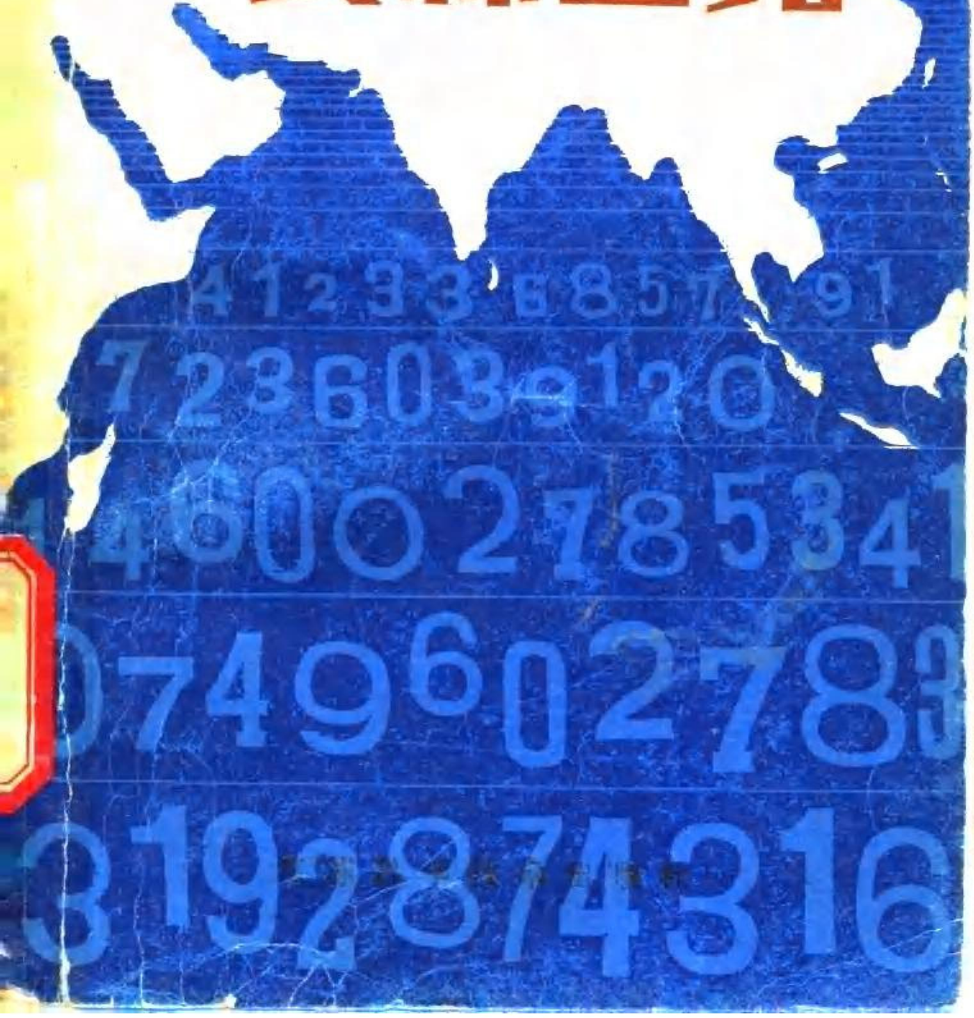
国际数学
奥林匹克



国际数学奥林匹克

1—20届

江苏师范学院数学系　编译

江苏科学技术出版社

1980·南京

特约编辑：华宏祖

国际数学奥林匹克

江苏师范学院数学系　编译

*

江苏科学技术出版社出版
江苏省新华书店发行
江苏新华印刷厂印刷

1980年1月第1版
1980年1月第1次印刷
印数：1—60,000册

书号：13196·024　定价：0.72元

责任编辑　赵所生

前　言

在青少年中举办数学竞赛，起源于匈牙利（一八九四年）。此后世界各国相继仿效，纷纷举办各种类型的数学竞赛。我国也举行过多次中学生数学竞赛。在中外历次数学竞赛的优胜者中，有许多人在后来成为著名的数学家。

