$\frac{2.1}{0.8}$	$\frac{3.4}{1.2}$	

圆体曲率半径表等测量用表，也都是用列表方法表示的函数。用列表方法表示函数，可以直接从表上查得函数值，使用方便。

某水文站用自记水位仪记下一天水位变化规律。图 1-2 是自记水位仪在坐标纸上画出的潮位变化曲线图，其中横坐标是时间 t ，纵坐标是水位 s 。它形象地表示出水位 s 随时间 t 的变化规律：对于某一确定的时间 t ，就有一个确定的水位 s 与之对应。例如当 $t=6$ 小时，有 $s=1.35$ 米。这里水位 s 与时间 t 的函数关系就是用图形来表示的。

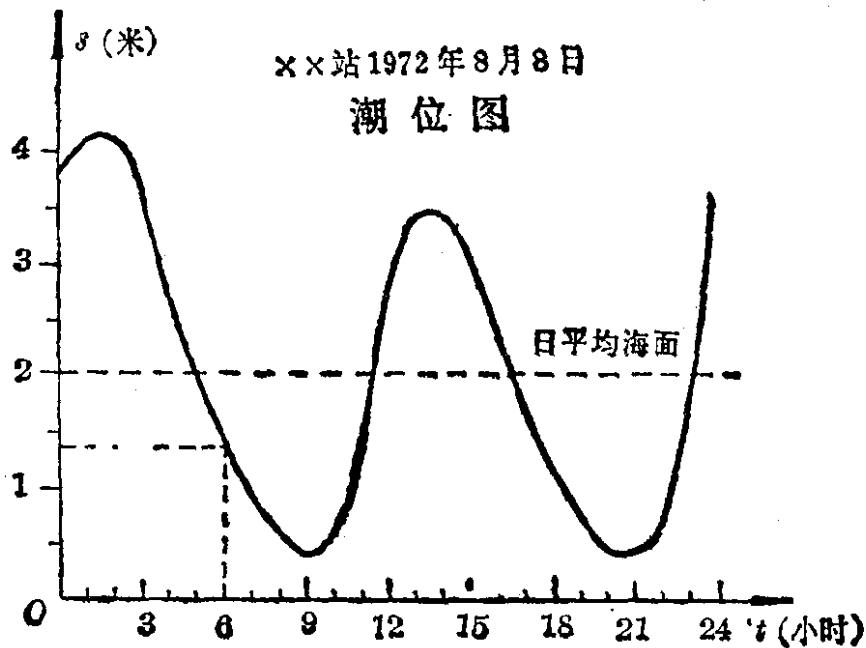


图 1-2

由于用图形表示函数比较明显、直观，能从图形上直接了解函数的变化趋势，所以在解决实际问题时，往往要绘制一些表示函数关系的图形。例如，在沉降观测的成果整理中，就需要根据建筑物沉降观测成果表绘制荷重-时间-沉降关系曲线，如图 1-3 所示。

一般地，函数 $y=f(x)$ 的图形是在平面直角坐标系 xOy 中，以自变量 x 为横坐标、因变量 y 为纵坐标的点 M 的几何轨迹(图 1-4)，其中 x 、 y 满足等式(或方程) $y=f(x)$ 。

