数学奥林匹克竞赛丛书

李炯生

数学竞赛中的图论方法

中国科学技术大学出版社

数学奥林匹克竞赛丛书

数学竞赛中的图论方法

李炯生

中国科学技术大学出版社

1992·合肥

[皖]新登字 08 号

数学竞赛中的图论方法
李炯生
*
中国科学技术大学出版社出版
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
上海市印刷三厂排版
黄山市印刷总厂印刷
安徽省新华书店发行
*
开本 787×1092/32　印张 4.875　字数 107 千
1992 年 3 月第 1 版　1992 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—8000 册
ISBN7—312—00318—4/G·42

序

图论有着悠久的历史，它的起源和发展，与民间广泛流传的难题有密切的联系．例如，人们所公认的图论史上第一篇文章就是十八世纪著名数学家欧拉为解决当时在欧洲流传的哥尼斯堡问题而写的．十九世纪，英国著名数学家哈密尔顿提出的环游世界游戏对图论提出了一个迄今仍在研究的重要课题，等等．这是图论所具有的一大特点．图论的发展也受到了其他自然科学的深刻影响．本世纪50年代以来，随着计算机科学的兴起，离散的数学问题越来越重要，作为处理离散数学模型的一种工具，图论得到了蓬勃的发展．它在物理、化学、生物、计算机技术、电网络分析等许多领域中得到了广泛的应用．图论本身也取得了很大的进展．因此，图论受到了科技工作者的普遍关注．

正由于图论和民间流传的趣题难题有着难解难分的联系，同时又有广泛的应用，图论理所当然地成为数学竞赛的一个命题源．每年各种类型的数学竞赛总要出现有关图论的试题．例如，1989年第三十届国际数学竞赛的两试六道题中，就有一道图论题；同年，第十八届美国数学竞赛的五道题中也有一道图论题．足见各国数学竞赛对图论重视的程度．

1986年以来，中国科学技术大学数学系每年暑假都在安徽屯溪举办全国性中学数学教师暑假讲习班．作者曾经以数学竞赛中的图论方法为题作了系列讲演，介绍数学竞赛中所

遇到的基本概念、基本理论和基本的解题技巧，使中学数学教师对图论的基本理论和现状有所了解，以便在给学生辅导时能加进图论的内容．在此基础上，经过整理、加工和增补，便成了这本小册子．

这本小册子从历届各种类型数学竞赛的试题中精选出一批试题，用它们来讲述图论中一些最基本的概念，以及几个容易理解但又仍在研究的课题．相信具备高中数学知识的读者可以毫无困难地阅读全书．本书每节都有足够的例题并配有适量的习题，以帮助读者掌握有关的内容以及图论中典型的解题技巧．

图论是组合数学的一个分支，仍在蓬勃发展中．期望这本小册子，能够帮助读者对图论的理论和方法有所了解，不但能在数学竞赛中解决有关图论的试题，而且能对图论产生兴趣．

李炯生

1990年春

目　　次

1 图

顾名思义，图论就是图的理论，它的基本研究对象就是图. 这里所说的图，既不是几何里的几何图形，也不是美术课里的图，而是一个数学概念. 那么什么是图？平面上给定 n 个点 v_1，v_2，…，v_n，其中某些对点之间用边相连，得到的就是一个图，记作 G，v_1，v_2，…，v_n 叫做图 G 的顶点，其集合记作 $V(G)$. 图 G 所含的顶点个数 n 叫做图 G 的阶. 如果图 G 中顶点 v 和 u 之间连边，则所连的边记作 vu，并说顶点 v 和 u 相邻. 图 G 中所有的边构成的集合记作 $E(G)$. 例如，图 1(a)，(b)，(c)，(d)，(e)所给的都是图（其中图的顶点用小圆圈表示），它们的顶点数分别是 21，32，5，4，8，因而分别是 21，32，5，4，8 阶的图. 注意，定义一个图 G

