

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

结 构 力 学

下 册

潘亦培 朱伯钦 主编

第十章 位移法

§ 10-1 位移法的基本概念

力法是计算超静定结构内力的基本方法之一，它是以超静定结构的多余约束力作为基本未知数，通过结构的变形条件求出这些基本未知数后，即可由平衡条件求出结构的全部内力，然后根据所求得的内力就可求出结构任一截面的位移。

由于结构的内力和位移之间存在着确定的对应关系，所以也可以用与力法相反的次序来求解超静定结构的内力。就是说可以先设法求出结构中的某些位移，然后再利用位移与内力之间确定的对应关系，求出相应的内力。这就是用位移法求解问题的基本思路。

下面以图 10-1 所示刚架进一步说明位移法的基本概念。该刚架在荷载作用下，将产生如图中虚线所示的变形，由于结点 1 为刚性结点，故汇交于该处的两杆杆端将产生相同的转角 φ_1 。此外，在弹性小变形情况下，若忽略受弯杆件的轴向变形，则在变形过程中各杆两端之间的距离将保持不变，所以结点 1 不产生线位移。

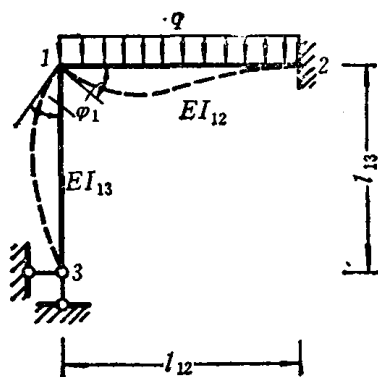


图 10-1

图 10-1 所示刚架是由 1-2 和 1-3 两杆在结点 1 处刚结而成，如果分别考察这两根杆件，则其受力和变形情况，相当于图 10-2a、b 所示。其中杆件 1-2 相当于两端固定的梁受到荷载 q 的作用，并在其左端产生顺时针向的转角 φ_1 ；杆件 1-3 相当于一端固定另一端铰支的梁在其固定端产生顺时针向的转角 φ_1 。图 10-2a 所示的情况又可分解为如图 10-2c 和 d 所示两种情况的叠加；图 10-2b 所示的情况又可分解为如图 10-2e 和 f 所示两种情况的叠加。在图 10-2c 和 e 中，两杆都不受转角 φ_1 的影响，其中受荷载 q 作用的杆件 1-2 的弯矩图不难用力法

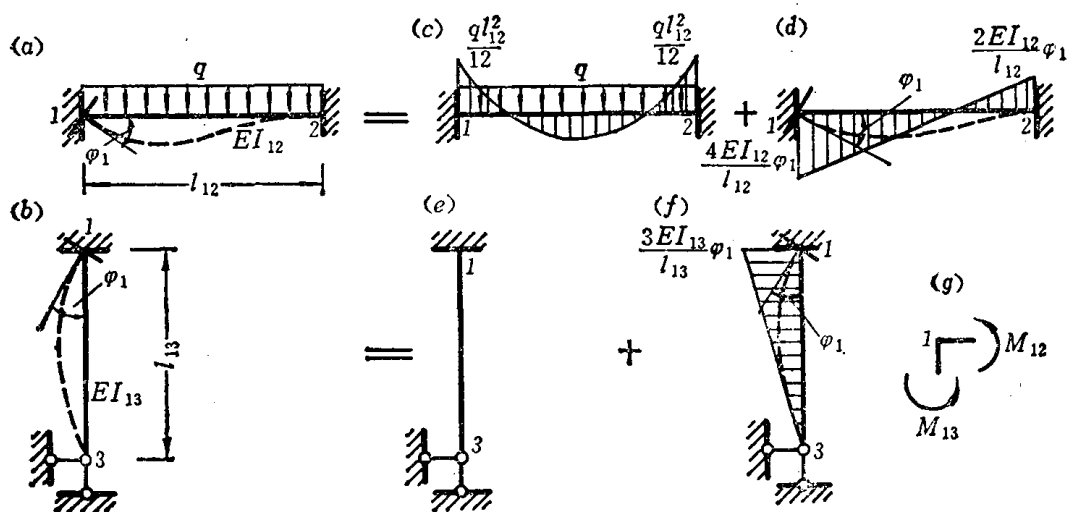


图 10-2

求出(图 10-2c),而未受荷载作用的杆件 1-3 将不产生弯矩。在图 10-2d 和 f 中,杆件 1-2、1-3 相当于支座 1 发生转动的单跨超静定梁,只要转角 φ_1 为已知,则其弯矩图同样可由力法求得(弯矩图分别表示在图 10-2d、f 中)。

设作用于杆端的杆端弯矩以顺时针方向转动为正,反之为负,则参照图 10-2 可写出各杆端弯矩表达式为

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{4EI_{12}}{l_{12}} \varphi_1 - \frac{ql_{12}^2}{12} \\ M_{21} &= \frac{2EI_{12}}{l_{12}} \varphi_1 + \frac{ql_{12}^2}{12} \\ M_{13} &= \frac{3EI_{13}}{l_{13}} \varphi_1 \end{aligned}$$

若能求出结点 1 处的角位移 φ_1 , 则各杆端弯矩就可按上式确定。为了求出 φ_1 , 可考虑结点 1 的力矩平衡条件 $\sum M_1 = 0$ (图 10-2g), 即

$$M_{12} + M_{13} = 0$$

将 M_{12} 、 M_{13} 代入上式后,得

$$\begin{aligned} \left(\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{3EI_{13}}{l_{13}} \right) \varphi_1 - \frac{ql_{12}^2}{12} &= 0 \\ \varphi_1 &= \frac{\frac{ql_{12}^2}{12}}{\frac{4EI_{12}}{l_{12}} + \frac{3EI_{13}}{l_{13}}} \end{aligned}$$

即

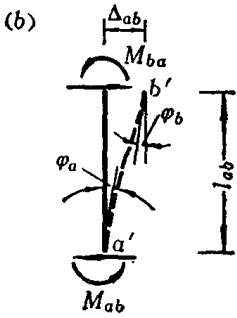
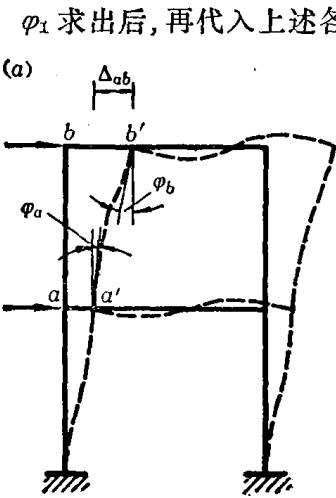


图 10-3

φ_1 求出后,再代入上述各杆端弯矩式中,即可求得杆端弯矩值,其余内力均可按静力平衡条件确定。显然,这种解题方法的关键是如何确定结点的角位移未知数 φ_1 的大小和方向。

