

结构弹塑性有限元分析法

姜晋庆 张 铎 编著



科学出版社

结构弹塑性有限元分析法

姜晋庆 张 铎 编著

科学出版社

目 录

前 言	(1)
符号说明	(3)
标识符说明	(4)
第一章 有限元法分析过程概述及力学基础	
§ 1.1 应力与主应力	(6)
§ 1.2 位移及变形、几何方程、刚体位移	(10)
§ 1.3 物理方程及弹性矩阵	(12)
§ 1.4 虚功及虚功方程	(16)
§ 1.5 薄板弯曲问题	(18)
§ 1.6 有限元法分析过程概述	(23)
第二章 单元刚度矩阵	
§ 2.1 杆单元刚度矩阵	(28)
§ 2.2 常应变三角形单元刚度矩阵	(30)
§ 2.3 矩形平面应力单元刚度矩阵	(36)
§ 2.4 梁单元刚度矩阵	(40)
§ 2.5 三角形薄板单元刚度矩阵	(44)
§ 2.6 矩形薄板单元刚度矩阵	(53)
第三章 等参数单元	
§ 3.1 等参数单元的基本概念及公式	(61)
§ 3.2 高斯积分法的应用	(70)
§ 3.3 平面四节点等参数单元的刚度矩阵	(73)
§ 3.4 含有内部自由度的平面四节点等参数单元 的刚度矩阵	(80)
§ 3.5 平面八节点等参数单元刚度矩阵	(93)
§ 3.6 空间八节点体元刚度矩阵	(97)

§ 3.7	含有九个内部自由度的空间八节点体元刚度矩阵	(107)
第四章 总体刚度矩阵		
§ 4.1	总体刚度矩阵的组装	(116)
§ 4.2	总体刚度矩阵规模的计算	(119)
§ 4.3	坐标变换	(126)
§ 4.4	节点的主从关系转换	(142)
§ 4.5	总体坐标系单元刚度矩阵的投放	(152)
§ 4.6	形成总体刚度矩阵	(156)
第五章 节点载荷列矩阵		
§ 5.1	单元等效节点载荷	(158)
§ 5.2	全结构节点载荷列矩阵	(164)
第六章 位移边界条件		
§ 6.1	位移边界条件的应用	(169)
§ 6.2	对称条件及其应用	(172)
§ 6.3	斜支撑边界条件	(174)
第七章 全结构平衡方程的解法		
§ 7.1	直接求逆法	(181)
§ 7.2	对称分解法 (LDLT)	(186)
§ 7.3	波前法	(195)
第八章 应力计算		
§ 8.1	杆单元的应力计算	(222)
§ 8.2	常应变三角形单元的应力计算	(225)
§ 8.3	平面矩形单元的应力计算	(228)
§ 8.4	梁单元的应力计算	(231)
§ 8.5	三角形薄板单元的应力计算	(234)
§ 8.6	矩形薄板单元的应力计算	(238)
§ 8.7	平面四节点等参数单元的应力计算	(241)
§ 8.8	含有内部自由度的平面四节点等参数单元的应力计算	(244)

§ 8·9	平面八节点等参数单元的应力计算·····	(248)
§ 8·10	空间八节点体元的应力计算·····	(250)
§ 8·11	含有内部自由度的空间八节点体元的应力计算·····	(252)
第九章 子结构法		
§ 9·1	子结构法的基本原理·····	(255)
§ 9·2	出口刚度矩阵、出口载荷列矩阵的形成·····	(258)
§ 9·3	公共边界节点位移与内节点位移的计算·····	(264)
§ 9·4	子结构有限元法的实施·····	(266)
第十章 塑性力学的基本概念		
§ 10·1	基本实验资料·····	(280)
§ 10·2	材料性质的基本假设和本构关系·····	(285)
§ 10·3	屈服条件·····	(289)
第十一章 塑性应力应变关系		
§ 11·1	塑性应力应变关系的分析·····	(305)
§ 11·2	增量理论·····	(310)
§ 11·3	全量理论·····	(320)
第十二章 弹塑性有限元的基本方法		
§ 12·1	弹塑性有限元方法概述·····	(328)
§ 12·2	初载荷问题·····	(337)
第十三章 全量理论的各种解法		
§ 13·1	全量理论下弹塑性矩阵 $[D]^{eP}$ ·····	(343)
§ 13·2	割线刚度法·····	(357)
§ 13·3	加快收敛的全量割线刚度法·····	(377)
§ 13·4	初应力法·····	(381)
第十四章 增量法及其程序		
§ 14·1	增量理论下的弹塑性矩阵 $[D]^{eP}$ ·····	(398)
§ 14·2	增量法的特点·····	(420)
§ 14·3	切线刚度法·····	(424)