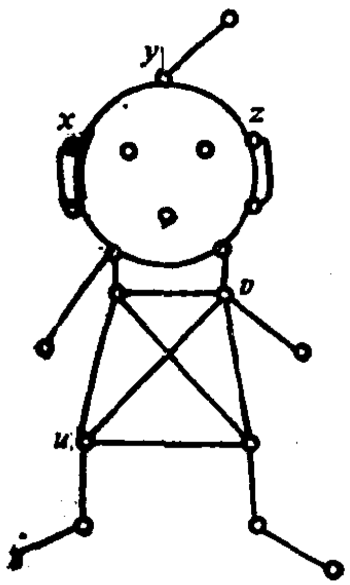


图 1(a)

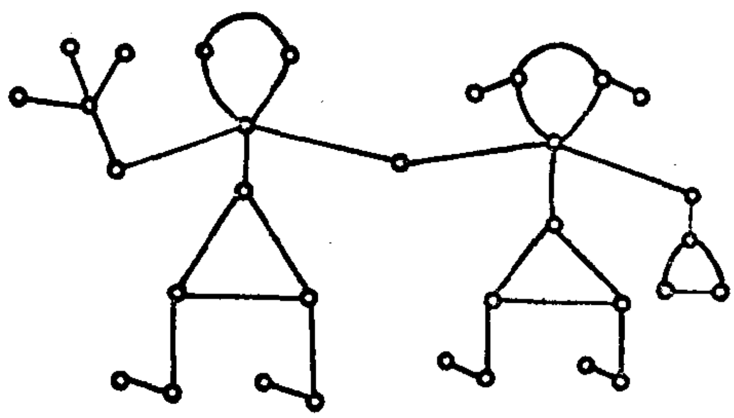


图 1(b)

有两个基本要素，一是图 G 有哪些顶点；二是图 G 的顶点之间是如何连边的，即如何相邻的．因此，如果两个顶点相邻，则连接这两个顶点的边可以是直线段，或者是曲线段．例如图1(a)中的边 xy 和 yz 为曲线边，而 uv 则是直线边．在有的图里，连接两个顶点的边不只一条，例如图 1(d) 中连接顶点 v_1 和 v_3 的边共有三条：e_1，e_2 和 e_3．这样的边叫做**重边**．含有重边的图叫做**重图**．图 1(a) 和图 1(d) 即是重图．在有的图里，有的边的两个端点相重合，这样的边叫做**环**．例如图 1(d) 中的边 e_4 即是一个环．无环、无重边的图叫做**简单图**．例如图 1(b)，(c)，(e)都是简单图，而图1(a)和(d)则不是．在一个图里，不连边的顶点叫做**孤立点**，图 1(d)中的顶点 v_4 即是一个孤立点．

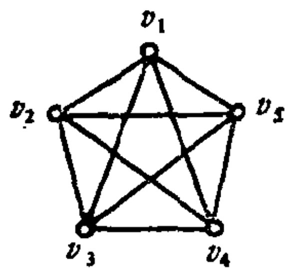


图 1(c)

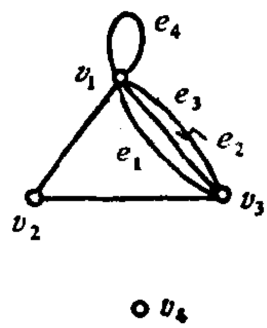


图 1(d)

$K_{3,5}$

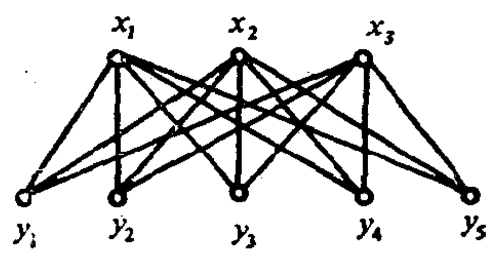


图 1 (e)