下面再分析更为一般的情况。图 10-3a 所示刚架,在荷载作用下各个杆件都产生了弯曲,各结点也都产生了位移(线位移和角位移)。例如杆件 ab 将从原来的位置 ab 移动到新的位置 $a'b'$,在这个位移过程中,杆件 ab 的两端共产生了如下的三个独立位移(图 10-3b): a 端转动了一个角度 φ_a (即刚架中结点 a 的角位移); b 端转动了一个角度 φ_b (即刚架中结点 b 的角位移); a 、 b 两端间在垂直于杆轴方向产生了相对线位移 Δ_{ab} 。产生上述位移之后,杆件两端就在新位置处固定不动。如能设法求出这些未知的结点位移 φ_a 、 φ_b 和 Δ_{ab} , 则 ab 杆两端的弯矩,显然可按上面所述的类似方法来确定。杆端弯矩确定后,杆件其它截面的内力,即可由静力平衡条件求得。对于其它杆件来说,情况也完全是相同的。我们知道,整个结构是由许多这样的杆件所组成的,而汇交于刚架同一结点的各杆要满足变形协调关系,即

具有相同的转角；线位移也同样要满足杆件彼此之间的变形谐调关系。因此，就整个结构来讲，只要以各结点的角位移和线位移为未知数，当求出这些未知数后，则所有杆件的内力就可以根据单跨超静定梁的杆端力与杆端位移及荷载之间的关系来确定。这就是用位移法求解结构内力的基本概念。

§ 10-2 等截面直杆的转角位移方程

根据上面的分析知道，位移法是以结构的结点角位移和线位移作为基本未知数，结点位移求出后，再根据单跨超静定梁的杆端位移和已知的荷载等计算杆端内力。因此，在位移法中需要知道在杆端位移和荷载作用下杆端内力的计算公式。这些内力公式通常称为转角位移方程。

单跨超静定梁的杆端约束情况，通常有三种，即两端固定、一端固定另一端铰支、一端固定另一端的滑动支座。这三种杆端约束情况下的等截面直杆的转角位移方程，可以用力法求得，其计算方法在第八章中已作了详细的阐述。

为了便于应用，在位移法中对杆端内力和杆端位移的正负号规则规定为：(1) 杆端弯矩对杆端而言，以顺时针方向转动为正（对结点或支座而言，则以逆时针方向转动为正），反之为负；(2) 杆端剪力对截面以顺时针方向转动为正，反之为负；(3) 杆端转角 φ 以顺时针方向转动为正，反之为负；(4) 杆端相对线位移 Δ 以使杆件顺时针转向为正，反之为负。在下面的转角位移方程中，杆端力和杆端位移的正负号，均按此规则为准。

现根据力法的计算结果，列出上述三种单跨超静定梁的转角位移方程。

(一) 两端固定的等截面直杆

图 10-4 表示两端为固定的等截面直杆，设此杆件的 A 端和 B 端各沿顺时针方向产生转角 φ_A 和 φ_B ，B 端对于 A 端沿顺时针方向产生垂直于杆轴的相对线位移 Δ ，

在杆件上作用有已知的外荷载。该杆件在上述各因素共同作用下的杆端弯矩公式为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - 6i\psi + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 4i\varphi_B + 2i\varphi_A - 6i\psi + M_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

式中 $i = \frac{EI}{l}$ ，称为线刚度或单位刚度；

$\psi = \frac{\Delta}{l}$ ，为联结杆件由于 Δ 所引起的弹性曲线两端的弦线与原杆轴的夹角，称为弦转角，以顺时针方向转动为正；

M_{AB}^F 和 M_{BA}^F 称为固端弯矩，即当杆件上只有外荷载作用时，分别在 A 端和 B 端产生的杆端弯矩。两端固定的等截面直杆在几种常见荷载作用下的固端弯矩见表 10-1。

由式(10-1)求得杆端弯矩后，就可根据静力平衡条件求出杆端剪力 Q_{AB} 和 Q_{BA} ，即

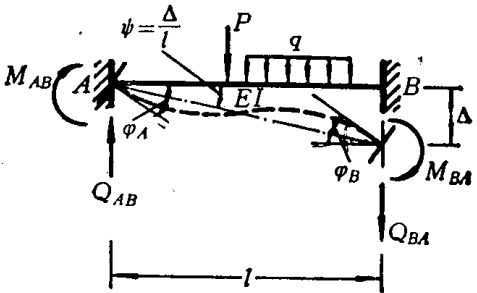
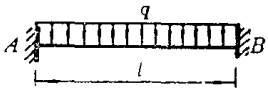
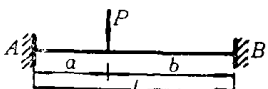
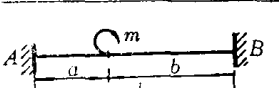
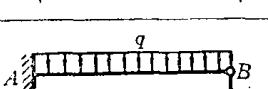
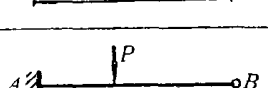
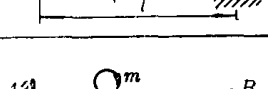
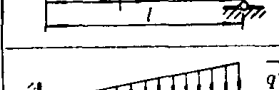
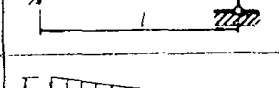
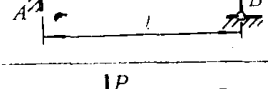
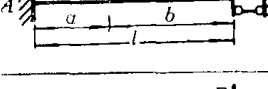
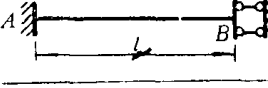
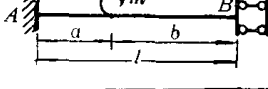


图 10-4

等截面直杆的固端弯矩和固端剪力

表 10-1

编 号	简 图	固 端 弯 矩		固 端 剪 力	
		M_{AB}^F	M_{BA}^F	Q_{AB}^F	Q_{BA}^F
1		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
2		$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2(l+2a)}{l^3}$	$-\frac{Pa^2(l+2b)}{l^3}$
3		$\frac{mb(2a-b)}{l^2}$	$\frac{ma(2b-a)}{l^2}$	$-\frac{6mab}{l^3}$	$-\frac{6mab}{l^3}$
4		$-\frac{ql^2}{20}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{7ql}{20}$	$-\frac{3ql}{20}$
5		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
6		$-\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$	0	$\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
7		$\frac{m(l^2-3b^2)}{2l^2}$	0	$\frac{-3m(l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{3m(l^2-b^2)}{2l^3}$
8		$-\frac{7ql^2}{120}$	0	$\frac{9ql}{40}$	$-\frac{11ql}{40}$
9		$-\frac{ql^2}{15}$	0	$\frac{4ql}{10}$	$-\frac{ql}{10}$
10		$-\frac{Pa(2l-a)}{2l}$	$-\frac{Pa^2}{2l}$	P	0
11		$-\frac{Pl}{2}$	$-\frac{Pl}{2}$	P	P
12		$-\frac{mb}{l}$	$-\frac{ma}{l}$	0	0
13		$-\frac{ql^2}{3}$	$-\frac{ql^2}{6}$	ql	0