§ 14·4	一阶自校正.....	(448)
§ 14·5	增量的初应力法.....	(452)
§ 14·6	复杂加载情况的处理.....	(466)

第十五章 高精度单元在弹塑性分析中的应用

§ 15·1	弹塑性分析中应用高精度单元的一般方法.....	(478)
§ 15·2	应用等参数单元的全量初应力法.....	(484)
§ 15·3	应用等参数单元的增量初应力法.....	(492)
§ 15·4	弯曲板的弹塑性分析.....	(493)

第十六章 交变载荷作用下的弹塑性分析

§ 16·1	基本原理.....	(505)
§ 16·2	瞬态应力应变关系.....	(509)
§ 16·3	屈服强度增量.....	(512)
§ 16·4	交变载荷下的弹塑性分析.....	(516)

前 言

随着科学技术的发展，对大量日趋复杂的工程结构，提出了进行细致的静力分析甚至弹塑性分析的要求。近三十年来得到迅速发展的有限元法成了这些分析工作的最有力的工具。关于有限元法的研究论文和书刊的数量与日俱增，各种弹性和弹塑性通用与专用程序也应运而生。70年代以来，国内大多数工科院校也都在“弹性和塑性力学”之外又开设了“有限元法”课程，使之得到迅速深入地普及和推广。但是有限元法除了理论性很强，内容丰富之外，它又是一门实践性很强的学科，熟知原理并不等于能解题。在我们长期从事这方面的教学和科研工作中深感在工科院校有限元法的基本原理与相应的编制计算程序原理有机地结合在一起的必要性。为此我们开设了“有限元程序设计”和“弹塑性有限元分析”课程，受到普遍的欢迎。另外在微机日益普及的今天，广大的工程技术人员更是希望能够象利用计算器一样直接应用有限元法在微机上处理生产或科研领域中的实际问题。这样，提供出大量的功能模块，在粗知弹性和塑性力学及有限元法原理的基础上就可以独立地组合出所需要的计算程序系统，便成了迫切的要求。本书正是为了这一目的，在原有教材的基础上，适当扩充一些近期的研究成果编著而成的。

本书力图不涉及有限元法更深入的理论部分，尽可能不作过多的数学推导，而把重点放在应用有限元法进行结构弹性和弹塑性分析方面、遵循由浅入深，由简到繁的原则，按照实施这一分析过程的顺序，首先分段介绍要分析的基本原理和编写计算程序的方法技巧，然后提供相应的程序模块，最后根据不同的分析方法给出一些综合应用模块，整理全部分析工作，构成综合分析程序系统的方法和框图。全书提供了进行弹塑性结构分析的全套功

能模块，共计120个子程序3000余条语句。这些都是按照“结构化程序设计”的原则精心编写的，经过实践考验证明是可行的。一般说来每个子程序的功能比较单一、接口简单、易读易懂。各子程序之间完全避免了公共块的联系，这样可以使程序系统的组织工作易于实现，使用中的错误易于分割查找。另外在本书的附录中给出了绝大多数功能程序模块的考题及计算结果，供检验和校对程序之用。无疑这些都会受到使用者的欢迎。

