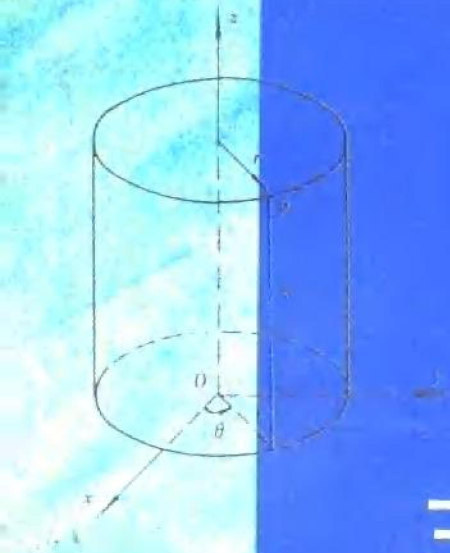
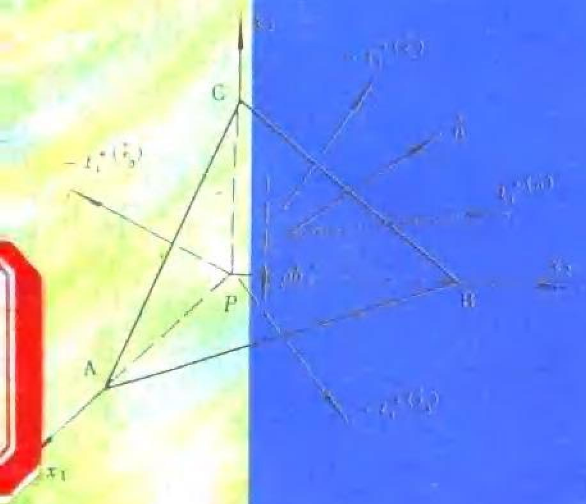
钱曙复　陆林生　编著



三维欧氏空间张量分析



同 济 大 学 出 版 社

三维欧氏空间张量分析

钱曙复　陆林生　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是张量分析的入门书，着重介绍三维欧氏空间中张量的实用计算，内容包括矢量、张量的基本概念和代数运算；笛卡尔张量的实用计算；张量场论及其在主要物理标架下的表达式；最后介绍了张量分析在线弹性理论中的应用。各章附有习题，书末附有习题答案。

本书可作为应用数学、力学专业学生以及有关工科专业本科生和研究生的教材，也可供有关工程技术人员参考。

责任编辑：许纪森

封面设计：陈益平

三维欧氏空间张量分析

钱曙复　陆林生　编著

同济大学出版社出版

（上海四平路 1239 号 邮编 200092）

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：6.125　字数：170 千字

1997 年 4 月 第 1 版　　1997 年 4 月 第 1 次印刷

印数：1—1000　　定价：5.70 元

ISBN 7-5608-1737-8/O·148

前　　言

近30年来,张量分析已经成为现代科学技术中不可缺少的一种数学工具。许多工程技术人员都产生了掌握张量分析这一数学工具的愿望。因此在当代高等学校中,张量已不仅是数学专业的教学内容,并已成为理工科学生的学习对象。本书旨在成为数学、力学专业学生及广大工程技术人员学习张量分析的入门书。

张量概念是在19世纪由高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)、克里斯托弗尔(Christoffel)等人在发展微分几何过程中引入的。在此基础上,1887～1901年间,李奇(Ricci)和他的学生勒维·奇维塔(Levi Civita)发展了张量分析。虽然他们也曾介绍过张量的某些应用,但很少有人注意。直到1916年爱因斯坦(Einstein)用黎曼几何与张量分析来阐述他的广义相对论,才给这一纯数学理论以丰富的物理内容,张量分析才被重视起来并且发展成为一个独立的数学分支。当前,张量分析已渗透到理论物理、连续介质力学以及其他一些边缘学科中去,特别在连续介质力学的近代表述中,无不采用张量为其数学工具,以至在今天,不熟悉张量分析的人在阅读连续介质力学文献时将会遇到困难。

