高等数学

（测绘专业用）

上　册

陈雄南　编

测绘出版社

高 等 数 学

（测绘专业用）

上 册

陈雄南 编

测绘出版社

本书的特点是数学紧密结合生产实践，书中所举算例大多是测绘工作中提出的数学问题。适合于测绘作业人员、各院校和训练班的测绘专业学生、上山下乡知识青年学习高等数学用，也可供师范院校有关师生参考。

高 等 数 学

（测 绘 专 业 用）

上 册

陈 雄 南 编

*

测 绘 出 版 社 出 版

上海商务印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 • 印张 19 1/8 • 字数 600,000

1978 年 12 月第一版 • 1978 年 12 月第一次印刷

印数 1—101,000 • 定价 1.84 元

统一书号: 15039 • 新 111

引　言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学．而初等数学是研究常数的数学，高等数学则是研究变数的数学，其中最重要的部分是微积分，它在本质上不外是辩证法在数学方面的应用．

革命导师恩格斯指出："**和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。**"初等数学是这样，高等数学也同样如此．随着社会生产实践和科学技术发展的需要，人们从研究常数的数学，发展为研究变数的数学，这是数学发展史上的一个重大的飞跃．而解析几何把曲线图形看作点的运动轨迹，并通过坐标方法用数量形式（代数方程）表达出来；从此引进了变数（动点的坐标），成为数学中的转折点．于是，运动进入了数学，辩证法进入了数学，一门新的数学分科——微积分就相应地产生出来了．于十七世纪后半叶，牛顿和莱布尼兹两人，几乎同时地在总结人们长期研究成果的基础上，大体上完成了微积分的基本思想和方法．

在近代自然科学和工程技术中，高等数学是一种基本的数学工具．在测绘专业中，除了大量运用初等数学的知识外，还经常要用到高等数学的知识．例如：地形测量中的误差理论；控制测量中严密平差的理论基础——最小二乘法原理，基线丈量的各项改正值，正弦对数的秒差计算；工程测量中精度方面的分析，铁路弯道的曲率半径和弧长；等等，这些都需要应用微积分和级数方面的知识．由此可见，高等数学是测绘专业技术人员必须具备的数学知识．

按照"理论和实际统一"的原则，本书在重视数学基础理论的

前提下，努力加强与专业之间的联系，密切配合专业课的实际需要．但这仅是一个初步的尝试，还有待于进一步提高和完善，欢迎批评指正．

目　　录

第一章 函数和极限

世界上一切事物由于内部存在着矛盾，都处在不断运动、变化、发展的过程中. 在这过程中，总伴随着数量的变化. 因此，在生产实践中，我们经常遇到各种各样变化着的量，譬如，一天的温度，地面的高程，河水的流速，等等，这种在某一过程中可以取不同数值的量，叫做变量(或变数). 相反地，在某一过程中保持相对不变的量，如平面三角形的内角和，测区的面积，重锤的重量，等等，这种量叫做常量(或常数).

值得注意的是，常量不"常"，它具有相对性. 例如，一根钢尺的长度一般是个常量，但在温度变化的情况下，尺长受热胀冷缩的影响，是个变量，精密量距时需要进行温度改正. 由此可见，一个量是常量还是变量，要根据具体情况进行具体分析.

在同一过程中，往往出现几个不同的量，其中有些量是常量，有些量是变量. 例如，在画地形图时，等高线的等高距 h 是常量，平距 d 是变量，地面坡度 i 也是变量. i 和 d 之间有关系式 $i=\dfrac{h}{d}$. 显然，d 愈大 i 愈小，而坡度小地面平坦.

研究变量与变量之间的依赖关系，及变量的变化趋势，是高等数学首先要讨论的内容.

第一节 函数概念

客观事物的运动和变化都是互相联系、互相制约的. 反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系，即所谓函数关系. 例如：

对于同一等高距 h，地面坡度 i 与平距 d 之间有函数关系

$$i=\frac{h}{d}.$$

i 随 d 变化而变化，且当 d 增大时 i 减小，当 d 减小时 i 增大.