从内容上看，本书可以分作三部分。第一部分属于弹性和塑性力学基本原理介绍，包括第一、第十至第十二章，它是为后两部分服务的。第二部分为弹性有限元计算方法，包括第二至第九章。给出了单元刚度矩阵，参数单元，总体刚度矩阵，位移边界条件的应用，总体刚度方程的解法，应力计算，子结构法，有限元法计算的全部流程框图，对于一般结构的静力强度分析工作可以圆满地完成。第三部分为弹塑性分析方法，包括第十、十一、十二、十三、十四、十五、十六章。这部分内容有弹塑性全量分析方法，增量分析方法，高精度单元的应用以及交变载荷下的弹塑性分析等。它是在线性弹性有限元法的基础上按塑性理论的方法对有限元法的进一步发展。它可以更深入细致地分析结构弹塑性应力分布情况，也可以作为对日益发展的各种复杂结构分析(如接触，疲劳断裂等)的基本手段。

本书的第一至第九章由张铎同志编著，第十至第十六章由姜晋庆同志编著。责任编辑王敬春同志在本书的编著、审定过程中提出了很多积极建议。对本书编著工作起了很大推动作用，我们在此表示衷心感谢。

本书的主要内容编写于1980年至1984年。许玉赞教授生前曾亲自审阅了全书的原稿，在此我们表示衷心感谢。由于作者的水平所限，书中的缺点和错误在所难免，内容也有待进一步发展，望广大读者批评指正。

编著者

1986年9月

符号说明

E	弹性模量	$\{\delta\}$	节点位移列矩阵
E^p	全量法中割线模量	$\{\delta_e\}$	单元节点位移列矩阵
E'	$\sigma \sim \varepsilon$ 图上的割线模量	T	单元厚度
μ	泊桑比	W	高斯积分点权重
μ^{ep}	弹塑性泊桑比	n	高斯积分阶数
μ^p	塑性泊桑比	$\{\sigma\}$	应力分量列矩阵 $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$
G	剪切模量	σ_i	相当应力(又称当量应力)
G^p	塑性剪切模量	$\sigma_1 \sim \sigma_3$	主应力
$[D]$	弹性矩阵	$\{\sigma_0\}$	初应力
$[V]$	弹性矩阵的对称分解阵	$\sigma_s \sigma_B \sigma_P$	分别为屈服极限, 弹性极限和比例极限
$[D]^{ep}$	弹塑性矩阵	$\{\varepsilon\}$	应变分量列矩阵 $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$
$[D]^p$	塑性矩阵	ε_i	相当应变(又称当量应变)
$[K]$	总体刚度矩阵	$\varepsilon^e, \varepsilon^p$	分别为弹性应变和塑性应变
$[K_e]$	单元刚度矩阵	ε_m	平均弹性应变 $\varepsilon_m = 1/3 (\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e)$
$[K]^{ep}$	弹塑性总体刚度矩阵	θ	体积应变 $\theta = \varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e$
$[K_e]^{ep}$	单元弹塑性刚度矩阵	K	体积模量 $K = E/3(1-2\mu)$
$[K_e]^e$	单元弹性刚度矩阵即 $[K_e]$	l, m, n	方向余弦
$[B]$	几何矩阵	u, v, w	沿 x, y, z 方向的位移
$[N]$	形状函数矩阵	Δ	三角形面积
$\{P\}$	节点力列矩阵		
$\{\Delta P_R\}$	失衡力		
$\{\Delta P^{\circ 0}\}$	节点初载荷列矩阵		