在纯数学范围内,最一般的张量概念可以在微分流形上引入,且其维数可以是无限的,内容非常抽象,很难被初学者接受。本书仅局限于在最常用、最简单的三维欧氏空间中讨论。从实用观点来看,我们生活在物理空间中,它就可以用三维欧氏空间作最佳近似。虽然很容易推广到 n 维欧氏空间,但我们觉得没有这个必要,因为在实际应用中,n 维的空间常常不再是欧氏空间了。本书着眼于三维欧氏空间,既是实际问题中常用的,也是张量分析的基础,将为推广到流形上讨论张量打下坚实的基础。

张量的定义方式是多种多样的，常见的有如下几种：从映射的观点定义张量；用多重线性函数定义张量，如二阶张量是双线性函数，三阶张量是三重线性函数，等等；用指标记法定义张量；用抽象记法（或称不变性记法、绝对记法、实体记法）的并矢式定义张量。本书同时采用抽象记法与指标记法定义张量。虽然并矢的引入比较抽象，但可以给读者留下这样一个深刻的印象：张量是个与坐标系无关的物理量或几何量，它与向量一样，在不同坐标下，其分量是不相同的。然后再用指标记法定义张量，以便实际操作。波兰著名数学家 W. Urbanowski 说得好：指标记法固然好，但抽象记法更佳。事实上，用张量表示有关定理、公式时，用抽象记法既简洁又深刻。

本书是作者自 1983 年始开设连续介质力学课程时作为数学工具介绍的，到 1988 年成为一本独立的讲义。在出版时，接受了吴家龙教授的有益建议，增加了张量分析在线弹性理论中的应用这一章。在此，谨对吴家龙教授、陆章基副教授对本书的详细审阅表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中的缺点错误在所难免，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1995 年 12 月 29 日

目　　录

第一章　矢量和张量

§1-1　引言

在数学和物理中遇到的一些几何量和物理量都是与坐标系的取法无关的量。其中有一些比较简单的量，如平面图形的面积，有限物体的体积，质量密度和温度，它们都可用一个数来表示，通常把它们叫做标量。我们还处理过比标量复杂一些的量，如力、速度等，可以用三维空间中标明方向的线段来表示这些物理量。数学上把这种量叫做矢量（或向量），它们服从平行四边形法则。习惯上常常用粗体小写字母，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 等表示矢量。本书中把这种表达式称为不变性记法（或称抽象记法、绝对记法或实体记法等）。所谓“不变”一词，意味着与坐标系的取法无关，也就是说，它并不因坐标系的改变而发生变化。

大家知道，在具体处理问题时，常常需要选定坐标系，在普通的三维空间（即三维欧氏空间）中，通常采用正交笛卡尔坐标系 $Oxyz$，于是每个矢量可以写成 3 个分矢量之和，例如

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴正方向的单位矢量，a_x、a_y、a_z 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，在本书中把它们称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于坐标系 $Oxyz$ 的分量，或简称分量。

显然，矢量的分量与坐标系有关，当取不同的坐标系时将得到不同的分量。虽然如此，同一矢量在不同坐标系下取得的不同分量之间必然可以通过坐标变换关系而找到它们之间的联系。于是，我们也可以用满足一定坐标变换关系的三个有序数来定义矢

量,每个数称为矢量的分量。

随着科学技术的发展,遇到了比矢量更为复杂的几何量和物理量,这就是本书中重点介绍的张量。自从爱因斯坦在1916年发表广义相对论的著名论文以来,张量分析在物理学中占有突出的地位。自本世纪40年代开始,由于理性力学的兴起,张量分析逐步成为研究连续介质力学的有效工具。时至今日,以至不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是相当困难的。由此可见,张量分析在数学领域内有其一席之地,更重要的是它在现代物理和力学的研究中已成为一种不可缺少的重要工具。

张量,作为一个数学实体,是矢量的发展和推广。张量也有不变性记法和分量记法(常常称之为指标记法)两种表示法。众所周知,矢量可以用一个有方向的线段简单明了地表示出来,可是对于张量却办不到,也就是说单纯从不变性记法来认识张量是有困难的。那么怎样来表达一个张量呢?我们可以借助于坐标系,把张量的不变性记法用形式上有点像矢量式(1-1)的方式来表示。在本书中,这将作为张量的定义。于是也得到了一组有序数,称之为张量的分量。显然,与矢量的分量一样,在不同的坐标系下,张量的分量也是不相同的,同一张量在不同坐标系下所取得的不同分量之间也可以通过坐标变换关系而找到它们之间的联系。于是,我们同样可以用满足一定坐标变换关系的一组有序数来定义张量,这种定义法称为指标记法。一旦定义了 n 阶张量后,我们立即发现标量和矢量也属于张量的范畴,分别代表零阶张量和一阶张量。