设 G 是一个图，v 是图 G 的一个顶点．图 G 中所有和 v 相邻的顶点集合记作 $N(v)$，它叫做**顶点 v 的邻域**．所有以 v 为一端点的边数叫做顶点 v 的**度**，记作 $d(v)$．例如，图1(a)的顶点 x，y 和 z 的度分别是 3,3 和 3，图 1(d)的顶点 v_1 的度为 6．注意，环 e_4 的两个端点都是 v_1，所以计入 v_1 的度两次．很明显，对简单图 G 中任意顶点 v，恒有 $0\leqslant d(v)\leqslant n-1$．

设 G 是 n 阶简单图，如果 G 的任意两个顶点都相邻，则 G 叫做 n **阶完全图**，记作 K_n. 例如，图 1(c) 即是 5 阶完全图 K_5. 很明显，K_n 的每个顶点的度都是 $n-1$. 顶点的度都是 k 的图叫做 k **正则图**，简称为正则图. 0 正则图中不含边，它也叫做**零图**.

对简单图 G，它的顶点集合 $V(G)$ 可以分划为两个子集 X 和 Y，使得 X 的顶点之间以及 Y 的顶点之间都不相邻，而每条边的端点，一个在 X 中，另一个在 Y 中，则图 G 叫做**二部分图**，或者偶图. 例如，图1(e)即是一个二部分图.

设 G 是二部分图，其顶点集合 $V(G)$ 分划为 X 和 Y，使得 X 中每个顶点和 Y 的所有顶点都相邻，而 X 的顶点之间以及 Y 的顶点之间都不相邻，则 G 叫做**完全二部分图**. 如果 X 与 Y 所含顶点个数分别是 $|X|=n$，$|Y|=m$，则记完全二部分图 G 为 $K_{n,m}$. 例如，图1(e)即是完全二部分图 $K_{3,5}$.

图的概念是从客观世界中抽象出来的. 它提供了一种数学模型. 在现实生活中可以找到许多图的例子. 例如，在一个舞会上，参加舞会的任意两个人，要么相互认识，要么互不认识. 要描述参加舞会的人们之间的相互认识关系就可以用图的概念. 把参加舞会的人视为顶点，其集合记为 V. 对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 所代表的两个人相互认识，则在顶点 u 和 v 之间连一条边，如果 u 和 v 所代表的两个人互不认识，则 u 和 v 之间不连边. 这样便得到一个图. 这个图可以叫做友谊图.

在集合论里，对于给定一个集合 V，一般并不关心集合 V 中元素之间是否有什么联系. 但是在客观世界里，集合 V 中的元素之间总是存在某种关系. 如果集合 V 中的元素之间存在一种关系 φ，使得集合 V 中任意两个元素之间要么具有

关系 φ，要么不具有关系 φ，二者必居其一，且只居其一，则关系 φ 叫做集合 V 的一个**二元关系**．例如，上面所说的舞会上士男倩女们之间的相互认识关系即是一种二元关系．

集合 V 的二元关系 φ 可以用图来表示．把 V 的元素视为顶点，对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 之间具有关系 φ，则让 u 和 v 相邻，否则 u 和 v 不相邻．这样便得到一个图 G．图 G 叫做**集合 V 的二元关系 φ 的实现**．当然，让 u 和 v 相邻，可以在 u 和 v 之间连直线边，也可以连曲线边，得到的图仍然是二元关系的一个实现．所以，集合 V 的二元关系 φ 可以具有不同的实现．尽管如此，由二元关系 φ 得到的图都是关系 φ 的描述．因此，我们说，在定义一个图时有两个基本要素，一是图的顶点，另一是顶点之间是否相邻．图的顶点以及顶点之间的相邻关系确定了，一个图也就确定了．

熟悉了图的概念之后，就可利用它来解数学竞赛中的试题．

例 1 n 人聚会，$n>3$，其中至少有一人没有和其他所有的人握手．聚会中可能和每个人都握手的人数之最大值是多少？

解 先把问题翻译成图论的语言．把参加聚会的人视为顶点，其集合记做 V．对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 所表示的两个人握了手，则令 u 和 v 相邻，否则 u 和 v 不相邻，得到的 n 阶简单图记作 G．已知条件是，参加聚会的人中至少有一人，他至少和一个参加聚会的人不握手．翻译为图论语言即为，图 G 中至少有一个顶点 u，使得 $0\leqslant d(u)\leqslant n-2$．这表明，图 G 不是完全图．要求的是，聚会中和其他所有的人都握手的人数的最大值．用图论的话说即是，求图 G 中度为 $n-1$ 的顶点个数之最大值．于是问题的图论形式是：求所有

n 阶非完全的简单图 G 中度为 $n-1$ 的顶点个数之最大值 m.