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB} &= -\frac{6i\varphi_A}{l} - \frac{6i\varphi_B}{l} + \frac{12i}{l}\psi + Q_{AB}^F \\ Q_{BA} &= -\frac{6i\varphi_A}{l} - \frac{6i\varphi_B}{l} + \frac{12i}{l}\psi + Q_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (10-2)$$

上式中的 Q_{AB}^F 和 Q_{BA}^F 是当杆件上只有外荷载作用时，分别在 A 端和 B 端产生的杆端剪力，称为固端剪力。两端固定的等截面直杆在几种常见荷载作用下的固端剪力见表 10-1。

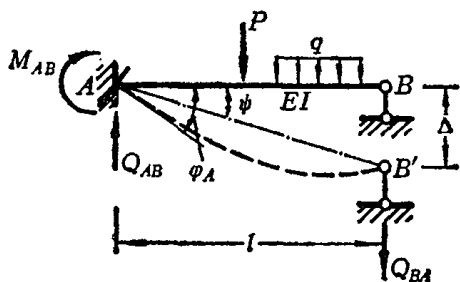


图 10-5

式(10-1)、(10-2)是两端固定的等截面直杆在 φ_A 、 φ_B 、 Δ 和外荷载等四种因素共同作用下的杆端弯矩、杆端剪力计算公式，当上述四种因素不是同时存在时，则可根据实际情况取式中相应的项计算。

(二)一端固定另一端铰支的等截面直杆

图 10-5 表示 A 端为固定、 B 端为铰支的等截面直杆。设此杆件的 A 端沿顺时针方向产生转角 φ_A ， B 端对于 A 端沿顺时针方向产生垂直于杆轴的相对线位移为 Δ ，在杆件上有已知的外荷载作用。该杆件在上述各项因素共同作用下的杆端弯矩公式为

$$M_{AB} = 3i\varphi_A - 3i\psi + M_{AB}^F \quad (10-3)$$

相应的杆端剪力为

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB} &= -\frac{3i\varphi_A}{l} + \frac{3i}{l}\psi + Q_{AB}^F \\ Q_{BA} &= -\frac{3i\varphi_A}{l} + \frac{3i}{l}\psi + Q_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

式(10-3)、(10-4)中各项的意义同上。一端固定另一端铰支的等截面直杆在几种常见荷载作用下的固端弯矩和固端剪力列于表 10-1 中。

(三)一端固定另一端为滑动支座的等截面直杆

图 10-6 所示为 A 端固定、 B 端为滑动支座的等截面直杆。设此杆件的 A 端沿顺时针方向产生转角 φ_A ，杆件上受已知的外荷载的作用，该杆件在上述两种因素共同作用下的弹性曲线如图中虚线所示，其杆端弯矩公式为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i\varphi_A + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= -i\varphi_A + M_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (10-5)$$

相应的杆端剪力为

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB} &= Q_{AB}^F \\ Q_{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

式(10-5)、(10-6)中各项的意义同前。这种杆件在几种常见荷载作用下的固端弯矩和固端剪力列于表 10-1 中。

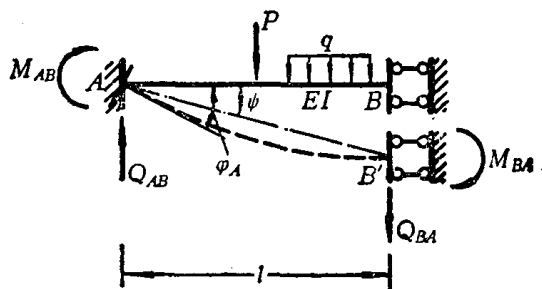


图 10-6

复习思考题

10-2-1 何谓转角位移方程？三种等截面直杆的转角位移方程各有哪几部分组成？它在位移法中起什么作用？

10-2-2 熟记转角位移方程(10-1)、(10-3)和(10-5)。试用力法验证其正确性，并由这些公式用静力平衡条件导出相应的杆端剪力公式(10-2)、(10-4)和(10-6)。

10-2-3 转角位移方程中的杆端角位移、杆端相对线位移、杆端弯矩和杆端剪力的正负号是如何规定的？

§ 10-3 位移法的基本未知数

由 § 10-1 的分析知道，位移法的基本未知数就是结构的结点角位移和线位移未知数。因此，位移法的基本未知数总数就是结点角位移与结点线位移未知数数目之和。由于在同一结点处刚结的各杆端的转角都是相同的，即每一个刚结点只有一个独立的角位移，至于铰结点或铰支座处各杆端的转角，由前面可知，它们不是独立的，确定杆件内力时不需要它们的数值，故可不作为基本未知数。因此，结点角位移未知数的数目就等于结构刚性结点的数目，例如，图 10-7a 所示刚架，只有结点 B 是刚结点，故该刚架具有一个角位移未知数。应该注意，与铰结点 C 联结的杆端截面，虽然也产生角位移，但并非为独立的角位移未知数。因应用转角位移方程(10-3)计算一端固定另一端铰支的直杆杆端弯矩时，并未包含铰截面处的角位移。所以，与铰联结的杆端截面的角位移可不作为未知数。

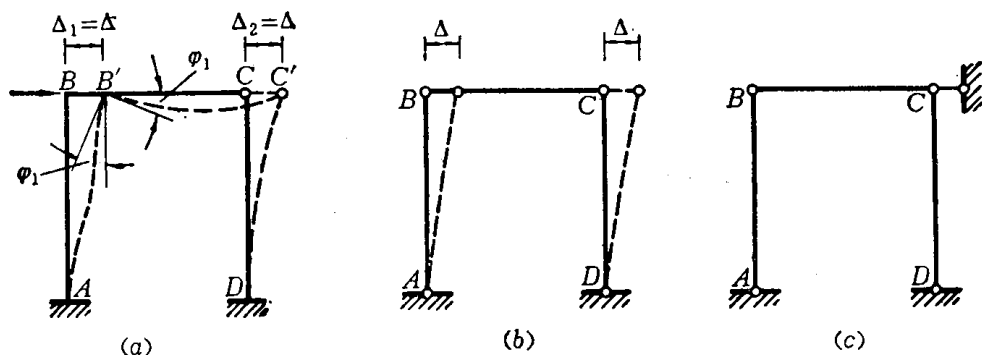


图 10-7

在进行结构分析时，一般都忽略受弯直杆的轴向变形和剪切变形对位移的影响，并且认为弯曲变形是微小的。因此，可以假定杆件两端之间的距离在变形后仍保持不变。根据上述假定，下面来讨论确定独立的结点线位移数目的方法。