由于张量和矢量密切相关,而且又是矢量的发展和推广,因此有必要对矢量作进一步的讨论,以使矢量的表达方式与张量相一致。

§ 1-2 矢量的点积　斜角直线坐标系的基和对偶基

设有两个非零矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{u}$，根据点积的定义

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{u}|\cos\alpha \tag{1-2}$$

(其中$|\boldsymbol{p}|$和$|\boldsymbol{u}|$分别代表矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的模，α 是它们之间的夹角)，其结果是一个与坐标系无关的标量。

现在建立斜角直线坐标系。为直观起见，首先讨论二维情形。设 Ox^1x^2 为平面斜角坐标系(图 1-1 所示)，其中 x 右上角的数字代表上标，而不是幂次，以区别不同的坐标(本书中字母右上角的数字或小字母，除特别声明外，总代表上标，幂次用括号括出后表示，例如$(x^1)^2$ 表示 x^1 的平方幂)，两个坐标轴间的夹角为 θ。若选取沿两坐标 x^1 及 x^2 轴正向的矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 及 $\boldsymbol{g}_2$ 作为一组参照标架(即参考矢量)，则 $\boldsymbol{g}_1$ 及 $\boldsymbol{g}_2$ 就构成坐标系的一组基。

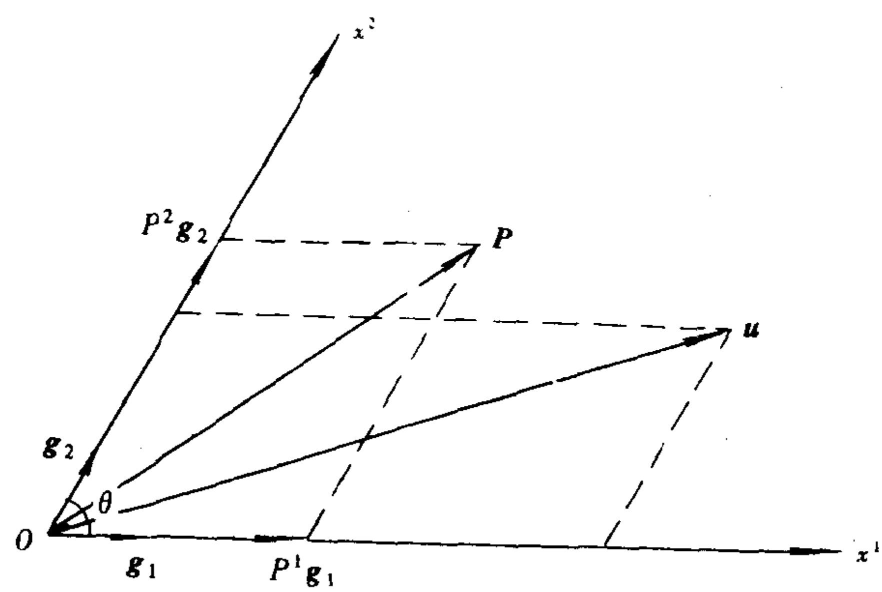


图 1-1

由于现在所选择的 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 是斜角坐标系下的一组一般的基矢量，因此当我们用平行四边形法则将平面上任一个矢量作分解，则可得

$$\boldsymbol{p}=p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2 \tag{1-3}$$