标识符说明

<i>DATJ</i>	雅可比矩阵的行列式。	<i>NPNF</i>	单元刚度矩阵。
<i>EPSN</i>	给定的计算精度要求。	<i>AKM (KK)</i>	一维编码的总体刚度矩阵。
<i>E</i>	弹性模量。	<i>KDKM (NID)</i>	描写总体刚度矩阵规模的指示矩阵
<i>KK</i>	总体刚度矩阵一维编码压缩存储时所需计算机内存数。	<i>B</i>	单元的几何矩阵[<i>B</i>]
<i>L</i>	给定的 σ - ϵ 曲线的分段数。	<i>D</i>	弹性矩阵[<i>D</i>]
<i>NE</i>	单元总数。	<i>V</i>	弹性矩阵[<i>D</i>]的对称分解矩阵。
<i>NP</i>	节点总数。	<i>TR</i>	坐标转换矩阵。
<i>NQ</i>	固支自由度数。	<i>HI, HJ</i>	梁单元节点 <i>i</i> 及节点 <i>j</i> 的主从关系转换矩阵。
<i>NL</i>	载荷工况数(交变载荷时为反复次数)。	<i>EP(NE)</i>	全量法中各单元的割线模量 E^p 。
<i>NFL</i>	某种载荷工况下作用有节点载荷的自由度总数。	<i>HP(NE)</i>	增量法中各单元的切线模量 H' 。
<i>N</i>	增量法分段数。	<i>DE(L)</i>	给定的 σ - ϵ 曲线各段的斜率。
<i>NPE</i>	单元节点数。	<i>DS(L)</i>	给定的 σ - ϵ 曲线各段的 $\Delta\epsilon$ 值。
<i>NFP</i>	节点位移自由度数。	<i>UP(NE)</i>	各单元的 $\mu^{\sigma\epsilon}$ 。
<i>NFE</i>	局部坐标系下节点位移自由度数。	<i>AP(NID)</i>	全结构节点载荷列矩阵。
<i>NPNF</i>	单元位移自由度数。	<i>PA(NLP, 5)</i>	集中载荷的分量 P_x, P_y, P_z 及作用点的坐标 x, y 。
<i>NPNE</i>	单元局部坐标系下位移自由度数。	<i>PR(NID)</i>	失衡力形成的节点载荷列矩阵。
<i>NID</i>	全结构位移自由度数。	<i>IFL(NFL)</i>	各节点载荷的序号。
<i>NLP</i>	给定集中外载荷数。		
<i>T</i>	单元厚度。		
<i>U</i>	泊桑比。		
<i>ME(NE, NPE)</i>	单元的节点编号。		
<i>NQP(NQ)</i>	固支节点自由度序号。		
<i>XYZ(NP, NFP)</i>	节点坐标。		
<i>AKE(NPNF,</i>			

<i>VFL (NFL)</i>	各节点载荷的数值。		(平面状态)。
<i>APO (NID)</i>	全结构塑性初载荷列矩阵。	<i>ASTP(NE, 3)</i>	单元的主应力 σ_1 , σ_2 及角 α 。
<i>PE (NID)</i>	开始时存放全结构节点载荷列矩阵, 解总体平衡方程后存放全结构节点位移。	<i>SRDE(NE, 4)</i>	各增量段按弹性计算的各单元应变增量值。
<i>ADS (NID)</i>	增量法中累计节点位移总量。	<i>SRIS(NE)</i>	增量法中各单元当前的相当应变 e_i 与屈服应变 ϵ_i 之差值。
<i>AD1 (NID)</i>	增量法中本次迭代的节点位移增量。	<i>LOB(NE)</i>	各单元的单元状态指示数组 $\left\{ \begin{array}{l} =0 \text{ 为弹性单元。} \\ =1 \text{ 为过渡单元。} \\ =2 \text{ 为塑性单元。} \end{array} \right.$
<i>AD2 (NID)</i>	增量法中前次迭代的节点位移增量。	<i>EM(NE)</i>	增量法中各单元的弹塑性加权系数 m_i 。
<i>ADD (NID)</i>	本次迭代与前次迭代的节点位移增量差值。	<i>F(NE, L)</i>	各单元瞬态应力应变曲线各折线段的可用性系数。
<i>AD1E(NID)</i>	各增量段按弹性计算的节点位移增量值。	<i>DS1(NE)</i>	各单元的瞬态屈服限。
<i>ASR(NE, 4)</i>	单元的应变 ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} 和相当应变 e_i (平面状态), 若不计 e_i 则改为 <i>ASR(NE, 3)</i> 。		
<i>SRD(NE, 4)</i>	在增量法迭代中的应变增量差值。		
<i>ASRH(NE, 4)</i>	记载在加载历程中各单元曾经达到的最高应变水平(平面状态)。		
<i>AST(NE, 4)</i>	单元的 σ_x , σ_y , τ_{xy} 和相当应力 σ_i		