由于图 G 是非完全的，所以至少有两个顶点 u 和 v 是不相邻的. 因此 $d(u) \leqslant n-2$, $d(v) \leqslant n-2$. 这表明，$m \leqslant n-2$.

取一个 $n-2$ 阶完全图 K_{n-2}，另取两个顶点 u 和 v. 令 K_{n-2} 中每个顶点都和 u 与 v 相邻，而 u 与 v 不相邻，得到的图记作 $K_{n-2}+u+v$. 很明显，图 $K_{n-2}+u+v$ 不是完全图，而且 $d(u)=d(v)=n-2$，并且对除 u, v 外任意的顶点 x 均有 $d(x)=n-1$. 这表明，$m=n-2$.

再回到原问题上便得到，聚会中和每个人都握手的人数之最大值是 $n-2$.

例 2 有一个团体，由 1982 个人组成，其中任意四个人中都至少有一个人认识其他三个人. 问该团体中认识其他所有的人的成员最少有多少？

解 先把问题翻译为图论语言. 把该团体的成员视为顶点，其集合记作 V. 对于 u, $v \in V$，如果 u 和 v 所表示的两名成员彼此认识，则令 u 和 v 相邻，否则令 u 和 v 不相邻. 得到的是一个 1982 阶简单图 G. 已知条件是，该团体的任意四个人中都至少有一个人认识其他三个人. 用图论的话说就是，图 G 的任意四个顶点中都至少有一个顶点和其他三个顶点相邻. 要求的是，该团体中认识其他所有的人的成员的最小个数，用图论的话说即是，求图 G 中度为 1981 的顶点个数之最小值 m. 于是，原问题的图论形式即是，如果1982阶简单图 G 的任意四个顶点中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻，则 G 中至少有多少个度为 1981 的顶点？下面来解这个问题.

当图 G 为完全图时，图 G 的每个顶点的度都是1981. 所以有1982个度为1981的顶点.

当图 G 是非完全图时，图 G 中必有两个不相邻的顶点 u 和 v，显然有 $d(u)\leqslant 1980$，$d(v)\leqslant 1980$. 因此图 G 中度为1981 的顶点之个数 $l\leqslant 1980$. 如果图 G 中除 u 和 v 外另有两个顶点 x 和 y 不相邻，则 u，v，x 和 y 中不存在和其他三个顶点都相邻的顶点，与图 G 所具有的性质矛盾. 因此图 G 中除 u 和 v 外任意两个顶点都相邻. 这说明，对 G 中 u 和 v 之外的任意顶点 x，均有 $d(x)\geqslant 1979$. 如果 G 中除 v 与 u 外的任意顶点 x 都和 u 与 v 相邻，则 $d(x)=1981$. 此时 G 中度为1981 的顶点个数为1980. 设 G 中除 u 和 v 外有个顶点 x 和 u 与 v 不都相邻，则由题意，G 中除 u, v 和 x 之外的任意顶点 y 和 u，v 与 x 都相邻. 因此 $d(u)\leqslant 1980$, $d(v)\leqslant 1980$, $d(x)\leqslant 1980$, 且 $d(y)=1981$. 所以 G 中度为1981的顶点个数为1979. 这表明，如果1982阶简单图 G 中任意四个顶点中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻，则 G 中至少有1979 个度为 1981 的顶点.

再回到原问题，即得：该团体中认识其他所有的人的成员个数最少是1979.

注 如果例 2 中团体的成员人数改为 n，其他条件不变，则结论为，该团体中至少有 $n-3$ 个人认识其他所有的人.