视距测量中，视线水平时，水平距离 D 与上、下视距丝的读数差 n 之间有函数关系

$$D=Cn \quad (C=100).$$

D 随 n 变化而变化，且当 n 增大时 D 也增大.

高程测量中，已知水平距离 D，则地面上两点间的高差 h 与高度角 α 之间有函数关系

$$h=D\operatorname{tg}\alpha.$$

h 随 α 变化而变化，且当 α 值确定之后，h 值也随之而定.

我们看到，上述函数关系所代表的实际意义和表达形式虽然各不相同，但是都具有共同的本质，这就是：在某一过程中有两个变量，它们是互相联系的，当其中一个变量取某个确定值时，另一个变量按照一定规律总有一个确定的值同它对应. 概括这些共同的本质，就得出下面的定义.

函数定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随着变量 x 变化. 对于变量 x 在变化过程中所取的每一个值，按照一定的规律，变量 y 总有一个确定的对应值. 这时，就说 y 是 x 的函数，一般记作

$$y=f(x) \quad 或 \quad y=y(x),$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

在函数 $y=f(x)$ 中，记号“f”表示变量 y 与变量 x 之间的对应规律，而不是 f 乘以 x. 正象在代数中用字母 a、b、c 代表任何数值一样，在函数研究中，$f(x)$ 可以代表 x 的任何函数，如代表 x^2、$\frac{1}{1+x^2}$、$\sin x$ 等等，它是抽象的函数记号.

当我们把一个具体的函数，如函数

$$y=2x^2+5x+1,$$

用记号 $y=f(x)$ 来表示时，就有

$$f(x)=2x^2+5x+1.$$

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取某个定值 x_0 时，对应的函数值记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0}.$$

例如，函数 $f(x)=2x^2+5x+1$:

当 $x=0$ 时，$f(0)=2\times 0^2+5\times 0+1=1$;

当 $x=1$ 时，$f(1)=2\times 1^2+5\times 1+1=8$;

当 $x=-2$ 时，$f(-2)=2\times(-2)^2+5\times(-2)+1=-1$;

当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=2x_0^2+5x_0+1$.

使因变量有确定对应值的自变量的取值范围叫做函数的定义域. 在研究函数关系时必须注意函数的定义域，因为只有当自变量在定义域内取值时，因变量才有确定的对应值，函数关系才有意义. 通常从以下两方面考察函数的定义域.

(i) 联系函数所反映的实际问题，其定义域由实际意义来确定. 如:

地面坡度函数 $i=\dfrac{h}{d}$ 的定义域是 $d>0$;

地面高差函数 $h=D\operatorname{tg}\alpha$ 的定义域是

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

(ii) 一般在数学上研究函数关系时，其定义域由函数式本身来确定. 如:

(1) 函数 $y=x^2+3$，它对于 x 的任何实数值都有意义，记其定义域为

$$-\infty<x<+\infty,$$

式中"$+\infty$"和"$-\infty$"这两个记号分别读作"正无穷"和"负无穷".

(2) 函数 $y=\dfrac{5}{x-2}$，它只有当 $x=2$ 时，y 才没有确定的对应

值(因分母为 0)，即函数没有意义．因此，函数的定义域为 $x\neq 2$ 的所有实数.

(3) 函数 $y=\sqrt{9-x^2}$，它只有当 $9-x^2\geqslant 0$ 时，根式才有意义．所以，函数的定义域为

$$-3\leqslant x\leqslant 3.$$

(4) 函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$，这个函数的定义域应是两个函数 $\sqrt{x^2-1}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域的公共部分．而函数 $\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $x\geqslant 1$ 及 $x\leqslant -1$，函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 $x<2$．因此，所给函数的定义域为

$$x\leqslant -1 \text{ 及 } 1\leqslant x<2.$$

通常还用“区间”来表示函数的定义域．如果变量 x 的变化范围是 $a\leqslant x\leqslant b$，就说 x 在闭区间 $[a, b]$ 上变化；如果变量 x 的变化范围是 $a<x<b$，就说 x 在开区间 (a, b) 内变化．闭区间和开区间的区别是：闭区间包含两个端点，开区间不包含端点.