在给出的全部程序中以第6列上的&表示续行号, 程序正文从第9列开始。

第一章 有限元法分析过程

概述及力学基础

用有限元法求解弹塑性力学问题，要经常用到弹性和塑性力学中的某些概念和方程。为此，本章和第十章将分别介绍弹性力学和塑性力学中的这些概念和方程，本章的最后，还要概括地介绍有限元法分析的过程，使之作为后面各章讨论的基础。

§1.1 应力与主应力

1. 应力

弹性体受外力以后，其内部将产生应力。为了描述弹性体内某一点 P 的应力，可在该点从弹性体内取出一个微小的平行六面体，它的六面均垂直于坐标轴，如图1-1所示。将每个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个轴平行。正应力用字母 σ 来表示，并加上一个角码，表示这个正应力的作用面和作用方向。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上并沿着 x 轴方向作用的。剪应力用 τ 表示，并加上两个角码，前一个角码表示其作用面垂直哪一个坐标轴，后一个角码表示作用方向沿着哪一个坐标轴。例如， τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。图1-1中每一个面上都作用有一个正应力和两个剪应力。 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ ，称为应力分量。它们的合成称为全应力。应力的正负号规则如下：若应力（正应力或剪应力）作用面的外法线与坐标轴的正向平行一致，则该面上的应力分量就以沿着坐标轴正方向者为正，反之为负。如果一个面的外法线是朝着坐标轴的负方向，则该面上的一切应