应当指出，应用图的概念来解数学竞赛试题，其关键在于将原来的问题正确翻译为图论形式. 要正确地完成这一步，必须熟练地掌握上面所介绍的图论术语. 这和在中译英、英译中时必须熟练掌握大量英语词汇相似.

例 3 在某个团体的所有成员中，任意两个相互认识的人都没有公共的熟人，而任意两个互不认识的人都恰有两个公共熟人. 证明，该团体中每个人所认识的人数都相同.

证 和上面一样，先把所要证明的命题翻译成图论语言.

将该团体的成员视为顶点，其集合记作 V. 对于 $u, v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两名成员相互认识时令 u 和 v 相邻. 这样便得到一个简单图 G. 已知条件“任意两个相互认识的人都没有公共熟人，而任意两个互不认识的人都恰有两个公共熟人”的图论形式是：图 G 中任意两个相邻的顶点都没有公共邻点(即和这两个顶点都相邻的顶点)，而任意两个不相邻的顶点都恰有两个公共邻点. 所要证明的结论“该团体中每个人所认识的人数都相同”的图论形式是，图 G 的所有顶点的度都相等，换句话说，要证的是，图 G 是正则图. 于是,原命题的图论形式就是：证明,如果简单图 G 的任意两个相邻顶点都没有公共邻点，而任意两个不相邻顶点都恰有两个公共邻点，则图 G 是正则的. 现在来证明这个结论.

设 u 和 v 相邻，且设 $x\in N(u)\setminus\{v\}$. 由已知条件，相邻的顶点 u 和 v 没有公共邻点，所以 x 和 v 不相邻. 由已知条件，x 和 v 有两个公共邻点，其中 u 是它们的一个公共邻点，另一个记作 y (图2). 很明显，$y\in N(v)\setminus\{u\}$. 令 x 和 y 相对应，便得到集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 到集合 $N(v)\setminus\{u\}$ 的一个映射 φ. 对于 $N(u)\setminus\{v\}$ 中不同的顶点 x 和 z，如果

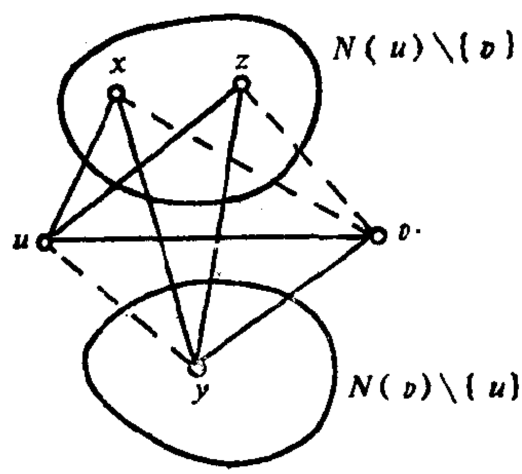


图 2

$\varphi(x)=\varphi(z)=y$，则由已知条件可知，u 和 y 不相邻. 而 u 和 y 具有三个公共邻点 x，z 和 v，和已知条件矛盾. 因此，对 $N(u)\setminus\{v\}$ 中不同的顶点，它们在映射 φ 下的象也不同. 所以映射 φ 是单射. 另一方面，对于任意 $y\in N(v)\setminus\{u\}$，由已知

条件可知，y 和 u 不相邻．于是 y 和 u 恰有两个公共邻点，其中之一为 v，另一个设为 x．很明显，$x\in N(u)\setminus\{v\}$，并且在上述映射 φ 下，x 和 y 相对应．这就证明，映射 φ 是满射．由于 φ 既是单射，又是满射，所以 φ 是双射．换句话说，集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 和 $N(v)\setminus\{u\}$ 之间存在一个一一对应．因此它们所含顶点个数相同，从而集合 $N(u)$ 和 $N(v)$ 所含的顶点个数相同．也就是说，相邻的顶点 u 和 v 的度相同．现在设 u 和 v 不相邻，则由已知条件，u 和 v 具有公共邻点 w．由上述证明，u 和 w 的度相同，而 w 和 v 的度相同，从而 u 和 v 的度相同．这就证明，G 图是正则的．