图 10-7a 所示的刚架，在变形后，结点 B 移至 B'，结点 C 移动到 C'。根据上述假定，结构在变形前后，结点之间的距离保持不变，即 $\overline{AB} = \overline{AB'}$ ， $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ， $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ 。又因为弯曲变形很微小，因此可认为 $\overline{BB'}$ 与 $\overline{AB}$ 相垂直， $\overline{CC'}$ 与 $\overline{CD}$ 相垂直。因此，可以确定结点 B、C 在竖向不产生线位移，在水平方向的线位移 $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \Delta$ ，即该刚架只有一个独立的结点线位移 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ，如图 10-7a 所示。所谓独立的结点线位移是指这种线位移的大小与方向不是随其它结点线位移的大小和方向而确定的。例如，图 10-7a 中结点 C 的线位移 $\Delta_2 = \Delta$ 的大小和

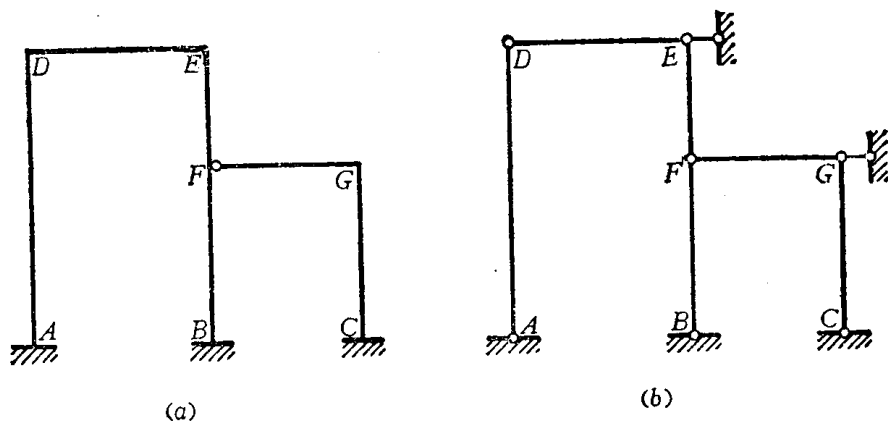


图 10-11

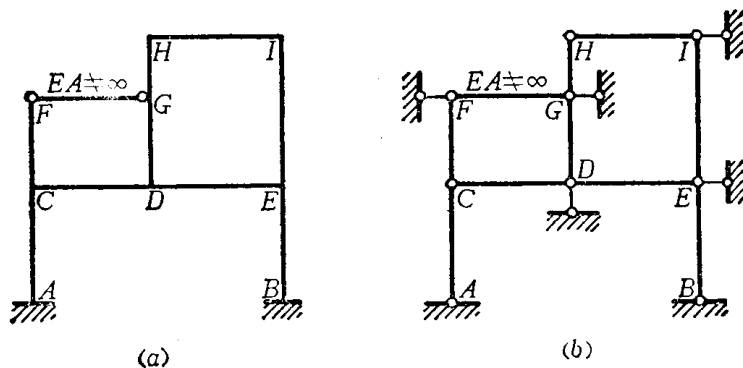


图 10-12

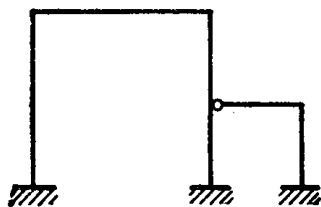
10-12b), 故结点位移未知数总数等于 11。

复习思考题

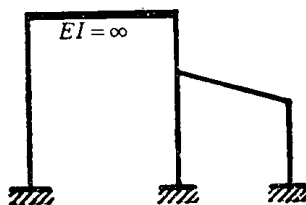
10-3-1 用位移法求解超静定结构有哪两种性质的基本未知数?

10-3-2 结点角位移数目是如何确定的? 在确定结构结点的独立线位移时曾作了哪些基本假定? 根据这些假定能得出什么结论? 如何确定独立的结点线位移数目?

10-3-3 如果要考虑杆件的轴向变形, 那么平面杆件结构的每一结点有几个独立线位移数目? 试确定图示刚架当考虑轴向变形时的未知数(包括角位移和线位移)数目。



思考题 10-3-3 图



思考题 10-3-5 图

10-3-4 当结构中有曲杆和二力杆时, 如何确定结点的独立线位移数目?

10-3-5 当结构中部分杆件的弯曲刚度 $EI = \infty$ 时, 这时确定结点的位移未知数数目与一般杆件($EI \neq \infty$)有何区别? 试确定图示结构的结点位移未知数数目。(提示: $EI = \infty$ 的横梁不能产生弯曲变形)。

§ 10-4 应用基本结构和典型方程计算超静定结构

以图 10-13a 所示结构来说明应用基本结构和典型方程计算超静定结构的原理和方法,

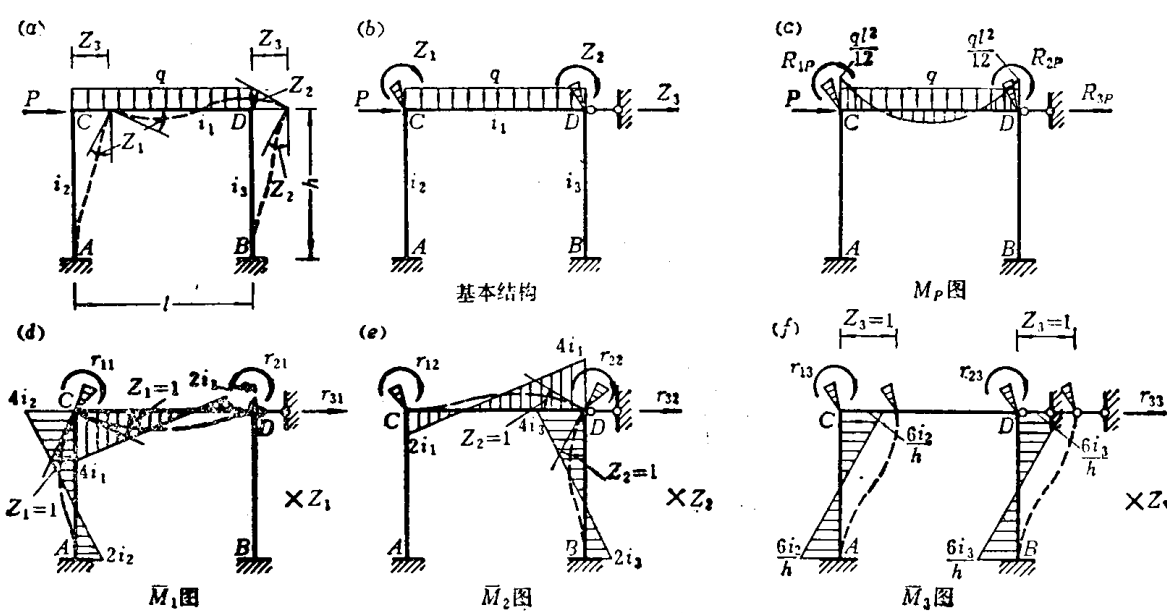


图 10-13

(一) 位移法基本结构

图 10-13a 所示结构在已知荷载作用下具有两个角位移 $Z_1 = \varphi_C$ 、 $Z_2 = \varphi_D$ 和一个独立结点线位移 $Z_3 = \Delta_C = \Delta_D$ 。这里统一用 Z 表示位移法的基本未知数。为了计算简便起见,先假定所有结点位移的符号都是正的,即 Z_1, Z_2 各为顺时针向转动, Z_3 为向右移动,使竖柱亦呈顺时针转向。如果任一位移最后计算结果得出的符号为正,则它的实际符号就是正的;如果计算结果得出的符号为负,则它的实际符号就是负的。