其中 $p^1\boldsymbol{g}_1$ 和 $p^2\boldsymbol{g}_2$ 分别是沿 x^1 轴和 x^2 轴矢量 $\boldsymbol{p}$ 的分矢量，其尺度分别为 $p^1|\boldsymbol{g}_1|$ 和 $p^2|\boldsymbol{g}_2|$。若对另一矢量 $\boldsymbol{u}$ 作同样分解为

$$\boldsymbol{u}=u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2$$

则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的点积是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}&=(p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2)\cdot(u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2)\\&=p^1\boldsymbol{g}_1\cdot(u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2)+p^2\boldsymbol{g}_2\cdot(u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2)\\&=p^1(u^1\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2)+p^2(u^1\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_2)\\&=p^1(u^1|\boldsymbol{g}_1|^2+u^2|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta)\\&\quad+p^2(u^1|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta+u^2|\boldsymbol{g}_2|)\end{aligned} \tag{1-4a}$$

或者写成[1]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}&=u^1\boldsymbol{g}_1\cdot(p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2)+u^2\boldsymbol{g}_2\cdot(p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2)\\&=u^1(p^1|\boldsymbol{g}_1|^2+p^2|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta)\\&\quad+u^2(p^1|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta+p^2|\boldsymbol{g}_2|^2)\end{aligned} \tag{1-4b}$$

式(1-4a)和式(1-4b)都能写成

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=p^1u^1|\boldsymbol{g}_1|^2+p^2u^2|\boldsymbol{g}_2|^2+(p^1u^2+p^2u^1)|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta \tag{1-4c}$$

以上式子都给出了在斜角坐标系中两个矢量点积的结果。显然，在斜角坐标系的一般基矢量下表示的点积与我们通常所熟悉的直角坐标系下所表示点积形式有着很大的区别。但是，矢量的点积

---

〔1〕 根据张量分析的特点，一个式子常常有几种等价的表达式，所以有式($x-xa$)，($x-xb$)，甚至有式($x-xc$)等表达式。以后，文中如果提到式($x-x$)时，就是泛指所有等价的表达式。

是与坐标系的选择无关的标量，式(1-4)给人一种错觉，好像矢量的点积应与坐标系选取有关，而且点积的表示形式也变得复杂了。为此，我们将针对这些问题作深入的讨论。

针对所选定的参照标架 $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$，我们引入另一组矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$，它们分别与 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_1$ 正交，即 $\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=0$, $\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1=0$，并使 $\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2=1$（如图 1-2 所示），统一写成如下条件