此外，还有所谓无穷区间：如果 x 的变化范围是 $x\geqslant a$，即 $a\leqslant x<+\infty$，就说 x 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 内变化；如果 x 的变化范围是 $x<b$，即 $-\infty<x<b$，就说 x 在无穷区间 $(-\infty, b)$ 内变化；如果 x 可取任何实数，即 $-\infty<x<+\infty$，就说 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上变化．这些区间可以用数轴上的图形来表示，如图 1-1 所示.

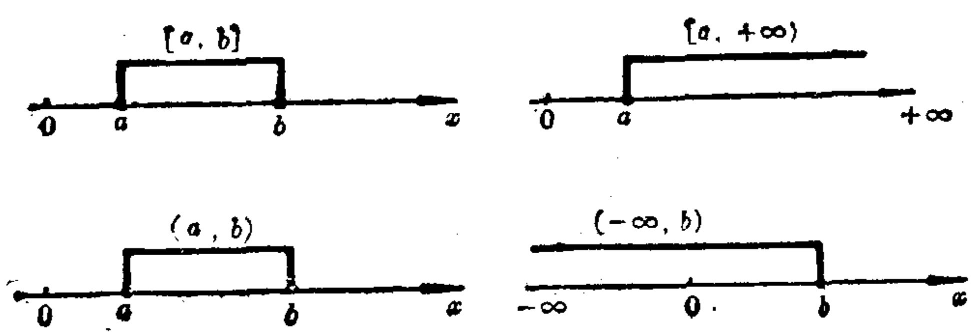

图 1-1

因此，上面各函数的定义域可用区间表示为

(1) 函数 $y=x^2+3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 函数 $y=\dfrac{5}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$ 及 $(2, +\infty)$.

(3) 函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3, 3]$.

(4) 函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为

$$(-\infty, -1] \text{及} [1, 2).$$

请读者用数轴上的图形来表示上面的区间，并将不包含在区间内的端点用空点"∘"表示，将包含在区间内的端点用实点"•"表示.

表达函数关系的方法，除了用数学式子来表示自变量与因变量之间的对应关系外，实用上还常采用列表、图形等方法来表示自变量与因变量之间的对应关系.

各种测量成果表就是用列表方法表示函数的例子. 如在下面的建筑物沉降观测成果表中，可以把观测日期看成自变量，而把建筑物静荷重和观测点沉降量看成因变量. 这样，自变量与因变量之间的对应关系于是成立. 此外，大家熟知的三角函数表、对数表、三角函数对数表等数学用表，以及视距表、圆曲线偏角表、地球椭

建筑物沉降观测成果表

工程名称: ×××

仪器: SB 型　　引用标志: BM48　　观测者: ×××

观测点编号	开始观测时的高程（米）	开始观测日期	观测日期和结果			备注
			58-10-1	58-12-15	59-2-15	
1	127.546	58-8-1	$\frac{2.0}{0.7}$	$\frac{3.4}{1.0}$	$\frac{4.1}{1.3}$	左列数值中分子为沉降量(毫米)，分母为观测时的静荷重(吨/米^2)
2	127.722	58-8-1	$\frac{0}{0.6}$	$\frac{1.2}{0.9}$	$\frac{3.0}{1.2}$	
3	127.548	58-8-1	$\frac{1.5}{0.6}$	$\frac{2.1}{0.8}$	$\frac{3.4}{1.2}$	

圆体曲率半径表等测量用表，也都是用列表方法表示的函数. 用列表方法表示函数，可以直接从表上查得函数值，使用方便.

某水文站用自记水位仪记下一天水位变化规律. 图 1-2 是自记水位仪在坐标纸上画出的潮位变化曲线图，其中横坐标是时间 t，纵坐标是水位 s. 它形象地表示出水位 s 随时间 t 的变化规律：对于某一确定的时间 t，就有一个确定的水位 s 与之对应. 例如当 $t=6$ 小时，有 $s=1.35$ 米. 这里水位 s 与时间 t 的函数关系就是用图形来表示的.