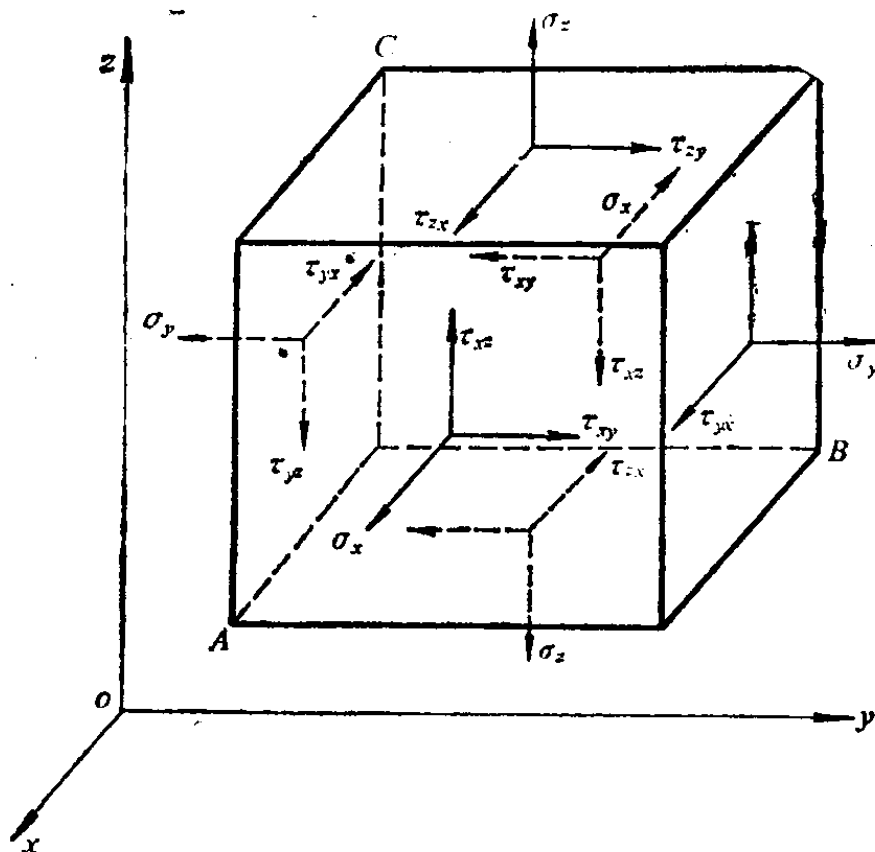


图1-1 应力分量

力分量就以沿着坐标轴的负方向者为正。图 1-1 中的 18 个应力分量都是正的。

六个剪应力有如下关系：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这就是剪应力互等定理，可由图 1-1 中微小平行六面体的平衡条件而得到。

2. 主应力及应力主方向

假定弹性体内任意一点 P 的六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 为已知，则可以求得经过 P 点的任意斜面上的应力。若经过 P 点的某一斜面上的剪应力等于零，则该斜面上的正应力称为 P 点的一个主应力，该斜面称为 P 点的一个应力主面，而斜面上的法线方向称为 P 点的一个应力主方向。经过 P 点取一微小四面体 $PQRS$ ，示于图 1-2。当平面 QRS 趋近于 P 点时，平面 QRS 上的应力就趋近于过 P 点而平行于 QRS 的斜面上的应力。

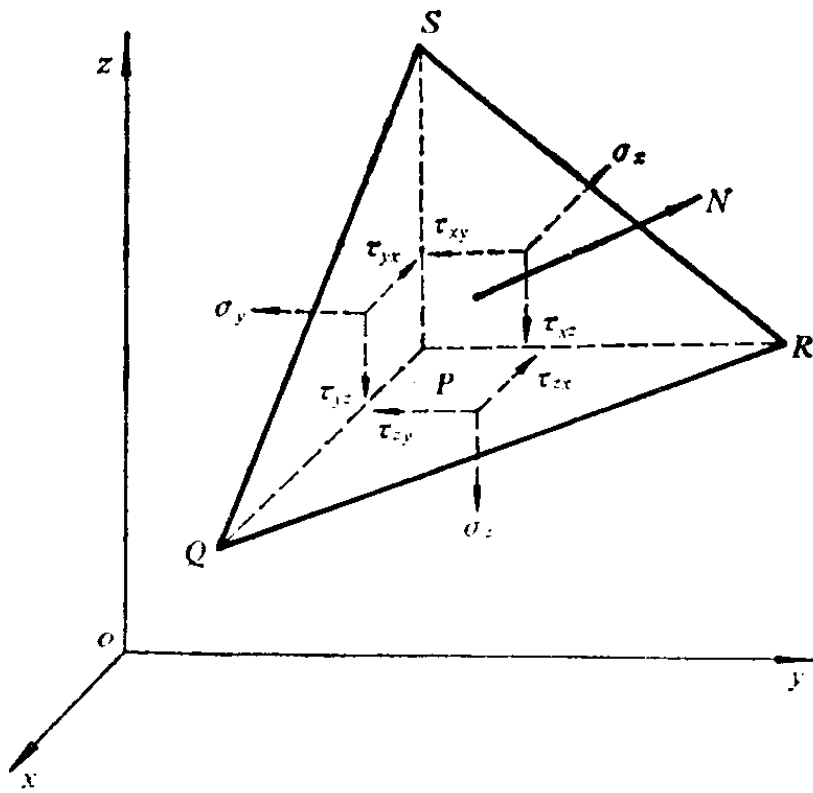


图1-2 倾斜面上的应力分量

设斜面QRS的外法线为N，而N的方向余弦为

$$\cos(N, x) = j, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n$$

令三角形QRS上的全应力在坐标轴上的投影为 X_N , Y_N , Z_N 。

由四面体的平衡条件，可得如下三个方程

$$\begin{aligned} X_N &= j\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}, \\ Y_N &= m\sigma_y + n\tau_{zy} + j\tau_{xy}, \\ Z_N &= n\sigma_z + j\tau_{xz} + m\tau_{yz}. \end{aligned} \quad (1-1)$$