用位移法计算时,须将结构变成一系列的单跨超静定杆件。为此,当基本未知数数目确定后,可在每个刚性结点处人为地附加一个只能阻止结点转动但不能阻止结点移动的刚臂约束(也称附加刚臂),以暂时阻止刚结点的转动;同时,在每个产生独立结点线位移的结点处人为地附加一个只能阻止结点移动但不能阻止结点转动的链杆约束(也称附加链杆),以暂时阻止结点的移动。按上述方法在结构上人为地设置附加刚臂和链杆约束后所形成的体系就称为位移法基本结构。图 10-13a 所示结构的位移法基本结构如图 10-13b 所示,其中各附加约束的编号与各结点位移未知数的编号相对应。

(二) 建立位移法典型方程

基本结构在荷载作用下的弯矩图称为荷载弯矩图或 M_P 图(图 10-13c),它可直接根据表 10-1 作出。基本结构由于荷载在各个附加约束中产生的反力矩或反力分别用 R_{1P} 、 R_{2P} 和 R_{3P} 表示,其中第一个脚标表示该反力所属的约束,第二个脚标表示这些反力是由荷载所产生

的。例如 R_{1P} 表示荷载在第一个附加约束中产生的反力矩,其余可以按此类推。这些反力的方向可假设与所设的各结点位移未知数的方向相一致,如图 10-13c 所示。

事实上,各附加刚臂约束和附加链杆约束都是不存在的,因此在基本结构中必须转动刚性结点和移动各个结点,使之符合原刚架的实际变形情况。

图 10-13d、e、f 分别表示基本结构由于 $Z_1=1$ 、 $Z_2=1$ 、 $Z_3=1$ 时杆件的弯曲情况和相应的弯矩图 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $\bar{M}_3$ (必须注意,当其中一个附加约束转动或移动时,其余的附加约束均保持不动, $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $\bar{M}_3$ 图可根据转角位移方程作出)。这些弯矩图称为单位位移弯矩图或简称为单位弯矩图,与各单位弯矩图相应的各附加约束反力用 r_{11} 、 r_{21} 、 r_{31} 、……等表示,如图 10-13d、e、f 所示。其中第一个脚标表示该反力所属的约束,第二个脚标表示产生该反力的原因。例如, r_{11} 表示由于 $Z_1=1$ 在第一个附加约束中所引起的反力矩, r_{32} 表示由于 $Z_2=1$ 在第 3 个附加约束中所产生的反力,其余可按此类推。各反力的方向均可假定与所设的结点位移的方向一致。

由于原来刚架的结点没有附加刚臂约束和附加链杆约束,因此原刚架在实际受力情况下与各附加约束相应的反力矩或反力都应等于零。于是可根据叠加原理,将图 10-13c、d、e、f 进行叠加。各附加约束中的总反力矩或总反力应满足下列方程:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-7)$$

上式称为位移法典型方程,它的物理意义是基本结构在荷载及各结点位移等因素共同作用下,每个附加约束中的反力矩或反力等于零,它实质上代表了原结构的静力平衡方程。实际上,结构有多少结点位移未知数,就可建立与之对应的相同数目的平衡方程。

(三) 系数和自由项的计算

位移法典型方程中的系数有两种:两个脚标相同的系数称为主系数,它表示基本结构由于某个附加约束 i 作单位位移 $Z_i=1$ 时在同一约束 i 中所引起的反力矩或反力,例如 r_{11} 、 r_{22} 、 r_{33} 等,且主系数恒为正,其方向与所设 Z_i 的方向一致。另一种称为副系数,它表示基本结构由于某个附加约束 k 作单位位移 $Z_k=1$ 时在另一附加约束 i 中所引起的反力矩或反力,例如 r_{12} 、 r_{23} 等,且副系数可为正、为负或为零,需视其与所设 Z_i 的方向是否相同而定。典型方程中的系数只与结构本身的几何物理性质有关,与外界的荷载等因素无关。典型方程中的自由项 R_{1P} 、 R_{2P} 、 R_{3P} 等,它表示荷载单独作用时,在附加约束 i 上产生的反力或反力矩,亦称为荷载项,它与副系数一样,可为正、为负或为零,亦需视其与所设 Z_i 的方向是否一致而定。

根据反力互等定理 $r_{ik}=r_{ki}$,可知 $r_{12}=r_{21}$, $r_{13}=r_{31}$, $r_{23}=r_{32}$,所以在求系数时,可利用这种关系,以简化计算。

计算系数和自由项时,可根据 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $\bar{M}_3$ 和 M_P 图,由平衡条件求得。现将图 10-13 所示刚架中的系数和自由项具体计算如下。

当 $Z_1=1$ 时,取图 10-13d 中的结点 C、D 为隔离体(图 10-14a、b),分别由结点的力矩平衡条件 $\sum M_C=0$ 、 $\sum M_D=0$ 及反力互等定理,可得

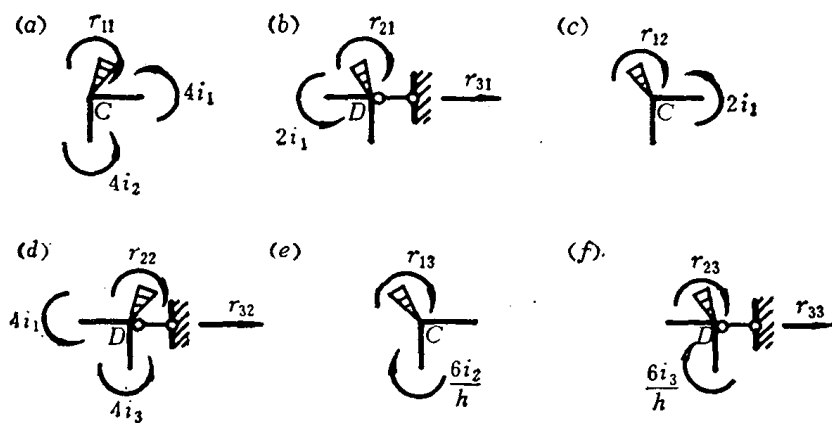


图 10-14

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_2, \quad r_{21} = 2i_1, \quad r_{31} = r_{13}$$