国际数学奥林匹克（国际中学生数学竞赛），是一九五九年在罗马尼亚的倡议下开始创办的，以后每年比赛一次，至一九七八年已举行了二十届。开始几届仅有东欧几个国家参加，以后逐渐增多，最近几届已有二十多个国家参加。竞赛于每年七月轮流在某一参加国举行，每个参加国一般选派八名学生组成代表队。竞赛题由参加国分别提供，由竞赛审查委员会汇总遴选。每届竞赛选定六至七题，在两天内分两次进行，一般每次四小时。

本书介绍第一届至第二十届国际数学奥林匹克的简况、全部竞赛题和题解。主要是参照德文版《Internationale Mathematik-Olympiaden》(Hermann-Dietrich Hornschuh 著）和俄文杂志《Математика В Школе》(1961—1967)，并根据我国的实际情况编译而成的。第十九届的竞赛题译自美国杂志《*The American Mathematical Monthly*》*Vol*.85, No.5 (1978)。第二十届的竞赛题、解答选自我系《中学数学研究与讨论》1978 年第二期。

本书所有题解力求完整正确，并尽可能选择较好的解法；

有些题目提供两种解法，以开阔读者思路。在叙述上，尽量照顾我国读者的思维和语言习惯，力求通俗易懂。本书可供中学数学教师、中学生以及广大数学爱好者参考。

参加本书编译工作的有毛振璇、唐起汉、唐复苏三同志，插图由张筑生同志绘制。在编译过程中，还得到上海教育出版社和其他教师的支持与帮助，在此一并致谢。

江苏师范学院数学系

一九七九年八月

目　　录

第　一　届

第一届国际数学奥林匹克于一九五九年七月二十三日在罗马尼亚开幕，七月二十四日至二十五日正式比赛。参加的国家有：罗马尼亚，保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，波兰，苏联，捷克斯洛伐克。

竞　赛　题

题1　证明：对于任意自然数 n，分数 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。

（波兰，5分）*

题2　在实数范围内解方程：

(1) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$；

(3) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$。

（罗马尼亚，8分）

题3　已知关于 $\cos x$ 的二次方程：

$a\cos^2x+b\cos x+c=0$，

---

* 括号内第一项国名是指该题命题的国家，第二项分数是指该题全对时的得分。下同。

其中 a、b、c 为已知实数。求作一个二次方程，使它的根为 $\cos 2x$ 的对应值。当 $a=4$、$b=2$、$c=-1$ 时，对已知方程与作出的新方程进行比较。（匈牙利，7分）

题4 已知直角三角形 ABC 的斜边 c，斜边上的中线是两条直角边的比例中项，求作这个直角三角形。

（匈牙利，5分）

题5 在平面上已知一线段 AB，M为 AB 上任一点，在 AB 的同一侧分别以AM与BM为一边作正方形$AMCD$与$BMEF$，这两个正方形的外接圆除相交于点M外，还相交于点N。

（Ⅰ）证明：直线 AE 与 BC 相交于点N；

（Ⅱ）证明：不论点M在线段 AB 上的位置如何，直线 MN 总通过同一点；

（Ⅲ）求当点M在线段 AB 上运动时，上述两个正方形中心连线的中点的轨迹。（罗马尼亚，8分）

题6 两个平面P与Q相交于直线p，已知点A在平面P上，点C在平面Q上，它们都不在直线p上。求作一个等腰梯形$ABCD$，它的两底为AB、CD，使这个梯形存在内切圆，并且点B在平面P上，点D在平面Q上。

（捷克斯洛伐克，7分）

题　解

题1 用反证法。假定分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$可约，设$21n+4$与$14n+3$有公因数d，d为大于1的自然数。即$21n+4$与$14n+3$

都能被 d 整除。因为

$$21n+4=(14n+3)+(7n+1),$$

所以 $7n+1$ 能被 d 整除。又因

$$14n+3=2(7n+1)+1,$$

可得1能被 d 整除，这与假设 d 为大于1的自然数矛盾。因此，

$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约。

题 2　方程未知数的容许值为 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$。并且由

$$(\sqrt{2x-1}+1)^2=2(x+\sqrt{2x-1}),$$

$$(\sqrt{2x-1}-1)^2=2(x-\sqrt{2x-1})$$

得

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}+1|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1),$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}-1|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2x-1}) & \text{当}\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\text{时，}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}-1) & \text{当}x>1\text{时。}\end{cases}$$