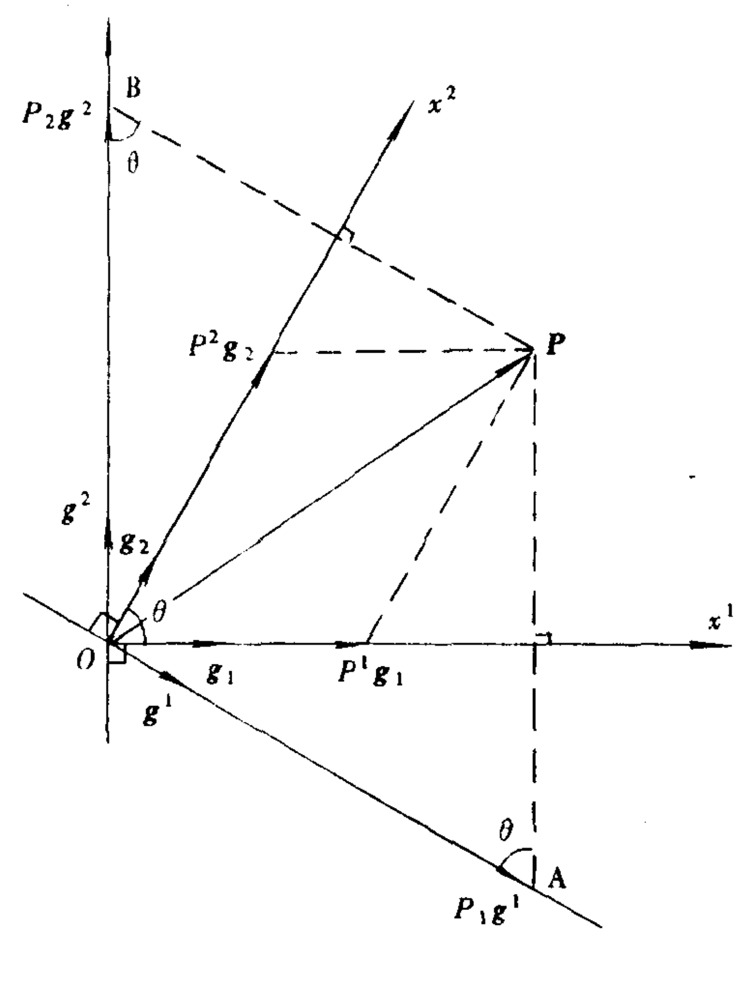


图 1-2

$$\boldsymbol{g}^\alpha\cdot\boldsymbol{g}_\beta=\delta^\alpha_\beta \tag{1-5}$$

其中 δ^α_β 称为 Kronecker δ，其值为

$$\delta^\alpha_\beta=\begin{cases}1, 当\ \alpha=\beta\\0, 当\ \alpha\neq\beta\end{cases}$$

对于二维问题,我们总是用希腊字母(如 α、β、ν 等)作为字母指标,其取值范围是 2,这里 α、$\beta=1,2$。由式(1-5)可以根据基矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 唯一地确定 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$,我们称 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 为**对偶基**[1],它们是坐标系的另一组参照标架。

在对偶基 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 下,将矢量 $\boldsymbol{p}$ 按平行四边形法则作分解为

$$\boldsymbol{p}=p_1\boldsymbol{g}^1+p_2\boldsymbol{g}^2 \tag{1-6}$$

我们把矢量 $\boldsymbol{p}$ 在基矢量 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$ 下分解(即式(1-3))所得的分量 p^1,p^2 称为矢量 $\boldsymbol{p}$ 的逆变分量(或反变分量);而矢量 $\boldsymbol{p}$ 在对偶基 $\boldsymbol{g}^1$,$\boldsymbol{g}^2$ 下分解(即式(1-6))所得的分量 p_1,p_2 称为矢量 $\boldsymbol{p}$ 的协变分量(或共变分量)。

当我们用式(1-6)分别点乘 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$,即得 $\boldsymbol{p}$ 的协变分量 $p_1=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_1$, $p_2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_2$,这样我们可把 $\boldsymbol{p}$ 的协变分量用逆变分量表示为

$$p_1=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_1=(p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2)\cdot\boldsymbol{g}_1=p^1|\boldsymbol{g}_1|^2+p^2|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta$$

$$p_2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_2=(p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2)\cdot\boldsymbol{g}_2=p^1|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\theta+p^2|\boldsymbol{g}_2|^2$$

因此,式(1-4a)和式(1-4b)的点积表示式即可写成

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}=p^1u_1+p^2u_2=p_1u^1+p_2u^2 \tag{1-7}$$

不难看出,式(1-7)与斜角坐标系的取法无关。

现在把上述做法推广到三维情形。设 $Ox^1x^2x^3$ 为三维空间斜角坐标系,选取沿各坐标轴正向的矢量 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$,$\boldsymbol{g}_3$(它们不一定是单位矢量)组成**基**矢量,在此组基矢量下,任一矢量 $\boldsymbol{p}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{p}=p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2+p^3\boldsymbol{g}_3=\sum_{i=1}^{3}p^i\boldsymbol{g}_i \tag{1-8}$$

式中 p^1,p^2,p^3 就是矢量 $\boldsymbol{p}$ 的逆变分量。

针对所选定的参照标架 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$,$\boldsymbol{g}_3$,引入另一组参照标架 $\boldsymbol{g}^1$,$\boldsymbol{g}^2$,$\boldsymbol{g}^3$,使它们满足关系式

[1] 有的书上把基 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$ 称为协变基,而把对偶基 $\boldsymbol{g}^1$,$\boldsymbol{g}^2$ 称为逆变基。

$$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1-9}$$

式中 δ^i_j 也是 Kronecker δ，对三维情形，我们总是用拉丁字母（如 i，j，k 等）作为字母指标，其取值范围是 3，这里 $i,j=1,2,3$。满足式（1-9）的矢量组 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 称为**对偶基**。在对偶基矢量下，任一矢量 $\boldsymbol{p}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{p}=p_1\boldsymbol{g}^1+p_2\boldsymbol{g}^2+p_3\boldsymbol{g}^3=\sum_{i=1}^{3}p_i\boldsymbol{g}^i \tag{1-10}$$