当 $Z_2=1$ 时, 取图 10-13e 中的结点 C 、 D 为隔离体 (图 10-14c, d), 分别由结点的力矩平衡条件 $\sum M_C=0$ 、 $\sum M_D=0$ 及反力互等关系, 可得

$$r_{12} = r_{21} = 2i_1, \quad r_{22} = 4i_1 + 4i_3, \quad r_{32} = r_{23}$$

当 $Z_3=1$ 时, 取图 10-13f 中的结点 C 、 D 为隔离体 (图 10-14e, f), 分别由结点的力矩平衡条件 $\sum M_C=0$ 、 $\sum M_D=0$ 及反力互等关系, 可得

$$r_{13} = r_{31} = -6i_2/h, \quad r_{23} = r_{32} = -6i_3/h$$

为了求附加链杆中的反力 r_{33} , 必须先根据 $\bar{M}_3$ 图求出各竖柱中的剪力 (图 10-15b 中轴力 N 未表示), 然后沿各竖柱顶端切开, 由柱端上部隔离体 (图 10-15a 上没有标出弯矩 M 和轴力 N) 的平衡条件 $\sum X=0$, 可得

$$r_{33} = \frac{12i_2}{h^2} + \frac{12i_3}{h^2}$$

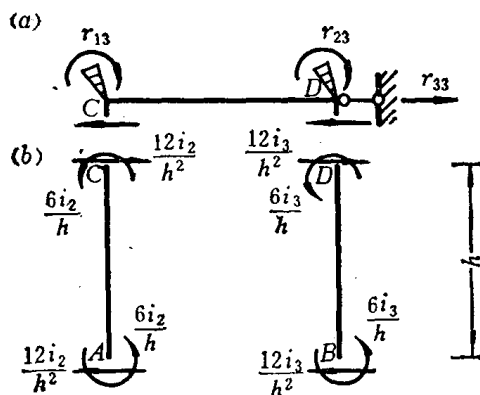


图 10-15

在荷载作用下, 取图 10-13c 中的结点 C 、 D 为隔离体 (图 10-16a, b), 分别由结点的力矩平衡条件 $\sum M_C=0$ 、 $\sum M_D=0$, 可得

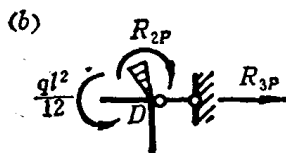
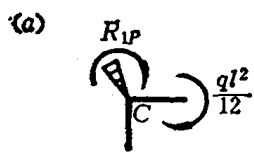


图 10-16

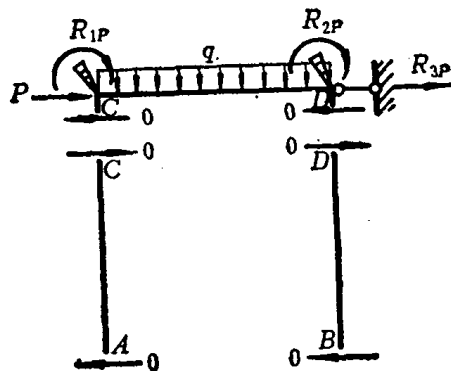


图 10-17

$$R_{1P} = -\frac{ql^2}{12}, \quad R_{2P} = \frac{ql^2}{12}$$

(7) 对最后内力图进行平衡条件的校核。

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法，它们都是综合应用结构的平衡条件和变形条件来求解问题的，但在求解问题的具体方法上有所不同。为了加强对这两个方法的理解，现将这两个方法的主要点列表对比如下。

力法与位移法的对比 表 10-2

	力 法	位 移 法
基本未知数	多余未知力	结点角位移和线位移
基本结构	去除原结构的多余约束并代以多余未知力后的静定结构。	在原结构的独立位移方向设置附加约束后所构成的由各单跨超静定梁组成的体系。
基本方程及其物理意义	根据原结构的已知变形条件建立基本方程。它表示基本结构在外界因素及各多余未知力共同作用下，基本结构在每一个多余未知力方向的位移与原结构的位移情况相同。	根据原结构的已知平衡条件建立基本方程。它表示基本结构在外界因素及各未知结点位移共同作用下，基本结构在每一个未知结点位移方向的约束反力矩或反力与原结构的受力情况相同。
解题思路	利用静定结构的已知位移计算公式，通过基本方程求解基本未知数。	利用基本结构中单跨超静定梁的已知杆端内力计算公式，由基本方程求解基本已知数。
基本方程中的系数和自由项	基本结构在各单位多余未知力和外界因素分别作用下沿各多余未知力方向的位移。	基本结构在各单位结点位移和外界因素分别作用下沿各未知结点位移方向的附加约束中的反力或反力矩。

例 10-1 试求图 10-18a 所示连续梁的内力图。

解 (1) 确定基本未知数数目和组成基本结构

梁的右端为静定的悬臂部分，其内力可由静力平衡条件求得，故在计算时可将此悬臂部分去掉，而用相应的内力(剪力和弯矩)来代替其对左面部分的作用。

此梁有两个结点角位移 Z_1 和 Z_2 ，而无结点线位移。在产生角位移 Z_1 、 Z_2 的刚结点 1、2 处，加上附加刚臂后即组成如图 10-18b 所示的基本结构。

(2) 建立位移法典型方程

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned}$$

(3) 绘单位弯矩图和荷载弯矩图，并求系数和自由项

因超静定结构在荷载作用下的内力仅与各杆的相对刚度有关，所以为了计算方便可设 $EI=6$ ，由此算得各杆线刚度 i 示于图 10-18a 中。图 10-18d 表示由于结点 1 转动单位角位移 $Z_1=1$ 时所引起的单位弯矩图 $\bar{M}_1$ ，由结点 1、2 的力矩平衡方程，可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$r_{11}=6+6=12, \quad r_{21}=3$$

图 10-18e 表示由于结点 2 转动单位角位移 $Z_2=1$ 时所引起的单位弯矩图 $\bar{M}_2$ ，由结点 1、2 的力矩平衡方程，可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$r_{12}=3, \quad r_{22}=6+6=12$$