① 当$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2},$$

可见，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 内的一切实数都是方程(1)的解，但不是方程(2)、(3)的解；

② 当 $x>1$ 时，有

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

这时，方程(1)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=\sqrt{2}$$

得 $$x=1.$$

由于 $x=1$ 不在 $x>1$ 的范围内，所以方程(1)在 $x>1$ 内无解；

方程(2)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=1,$$

得 $$x=\frac{3}{4},$$

由于 $x=\frac{3}{4}$ 不满足 $x>1$，所以方程(2)在 $x>1$ 内无解；

方程(3)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2,$$

得 $$x=\frac{3}{2},$$

综上所述：

方程(1)的解为$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$的一切实数$x$；

方程(2)没有实数解；

方程(3)的解为$x=\frac{3}{2}$。

题3 将已知方程改写为

$$a\cos^2x+c=-b\cos x,$$

两边平方，得$a^2\cos^4x+2ac\cos^2x+c^2=b^2\cos^2x$，

即 $$a^2(\cos^2x)^2+(2ac-b^2)\cos^2x+c^2=0.$$

由于 $$\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

代入上式得 $a^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+(2ac-b^2)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+$ $+c^2=0$，变形、整理得

$$a^2\cos^2 2x+2(a^2+2ac-b^2)\cos 2x+$$
$$+(a+2c)^2-2b^2=0,$$

即为所求作的新方程。

当$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，已知方程为

$$4\cos^2x+2\cos x-1=0,$$

$a^2=16$，$2(a^2+2ac-b^2)=8$，$(a+2c)^2-2b^2=-4$，

我们得到关于$\cos 2x$的方程：

$$4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0.$$

它与已知方程的系数相同。

这时，已知方程的解为$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，即有

$$x_1=k\cdot360°\pm72°,\ x_2=k\cdot360°\pm144°$$

(k 为整数)。

$$2x_1=2k\cdot360°\pm144°,2x_2=2k\cdot360°\pm288°.$$

$$\cos2x_1=\frac{-\sqrt{5}-1}{4},\ \cos2x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

显然满足作出的新方程。

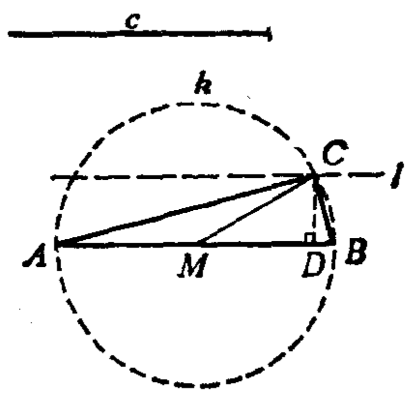


图 1-1

题 4 分析:假定 ΔABC 已作出,如图 1-1 所示。$AB=c$,$\angle C=90°$,显然 C 点在以 AB 为直径的圆周上。

另一方面,设直角三角形斜边 AB 上的中线为 CM, AB 上的高为 CD,则由题设条件应有

$$CM^2=CA\cdot CB,$$

又由 $\quad CM=\frac{1}{2}AB=\frac{c}{2},\ CA\cdot CB=AB\cdot CD=c\cdot CD,$

可得 $\quad \left(\frac{c}{2}\right)^2=c\cdot CD,$

$$\therefore\ CD=\frac{c}{4}.$$

因此,点 C 应在与 AB 距离为 $\frac{c}{4}$ 的平行线上。

作法: ① 作线段 $AB=c$,以 AB 为直径作圆 k;

② 作直线 $l\parallel AB$,使 l 与 AB 间的距离为 $\frac{c}{4}$;

③ 设直线 l 与圆 k 相交于点 C,连结 CA、CB,则 ΔABC

即为所求作的直角三角形。

证明：在 $\triangle ABC$ 中，由作法①知 $AB=c$，且由C点在圆 k 上，故 $\angle C=90°$。又因 AB 上的高 $CD=\frac{c}{4}$，所以 $CA\cdot CB=c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c^2}{4}$，而 AB 上的中线 $CM=\frac{1}{2}AB=\frac{c}{2}$，$CM^2=\frac{c^2}{4}$，因此 $CM^2=CA\cdot CB$，即 $\triangle ABC$ 斜边上的中线是两直角边的比例中项。