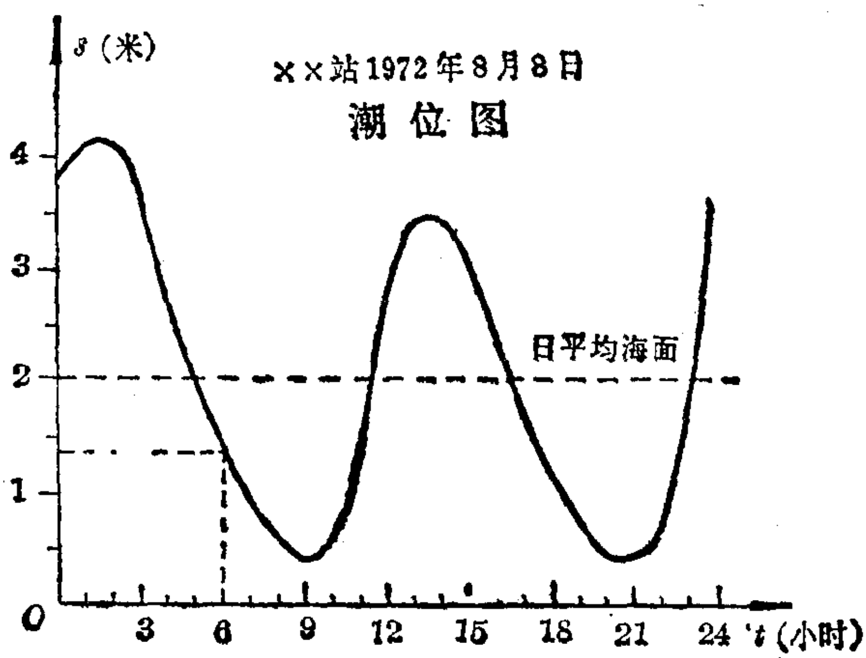

图 1-2

由于用图形表示函数比较明显、直观，能从图形上直接了解函数的变化趋势，所以在解决实际问题时，往往要绘制一些表示函数关系的图形. 例如，在沉降观测的成果整理中，就需要根据建筑物沉降观测成果表绘制荷重-时间-沉降关系曲线，如图 1-3 所示.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的图形是在平面直角坐标系 xOy 中，以自变量 x 为横坐标、因变量 y 为纵坐标的点 M 的几何轨迹(图 1-4)，其中 x、y 满足等式(或方程) $y=f(x)$.