图 10-18c 表示由于荷载所引起的荷载弯矩图 M_P 。梁 2-3 为一端固定另一端铰支，剪力 $Q_{3右}=30\text{ kN}$ 不引起该梁内力，直接通过支座链杆传递于基础；弯矩 $M_3=60\text{ kN}\cdot\text{m}$ 可看作作用于铰支端的集中力偶，故另一端的固端弯矩可利用表 10-1 中第七栏查得为

$$M_{23}^F = -\frac{M_3}{2} = -\frac{60}{2} = -30\text{ kN}\cdot\text{m}$$

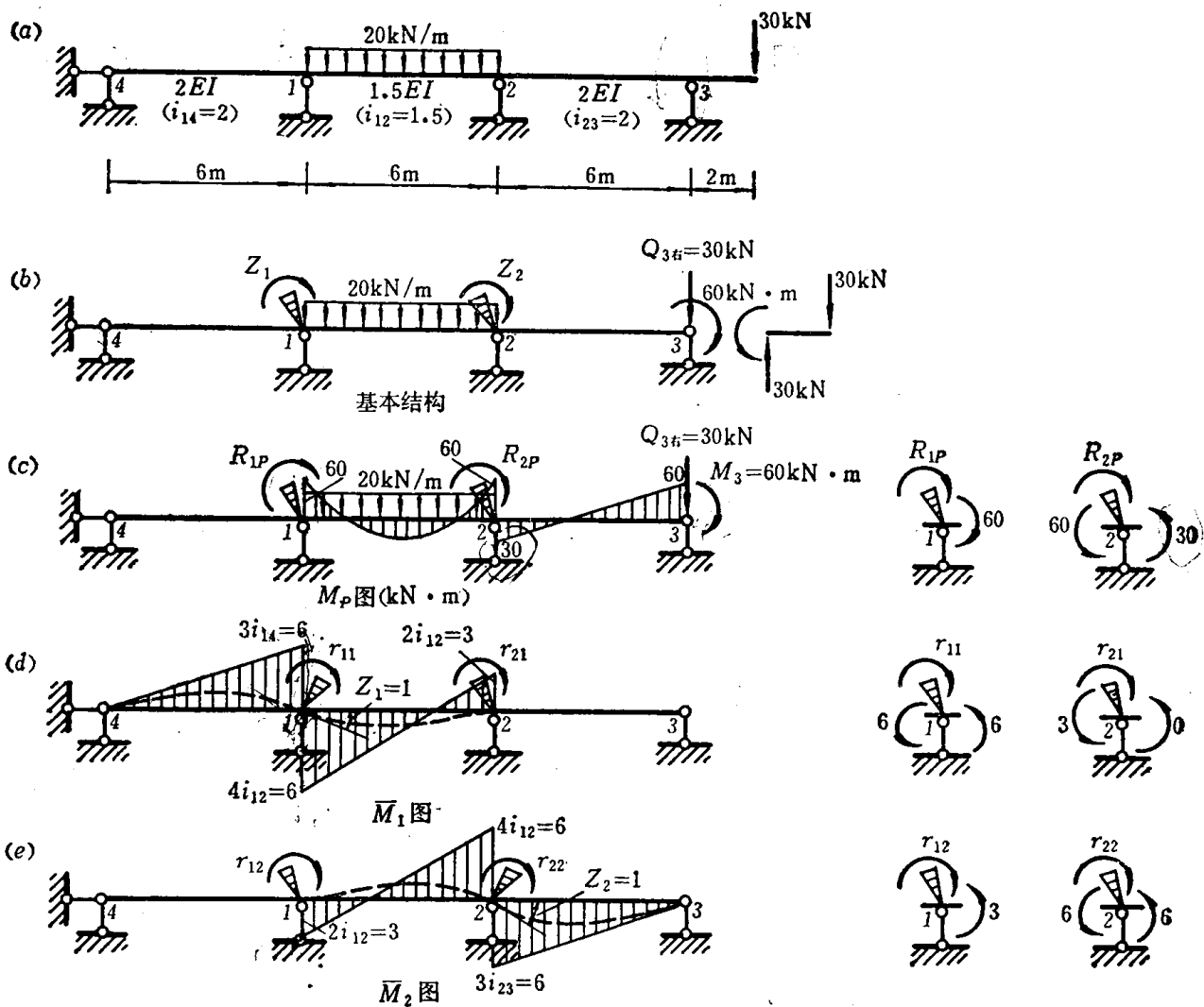


图 10-18

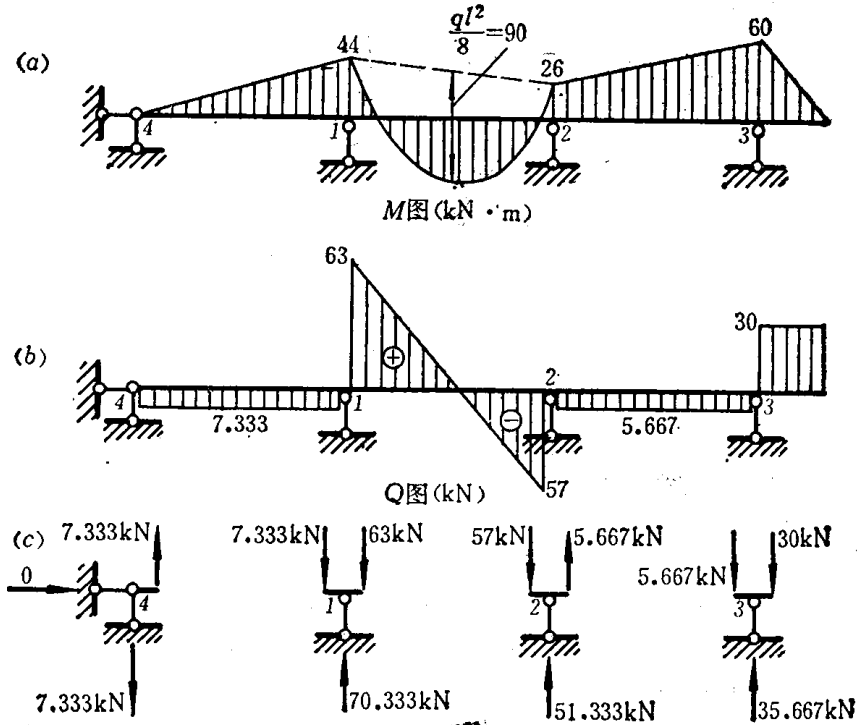


图 10-19

梁 1-2 为两端固定, 在均布荷载作用下的固端弯矩为

$$-M_{12}^F = M_{21}^F = \frac{ql^2}{12} = \frac{20 \times 6^2}{12} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由结点 1、2 的力矩平衡方程, 可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$R_{1P} = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad R_{2P} = 60 + 30 = 90 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 求解典型方程中的基本未知数

将各系数和自由项的具体数值代入典型方程, 得

$$12Z_1 + 3Z_2 - 60 = 0$$

$$3Z_1 + 12Z_2 + 90 = 0$$

解上述方程得

$$Z_1 = 7.333, \quad Z_2 = -9.332$$

所求得的 Z_1 为正值, Z_2 为负值, 说明结点 1 的实际角位移方向与所假设的顺时针方向相同, 而结点 2 的实际角位移方向与所假设的顺时针方向相反。同时还应注意, 所得角位移 Z_1 、 Z_2 的数值, 并非是结点 1、2 的角位移的真实数值, 这是因为在计算时曾采用了假设的相对刚度 $EI=6$ 的缘故, 而真实位移的计算, 应采用实际的绝对刚度。

(5) 绘制最后内力图

根据叠加法由 $M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_P$, 可得各杆的杆端弯矩, 由此作出的最后弯矩图如图 10-19a 所示。取每一杆件为隔离体, 由平衡条件可求出各杆端剪力, 据此可画出最后剪力图(图 10-19b)。取每一结点为隔离体, 由平衡条件 $\sum Y = 0$ 可求出各支座反力(图 10-19c)。