题5　以 A 为原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系(图1-2)。

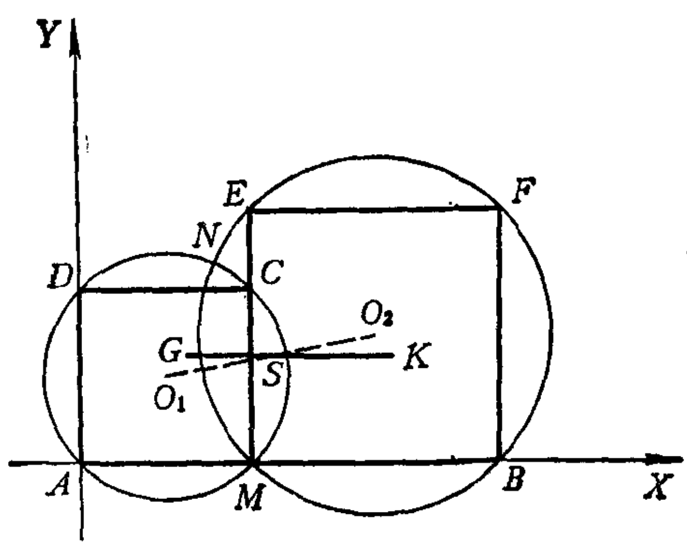


图 1-2

设 $AB=a$，$AM=m(0<m<a)$，则 A、B、M、C、E 各点的坐标分别为：

$$A(0,0);\ B(a,0);\ M(m,0);$$
$$C(m,m);\ E(m,a-m).$$

正方形 $AMCD$、$BMEF$ 的中心 O_1、O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right);\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right).$$

正方形$AMCD$的外接圆$\odot O_1$的方程为

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2,$$

即 $$x^2-mx+y^2-my=0. \qquad (1)$$

正方形$BMEF$的外接圆$\odot O_2$的方程为

$$\left(x-\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-m}{2}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-m)\right]^2,$$

即 $$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0. \qquad (2)$$

M、N点是$\odot O_1$与$\odot O_2$的两个交点，它们的坐标是方程(1)、(2)组成的方程组的解.为求N点的坐标，我们解(1)、(2)组成的方程组：

(1)－(2)得 $ax+(a-2m)y-am=0,$

即 $$ax=-(a-2m)y+am \qquad (3)$$

(1)×a^2得 $$(ax)^2-am\cdot(ax)+a^2y^2-a^2my=0 \qquad (4)$$

将(3)代入(4)，消去x得

$$[-(a-2m)y+am]^2-am\cdot[-(a-2m)y+am]$$
$$+a^2y^2-a^2my=0,$$

即 $$(2a^2-4am+4m^2)y^2-2am(a-m)y=0 \qquad (5)$$

解得 $$y_1=0,\quad y_2=\frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2},$$

代入(3)得

$$x_1=m,\quad x_2=\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},$$

有 $\begin{cases} x_1 = m \\ y_1 = 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2} \\ y_2 = \dfrac{am(a-m)}{a_2 - 2am + 2m^2}. \end{cases}$

这就是说，两圆的交点除$M(m,0)$外，还有

$$N\left(\frac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2}, \ \frac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}\right).$$

(Ⅰ) 直线 AE 过点 $A(0,0)$ 与 $E(m,a-m)$，其方程为

$$(a-m)x - my = 0 \tag{6}$$

直线 BC 过点 $B(a,0)$ 与 $C(m,m)$，其方程为

$$mx + (a-m)y - am = 0 \tag{7}$$

不难验证，N点的坐标：$x_2 = \dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2}$，

$y_2 = \dfrac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}$既满足(6)，又满足(7)。这就是说，直线 AE 与 BC 相交于点N。

(Ⅱ) 直线 MN 过点$M(m, 0)$与$N\left(\dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2}, \dfrac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}\right)$，其方程为

$$a(x+y) = m(2y+a) \tag{8}$$

显然，对于任意的m值，$x = \dfrac{a}{2}$，$y = -\dfrac{a}{2}$均满足方程(8)，这就是说，不论点M在线段 AB 上的位置怎么样，点