式中 p_1,p_2,p_3 就称为矢量 $\boldsymbol{p}$ 的协变分量。显然有

$$p_1=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_1 \qquad p_2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_2 \qquad p_3=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_3 \tag{1-11}$$

$$p^1=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^1 \qquad p^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^2 \qquad p^3=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^3 \tag{1-12}$$

式（1-11）说明协变分量是矢量 $\boldsymbol{p}$ 与基矢量的点积，式（1-12）说明逆变分量是矢量 $\boldsymbol{p}$ 与对偶基的点积（因为基和对偶基一般不是单位矢量，所以分量不是投影）。

由于任一矢量都可写成式（1-8）和式（1-10）两种形式，所以矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的点积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}&=p^1u_1+p^2u_2+p^3u_3=\sum_{i=1}^{3}p^iu_i\\&=p_1u^1+p_2u^2+p_3u^3=\sum_{i=1}^{3}p_iu^i\end{aligned} \tag{1-13}$$

上式表明矢量的点积与斜角坐标系的取法无关，只要取一个矢量的逆变分量与另一矢量的协变分量对应相乘后求和即可。

值得指出，本书中讨论的矢量是自由矢量，也即与矢量的作用点无关。这就是说，无论作用在哪一点，都可按基 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 分解成式（1-8），按对偶基 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 分解成式（1-10）。由于这个缘故，我们常常说这组基以及它的对偶基是**整体的**。

上面我们碰到了许多对某个指标求和的情形，这个指标在每一项中出现两次：一次是上标，一次是下标。今后我们还将经常遇到这种情形。为简洁起见，我们采用**爱因斯坦求和约定**：在同一项中，凡重复一次的上下指标均表示在其取值范围内求和（对于三

维,从 1 至 3 求和;对于二维,从 1 至 2 求和)。

按此约定,可把式(1-8)、(1-10)和(1-13)分别写成

$$\boldsymbol{p} = p^i \boldsymbol{g}_i \qquad \boldsymbol{p} = p_i \boldsymbol{g}^i$$

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} = p^i u_i = p_i u^i$$

按爱因斯坦约定求和的一对指标称为**哑指标**,如上面的 i 就是哑指标。显然每一对哑指标的字母可以用另一对字母代换,如

$$\boldsymbol{p} = p^i \boldsymbol{g}_i = p^j \boldsymbol{g}_j$$

等等。

另外,把每一项中只出现一次的指标称为自由指标,如式(1-5)和式(1-9)中的 Kronecker δ,在二维情形用 δ_α^β,三维情形用 δ_j^i 表示。α、β 都只出现一次,表示分别取值 1 和 2;i、j 也各出现一次,分别取值 1,2,3。它们都是自由指标。按自由指标的写法,式(1-11)和式(1-12)可写成

$$p_i = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}_i \qquad p^j = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}^j$$

也就是说以上两式中的自由指标 i 和 j 应分别取值 1,2 和 3,从而代表 3 个式子。

§ 1-3　曲线坐标的基和对偶基

设空间任意点由三个独立参数 $x^i(i = 1,2,3)$所确定,则这些参数 x^i 就构成曲线坐标系。当三个参数中两个保持不变,只有一个变化时,点的轨迹曲线称为该坐标系的**坐标线**,通过空间任意点必有三根坐标线。而当三个参数中一个保持不变时,则其余两个参数变化而成的空间点的集合就构成**坐标面**,通过空间任意点必有 3 个坐标面,一般情况下,3 个坐标面都是曲面。

下面,我们来规定曲线坐标系的基和对偶基。

为了直观起见,我们首先讨论一个特殊的曲线坐标系。以平面极坐标系为例,说明如何确定基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 和对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。设平

面上任意点 M 的极坐标为 r,θ(如图 1-3 所示),这里把它们改写为:$r=x^1,\theta=x^2$,这样,x^1 坐标线就是从极点 O 出发的射线;x^2 坐标线就是以极点 O 为中心的圆。在理论力学中,我们常常取沿坐标线的切线并且朝坐标增大方向的单位矢量为该点处的基矢量,在平面极坐标系中就是取 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}^0,\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{\theta}^0$ 为基,可是在张量分析中一般不这样做。那么究竟如何取基矢量呢?