注 1 例 3 所说的命题的图论形式也可以用下面的方法证明．仍如图 2，设 G 的顶点 u 和 v 相邻．考虑连接集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点和 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点之间的边数．对每个 $x\in N)u)\setminus\{v\}$，由于 x 和 v 不相邻，所以由已知条件，x 恰和 $N(v)\setminus\{u\}$ 中一个顶点相邻，即由 x 到 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点恰连有一条边．因此，集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点和 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点之间所连的边数应为 $|N(u)\setminus\{v\}|$，这里 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数．同理，集合 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点和 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点之间所连的边数为 $|N(v)\setminus\{v\}|$．由此得到，$|N(u)\setminus\{v\}|=|N(v)\setminus\{u\}|$．这表明，$d(u)=|N(u)|=|N(v)|=d(v)$．所以 G 中相邻的顶点具有相同的度．对不相邻的顶点，证明和例 3 给出的相同．

注 2 例 3 和**强正则图**有关．设简单图 G 是 k 正则的，并且 G 中任意两个相邻的顶点都恰有 λ 个公共邻点，任意两个不相邻的顶点都恰有 μ 个公共邻点，则图 G 叫做 (k,λ,μ)-**强正则的**，简称为强正则的．n 阶强正则图 G 的参数 k，λ，μ 满足许多恒等式，例如有

$$k(k-\lambda-1)=(n-1-k)\mu. \tag{1}$$

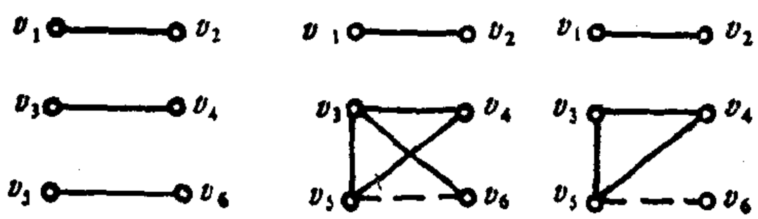
强正则图是一类具有重要意义的图，它是图论研究中的一个重要对象，其中有许多问题迄今尚未解决. 例如，对于什么样的参数 k，λ，μ，(k,λ,μ)-强正则图一定存在，即是令人注目的尚待研究的问题. 最简单情形是 $\lambda=0$，$\mu=1$. 对此已经证明，如果 $(k,0,1)$-强正则图 G 存在，则 k 只能是 2，3，7，或 57. 当 k 为 2，3，或 7 时，$(k,0,1)$-强正则图存在而且唯一. 当 $k=57$ 时，由式(1)可以求得 $n=3250$. 但是，3250 级 $(57,0,1)$-强正则图是否存在，至今仍是一个未加解决的问题. 我国著名统计学家张里千教授对强正则图曾经做出重要贡献，他在 50 年代末期到 60 年代初期发表的几篇关于区组设计的论文至今仍被专家们广泛引用，显示了这些文章的强大生命力. 对强正则图这一课题有兴趣的读者可以参考著名图论学家拜内克(L. W. Beineke)与威尔逊(R. J. Wilson)合编的《图论课题选》(Selected Topics in Graph Theory)一书中由英国著名代数组合学家卡默隆(P. J. Cameron)撰写的“强正则图”这一章.

例 4 有一工厂，用六种颜色的纱生产双色布. 在生产过程中，每种颜色的纱至少和三种其他颜色的纱搭配. 证明，在生产的双色布中，一定可以找出三种不同的双色布，它们含有所有六种颜色.