$\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$总在直线 MN 上，因此，直线 MN 总通过同一点 $\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$。

(Ⅱ) 由于两个正方形的中心 O_1、O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right);\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right),$$

所以线段 O_1O_2 的中点 $S(x',y')$ 的坐标为

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)=\frac{a+2m}{4},$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)=\frac{a}{4},$$

即中点坐标为 $S\left(\frac{a+2m}{4},\ \frac{a}{4}\right)$。

由此可见，对于任意的 m 值，O_1O_2 的中点 S 的纵坐标恒为定值 $\frac{a}{4}$，即点 S 总在直线 $y=\frac{a}{4}$ 上。而由于点 M 在线段 AB 上，即 $0<m<a$，这时 $\frac{a}{4}<\frac{a+2m}{4}<\frac{3a}{4}$，即 $\frac{a}{4}<x'<\frac{3a}{4}$。而当 M 从点 A 连续运动到点 B 时，m 的值就从 0 连续增大到 a，$x'=\frac{a+2m}{4}$ 的值则从 $\frac{a}{4}$ 连续增大到 $\frac{3a}{4}$。由此可见，当点 M 在线段 AB 上运动时，两正方形中心连线的中点的轨迹是一条平行于 AB 的线段，它的两端点是 $G\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$、$K\left(\frac{3a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$。

题 6 分析：假定梯形 $ABCD$ 已作出，如图1-3所示。要

使 AB 在平面 P 上，CD 在平面 Q 上，并且 $AB \parallel DC$，必有 $AB \parallel p$，$CD \parallel p$。所以 AB 必在平面 P 上过点 A 且与交线 p 平行的一条直线 m 上，CD 必在平面 Q 上过点 C 且与交线 p 平行的一条直线 l 上。

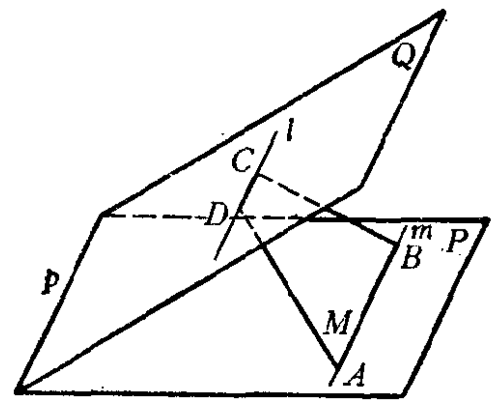


图 1-3

过两平行直线 l、m 作一平面 M，问题就归结为在平面 M 上作出等腰梯形 $ABCD$，使其两底 AB、CD 分别在直线 m、l 上，并且这个梯形存在内切圆。

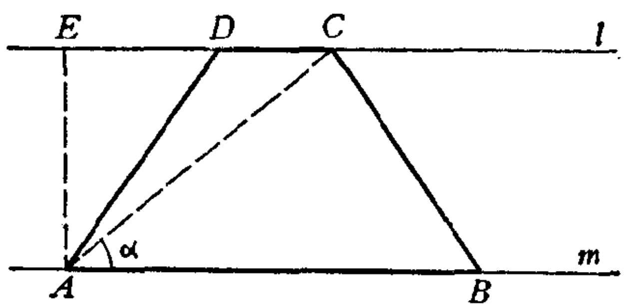


图 1-4

如图 1-4，作 $AE \perp l$，垂足为 E。要使梯形 $ABCD$ 存在内切圆，必须且只须

$$AD + BC = DC + AB,$$

即 $2AD = DC + AB$。

又 $\because \quad DC + AB = 2EC$，

$\therefore \quad 2AD = 2EC$，

$AD = EC$。

由此即可作出点 D，从而所求的等腰梯形不难作出。

作法：① 在平面 P 上，过点 A 作交线 p 的平行线 m；在平面 Q 上过点 C 作 p 的平行线 l；

② 过两平行线 m、l 作平面 M，在平面 M 上，作 $AE \perp l$，设垂足为 E；