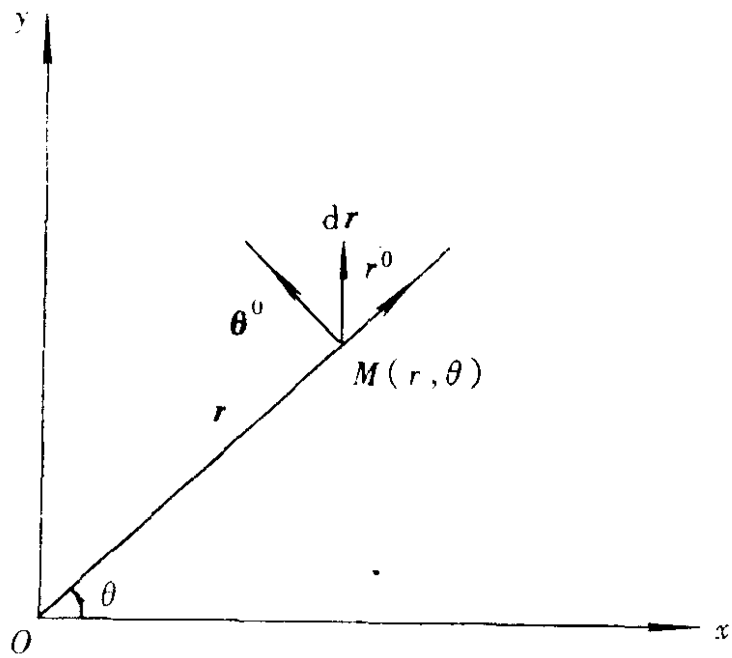


图 1-3

设点 M 的径矢为 $\boldsymbol{r}$,它是 x^1 和 x^2 的函数,借助于直角坐标系可把这个函数具体表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,x^2)=x^1\cos x^2\boldsymbol{i}+x^1\sin x^2\boldsymbol{j} \tag{1-14}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为直角坐标系中沿坐标轴正向的两个单位矢量。考察从 M 点出发的微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,写成矢量微分形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 \tag{1-15}$$

式(1-15)必然是坐标微分的线性组合。我们规定:取坐标微分的矢量因子为基矢量,记作 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$,即

$$g_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} \quad , \quad g_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2} \tag{1-16a}$$

这样,$\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$ 就是点 M 处的基。事实上,由式(1-14)可知,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_1 &= \cos x^2 \boldsymbol{i} + \sin x^2 \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 &= -x^1 \sin x^2 \boldsymbol{i} + x^1 \cos x^2 \boldsymbol{j} = x^1 \boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{1-16b}$$

值得强调指出的是:这组基大小和方向与点 M 的位置有关,而且 $\boldsymbol{g}_2$ 是个有量纲的矢量。

有了基,同样可按式(1-5)定义对偶基 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$,即它们满足关系式 $\boldsymbol{g}^\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta = \delta^\alpha_\beta$,从而立即求得

$$\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{e}_1 \quad , \quad \boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{x^1}\boldsymbol{e}_2 \tag{1-17}$$

此时 $\boldsymbol{g}^1$,$\boldsymbol{g}^2$ 分别与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 同向。这种情况只在正交曲线坐标系中才出现,对于一般的曲线坐标,基矢量与对偶基矢量一般是不共线的。

把上述思想推广到一般,设 $x^i(i=1,2,3)$为三维空间的曲线坐标系,则空间任意点 M 的径矢 $\boldsymbol{r}$ 是坐标的函数,即:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3) \tag{1-18}$$

考察自 M 点出发的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,写成矢量微分形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 \tag{1-19}$$

规定坐标微分的矢量因子为**基矢量**,记作 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,3)$即

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1-20}$$

这时,式(1-19)可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_i \mathrm{d}x^i \tag{1-21}$$

取定了基后,可按式(1-9)定义**对偶基** $\boldsymbol{g}^i(i=1,2,3)$,即

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j \tag{1-22}$$

显然,按式(1-20)定义的基包括了直线坐标系中基的定义。