证 先把所要证明的命题翻译成图论语言. 用六个顶点表示六种颜色的纱，其集合记作 V. 对于 $u,v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两种颜色的纱在生产过程中搭配生产出一种双色布时，令 u 和 v 相邻，得到的是 6 阶简单图 G. 已知条件是，每种颜色的纱至少和三种其他颜色的纱搭配. 也就是说，图 G 中每个顶点都至少和其他三个顶点相邻. 换句话说，对每个 $u\in V$，均有 $d(u)\geqslant 3$. 要证明的是，图 G 中含有三条

边（即三种不同的双色布），其中任意两条边都没有公共端点（即任意两种不同的双色布都没有相同颜色的纱，也就是说，这三种不同的双色布包含所有六种颜色的纱）．于是，所要证明的命题的图论形式是，如果 6 阶图 G 中每个顶点的度至少为3，则 G 含有三条两两无公共端点的边．现在证明这个命题．

因为图 G 中每个顶点的度至少为 3，所以图 G 不是零图，即图 G 含有边．设图 G 中顶点 v_1 和 v_2 相邻．再取顶点 $v_3\in V$，$v_3\neq v_1$，v_2．因为 $d(v_3)\geqslant 3$，所以 v_3 和 G 中 v_1，v_2 外的某个顶点 v_4 相邻．图 G 中尚余下两个顶点 v_5 和 v_6．如果 v_5 和 v_6 相邻，则 v_1v_2，v_3v_4 和 v_5v_6 即是所需要的三条边（图



(a)　　(b)　　(c)

图　3

3(a)）．下面设 v_5 和 v_6 不相邻（图3(b)，其中虚线表示不相邻）．由于 $d(v_5)\geqslant 3$，$d(v_6)\geqslant 3$，所以图 G 中集合 $\{v_5, v_6\}$ 的顶点与$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$的顶点之间至少有六条边．这六条边至少有三条边，其中每条边的一个端点在集合 $\{v_1, v_2\}$或$\{v_3, v_4\}$ 中．不妨设这三条边中每条边都有一个端点在集合 $\{v_3, v_4\}$ 中．而这三条边都是以 v_5 或 v_6 为一端点的．不妨设其中有两条边是以 v_5 为一端点的．于是，另一条边必以v_6为一端点．如果这条边为 v_3v_6（图 3(c)），则v_1v_2，v_3v_6 和 v_4v_5 即是所需要的三条边；如果为 v_4v_6，则 v_1v_2，v_3v_5 和 v_4v_6即为所求三条边．

注 从例 3 和例 4 可以看出，当我们把具体问题翻译成图论问题之后，我们便可以将图在平面上画出来．然后利用所画的图帮助我们进行分析和推理．这正是应用图论来解数学竞赛题的长处，很有点平面几何的味道．前面提到的著名代数组合学家卡默隆曾经说过，从某种意义上讲，图论实际上是一种几何学．这话不无道理．

例 5 有一个参观团，其中任意四个成员中总有一名成员，原先见过其他三名成员．证明，在任意四名成员中，总有一名成员，原先见过参观团的所有成员．

证 参观团的成员用顶点表示，其集合记作 V．对于 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两名成员原先见过面时令 u 和 v 相邻，得到的图记作 G．已知条件是，图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和其他三个顶点都相邻．欲证的是，图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和 G 的其他所有顶点都相邻．现在证明这个图论命题．

用反证法．设命题不成立，则图 G 中具有四个顶点 x，y，z，w，它们和图 G 的其他所有顶点不都相邻．于是存在四个顶点 x'，y'，z'，w'，它们依次与 x，y，z，w 不相邻．由已知条件，顶点 x，y，z，w 中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻．不妨设这个顶点为 x（图 4）．因此 x' 不是 y，z，

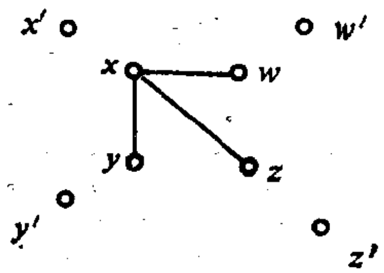


图 4

w 中的一个，且 y' 与 x 是不同的两个顶点．如果 y' 与 x' 不同，则 x，y，x'，y' 中没有一个顶点和其他三个顶点都相邻，和已知条件矛盾．所以 x' 和 y' 重合．同理可证，x' 和 z' 重合．于是 x' 和 y，z，w 都不相邻，和已知条件矛盾．这就证