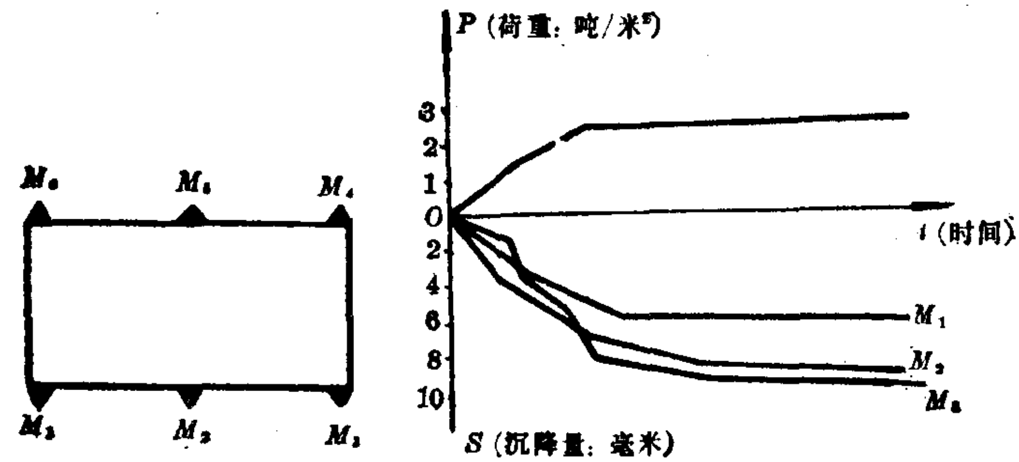

图 1-3

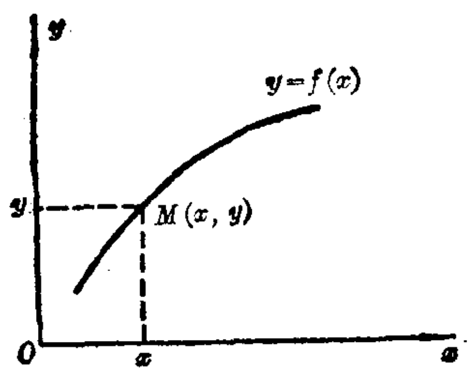

图 1-4

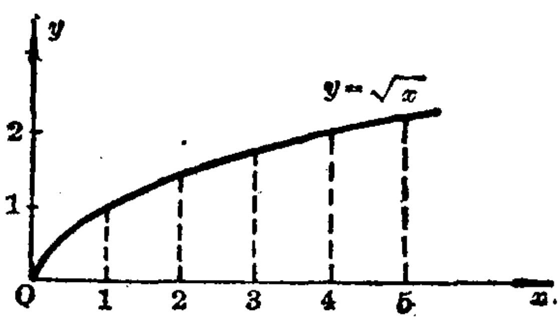

图 1-5

[例] 用描点法作出函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形.

解: 先在函数的定义域 $[0, +\infty)$ 内作出下面的函数表:

x	0	1	2	3	4	5	…
$y=\sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	…

然后按表中各对 x、y 值, 在平面直角坐标系 xOy 内描出相应的点 $M(x, y)$. 再将所得的点连接成一条光滑曲线, 就得到函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形(图 1-5).

习 题 1-1

1. 火车开始启动到某一阶段后, 可以近似地看成是等速直线运动. 在这运行过程中, 设 s 是火车经过的路程, v 是速度, t 是行驶的时间, 写出火

车的运行规律.

2. 写出圆周长 l、圆面积 S 及圆内接正六边形的面积 A 与其半径 r 之间的函数关系式，并指出其定义域.

3. 把横断面近似于圆形的木材（直径 $D=30$ 厘米）锯成长与宽分别为 h 和 b 的矩形断面方木(图 1-6)，试将锯成的截面积 A 表示为 b 的函数，并指出其定义域.

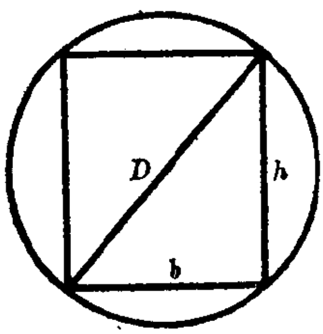

图 1-6

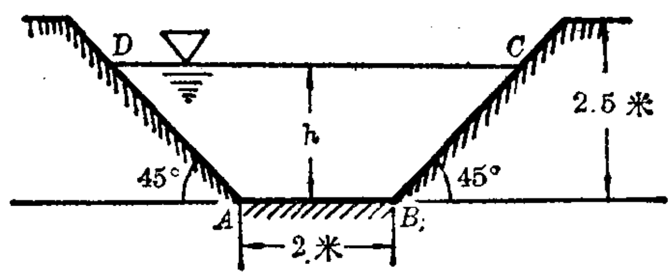

图 1-7

4. 某灌溉渠的横截面是一个梯形，如图 1-7，底宽 2 米，高 2.5 米，斜边的倾角为 45°，CD 表示水面，求断面 $ABCD$ 的面积 S 与水深 h 的函数关系，并指出函数 $S(h)$ 的定义域.

5. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2}{1-x}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-3}$;

(3) $y=\sqrt{3x+2}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}$;

(5) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;　　(6) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

(9) $y=\sqrt{x^2+4x-5}$;　　(10) $y=\sqrt{x^2+5}$.

6. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值:

$f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$, $f(x_0)$, $f(x_0+\Delta x)$.

7. 用描点法作出函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图形.