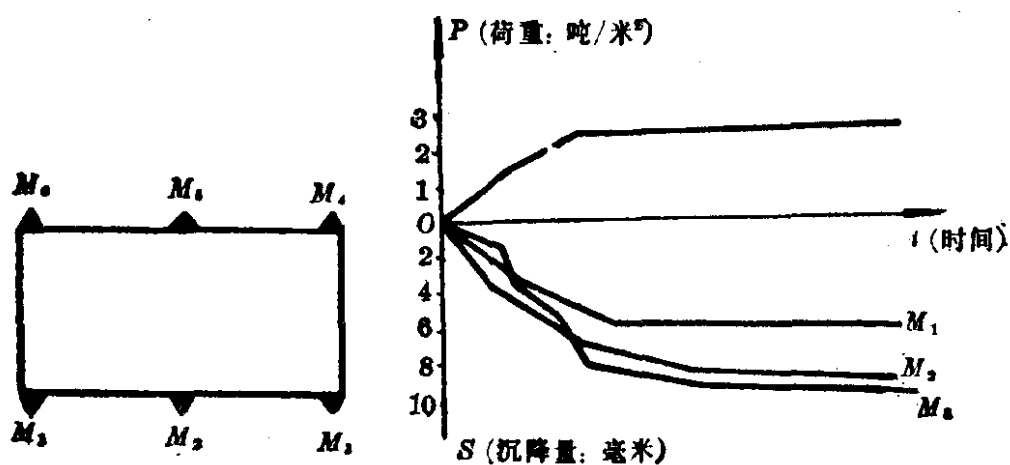


图 1-3

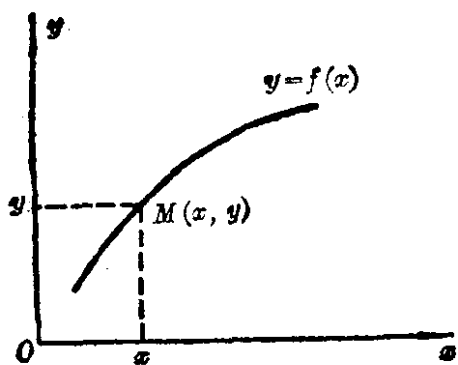


图 1-4

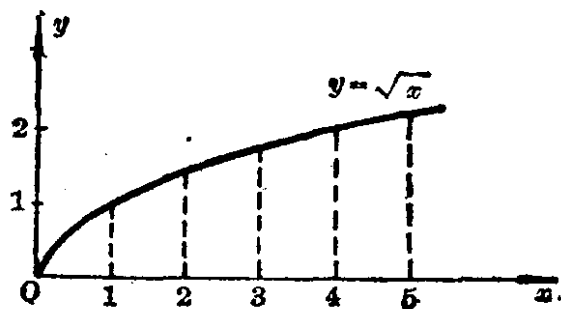


图 1-5

[例] 用描点法作出函数 $y = \sqrt{x}$ 的图形.

解: 先在函数的定义域 $[0, +\infty)$ 内作出下面的函数表:

x	0	1	2	3	4	5	...
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	...

然后按表中各对 x 、 y 值, 在平面直角坐标系 xOy 内描出相应的点 $M(x, y)$. 再将所得的点连接成一条光滑曲线, 就得到函数 $y = \sqrt{x}$ 的图形(图 1-5).

习 题 1-1

1. 火车开始启动到某一阶段后, 可以近似地看成是等速直线运动. 在这运行过程中, 设 s 是火车经过的路程, v 是速度, t 是行驶的时间, 写出火

车的运行规律.

2. 写出圆周长 l 、圆面积 S 及圆内接正六边形的面积 A 与其半径 r 之间的函数关系式, 并指出其定义域.
3. 把横断面近似于圆形的木材(直径 $D=30$ 厘米)锯成长与宽分别为 h 和 b 的矩形断面方木(图 1-6), 试将锯成的截面积 A 表示为 b 的函数, 并指出其定义域.

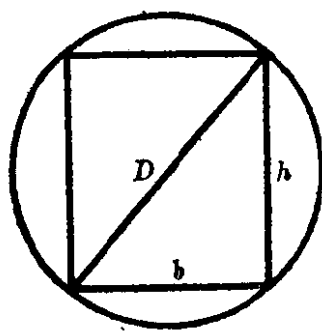


图 1-6

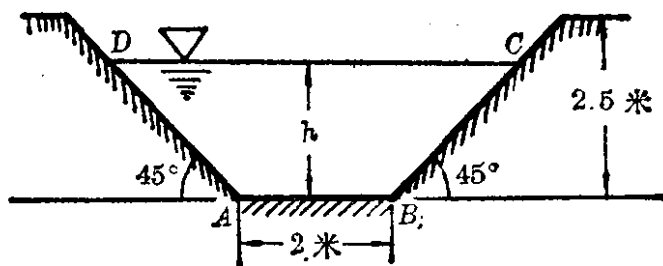


图 1-7

4. 某灌溉渠的横截面是一个梯形, 如图 1-7, 底宽 2 米, 高 2.5 米, 斜边的倾角为 45° , CD 表示水面, 求断面 $ABCD$ 的面积 S 与水深 h 的函数关系, 并指出函数 $S(h)$ 的定义域.
5. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{2}{1-x};$

(2) $y = \frac{1}{x^2-3};$

(3) $y = \sqrt{3x+2};$

(4) $y = \sqrt{x^2-4};$

(5) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2};$

(6) $y = x + \frac{1}{x};$

(7) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$

(8) $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}};$

(9) $y = \sqrt{x^2+4x-5};$

(10) $y = \sqrt{x^2+5}.$

6. 设 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求下列函数值:

$$f(0), f(1), f(-2), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0+4x).$$

7. 用描点法作出函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的图形.