(6) 内力图的校核

最后内力图绘制后, 要用平衡条件进行校核。请读者自行校核, 不再赘述。

例 10-2 试求图 10-20a 所示刚架的弯矩图。

解 (1) 确定基本未知数数目和组成基本结构

确定结点线位移数目时, 可不考虑结点 1 处的静定悬臂部分。刚架有两个结点角位移 Z_1 、 Z_2 和一个独立结点线位移 Z_3 。加上相应的附加刚臂和附加链杆后, 组成的基本结构如图 10-20b 所示。

(2) 建立位移法典型方程

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0$$

(3) 绘单位弯矩图和荷载弯矩图, 并求系数和自由项

设 $EI=12$, 由此算得各杆的线刚度 i 注在图 10-20a 中。图 10-20d 表示由于结点 1 转动单位角位移 $Z_1=1$ 时所引起的单位弯矩图 $\bar{M}_1$, 由结点 1、2 的力矩平衡条件, 可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$r_{11} = 8 + 8 = 16, \quad r_{21} = 4$$

$\bar{M}_1$ 图中的链杆反力 r_{31} , 可根据 1-4 杆件的杆端剪力由整体水平投影方程直接求得, 但由反力互等定理 $r_{13} = r_{31}$ 可知, 也可在 $\bar{M}_3$ 图中由结点 1 的力矩平衡条件, 求出 r_{13} 较为方便。

图 10-20e 表示由于结点 2 转动角位移 $Z_2=1$ 时所引起的单位弯矩图 $\bar{M}_2$, 由结点 1、2 的力矩平衡条件, 可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$r_{12} = r_{21} = 4, \quad r_{22} = 12 + 8 + 7.2 = 27.2$$

$\bar{M}_2$ 图中的附加链杆反力 r_{32} , 根据反力互等定理 $r_{23} = r_{32}$, 可以通过 $\bar{M}_3$ 图中的附加刚臂反力矩 r_{23} 来计算较为方便。

图 10-20f 表示由于结点 1、2 移动单位线位移 $Z_3=1$ 时所引起单位弯矩图 $\bar{M}_3$, 由结点 1、2 的力矩平衡条件, 可求得各附加刚臂中的反力矩为

$$r_{13} = r_{31} = -2, \quad r_{23} = r_{32} = 1.8 - 3 = -1.2$$

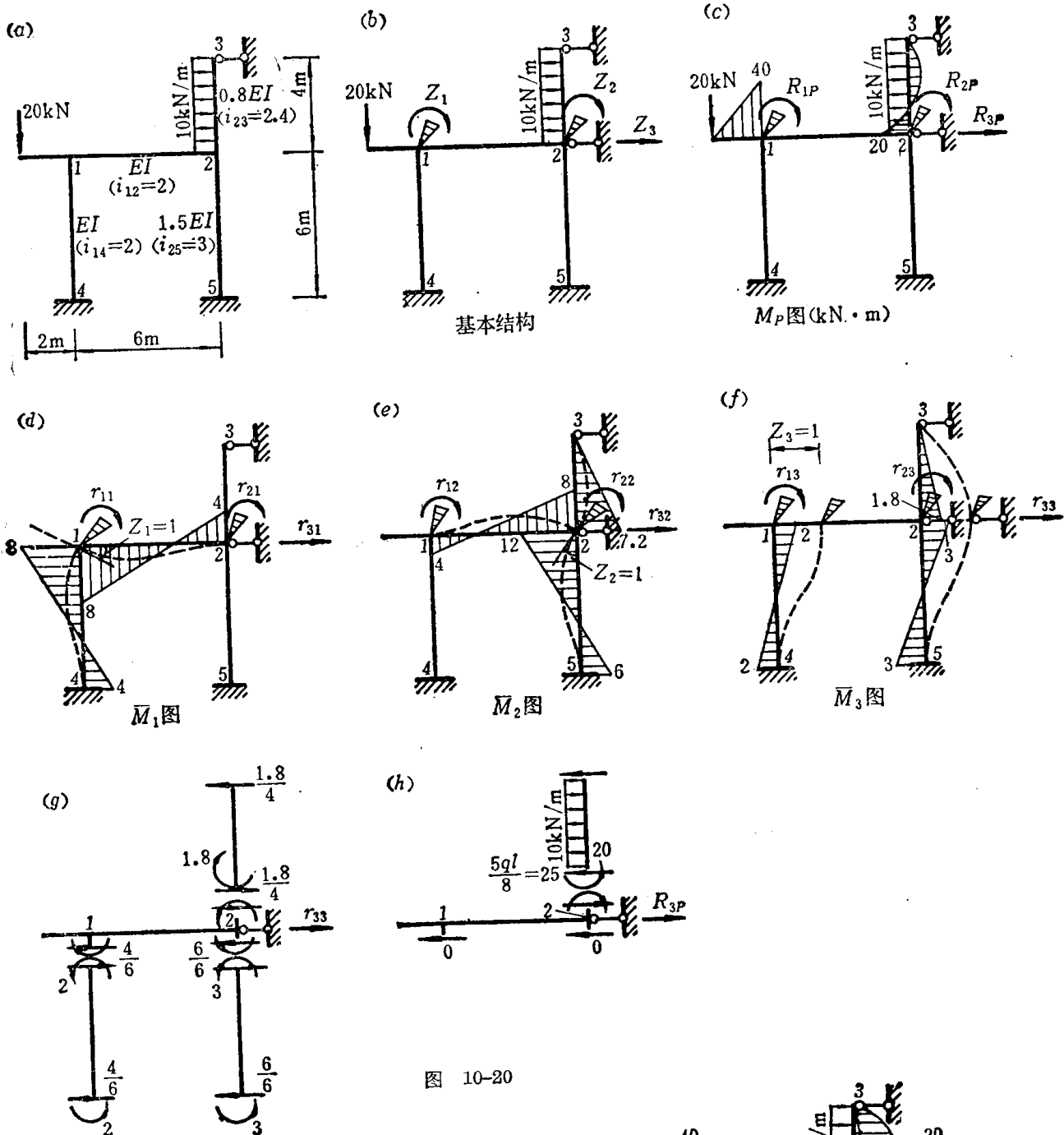


图 10-20

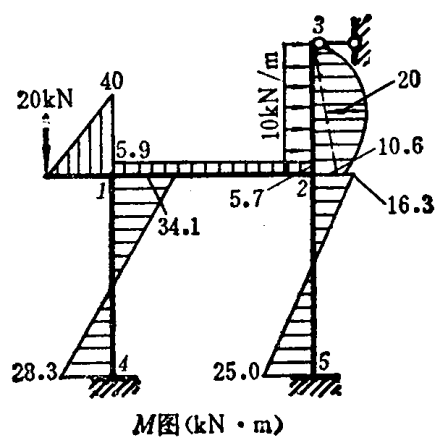


图 10-21