假定在P点有一应力主面存在，于是该面上的剪应力等于零，而该面上的全应力就等于该面上的正应力，也即等于 σ 。这时，该面上的全应力在坐标轴上的投影为

$$X_N = j\sigma, \quad Y_N = m\sigma, \quad Z_N = n\sigma \quad (1-2)$$

将(1-2)式代入(1-1)式，并注意到 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 可得

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{zx}n &= 0, \\
 \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\
 \tau_{zx}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0.
 \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \quad (1-3)$$

解关于 σ 的特征方程(1-3)式,可得到三个根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,它们就是在 P 点的三个主应力,并按其大小规定为 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

3. 平面问题中的主应力

同三维问题一样,在平面问题中,若已知 P 点处的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 如图1-3,就可以求得经过 P 点的任一斜面上的正应力 σ_N 及剪应力 τ_N 。

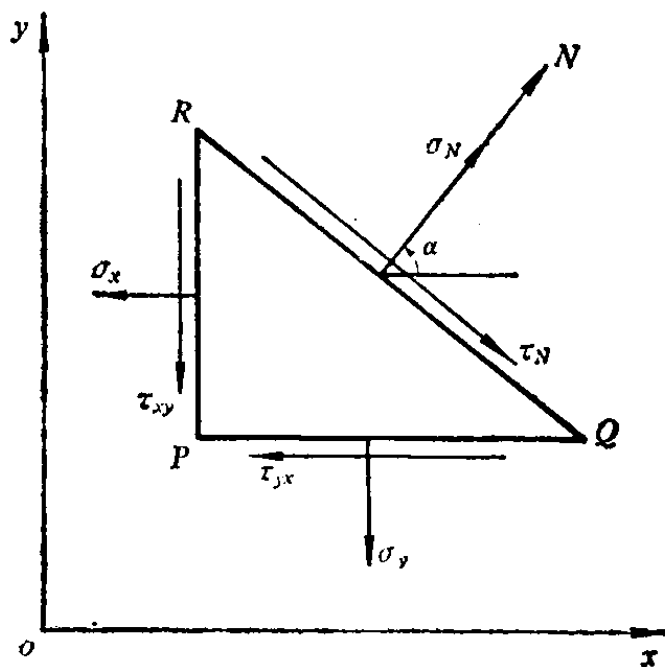


图1-3 平面应力分量

如果经过 P 点的某一斜面上的剪应力等于零,则该斜面上的正应力称为 P 点的一个主应力,而该斜面称为 P 点的一个应力主面,该斜面的法线方向称为 P 点的一个应力主方向。

假设在 P 点有一应力主面存在,于是该面上的剪应力等于零,该面上的主应力就等于该面上的正应力 σ 。根据图1-3所示的三角形的平衡条件,可得出关于 σ 的二次方程

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \quad (1-4)$$

解(1-4)式,得到在 xy 平面内 P 点的两个主应力

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-5)$$

若用 α 表示 σ_1 与 x 的夹角(以反时针转向为正),则 α 的值用下式计算

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) \quad (1-6)$$

而 σ_2 与 σ_1 垂直。

§1.2 位移及变形,几何方程.刚体位移

弹性体受外力以后,将发生位移和形变。以 u 、 v 、 w 表示弹性体内任一点的位移分量, ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 表示该点的应变分量,则两者之间满足下述几何关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1-7)$$

写成矩阵形式为

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1-8)$$

这就是几何方程。

由几何方程可见，当弹性体的三个位移分量完全确定时，六个应变分量是完全确定的。反过来，当应变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定，这是因为具有确定形状的物体，可以发生不同的刚体位移。为了说明这一点，在(1-7)式中令

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (1-9)$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

积分后有

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_y z - \omega_z y, \\ v &= v_0 + \omega_z x - \omega_x z, \\ w &= w_0 + \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (1-10)$$