天体力学引论

J. 柯瓦列夫斯基 著

科 学 出 版 社

p136
KJ

天体力学引论

J. 柯瓦列夫斯基 著

黄坤仪 译

易照华 校

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是一部天体力学方面的专著。全书共分七章：前四章介绍了天体力学原理、二体问题、正则方程组和摄动理论；第五章采用柴倍耳方法详细讨论人造卫星在地球引力场中的运动；最后两章介绍了天体力学经典理论的一些内容。本书的特点是，结构严谨，叙述简练。本书可供天文、地球物理、大地测量等方面的工作人员阅读参考。

J. Kovalevsky

INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS

D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1967

天体力学引论

J. 柯瓦列夫斯基 著

黄坤仪 译

易照华 校

责任编辑 夏墨英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 3 月第一版 开本：787×1092 1/32

1984 年 3 月第一次印刷 印张：5 3/8

印数：0001—3,100 字数：119,000

统一书号：13031·2509

本社书号：3448·13—5

定价： 0.85 元

前　　言

当作为行星际飞船先驱的第一批人造卫星上天之后，天体力学就不再是只有少数天文学家和数学家感兴趣的科学，而成为一门专门的工程技术了.

我力求用这种新的见解来撰写此书，在选择经典天体力学实例时，加以严格限制，并且仅保留那些对计算空间物体轨道有用的部分.

第五章是本书的主要章节. 在这一章中，应用柴倍耳和勃劳威尔方法，给出了地球引力场中人造卫星运动问题的详解，并表明怎样用拉格朗日方程求解这个问题.

开头的四章介绍了学习这两种方法所必须具备的知识：二体问题的椭圆解和天体力学的基本运算；一些分析力学的定理；德洛勒变量和根数变差的拉格朗日方程；摄动函数的展开和为这种展开所必需的白塞耳函数.

最后两章叙述性比较强. 在这两章中，我简要地介绍了天体力学经典理论的一些内容，力图说明它们的特征，但不作详细的讨论.

最后，在第七章末尾，我又返回到技术性较强问题的讨论. 我介绍了微分方程数值积分的一种方法，它可用于解决不要求分析解的任何轨道问题.

柯瓦列夫斯基（J. Kovalevsky）

目　　录

第一章　天体力学的原理

天体力学实质上是应用力学的普遍定律来研究引力作用下天体的运动和平衡的科学．天体力学的原理就是一般力学的原理，其中必须再加上万有引力定律．

1. 一般力学的基本定律

由于一般力学的基本定律在天体力学中的重要性，我们需要在这里作一回顾．需要进一步了解这个问题的读者，可以参考任何一本论述经典力学的书籍．我们承认质量的概念，也承认空间坐标系（称为伽利略参考系或惯性参考系）的存在．在这种坐标系中，一般力学的定律是成立的．最后，我们还承认称为时间的变量，这种时间是处处同时被感受到的（绝对时间）．在这些条件下，力学的基本定律如下所述：

当一个物质系统在惯性参考系中处于静止或运动状态时，作用在此系统上的外力向量组等于惯性力向量组：

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \boldsymbol{\gamma}_i. \tag{1}$$

其中，m_i 和 γ_i 是物质系统中第 i 个组元的质量和加速度．

特别是当系统是单个的质点，而向量 $\mathbf{F}$ 代表作用在此质点上的合力时，则有

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}.$$

其中，m 是质点的质量，$\boldsymbol{\gamma}$ 是质点的加速度．

另一种特例是没有外力作用在质点上，此时加速度为零，质点作匀速直线运动．由此直接得出的推论是：两个惯性系或者相对静止，或者相对作匀速直线运动．

通常我们将在一个惯性系中列出力学方程．但是，当考察物质系统在另一不同的系统中运动的时候，必须把附加的加速度产生的惯性力加到外力上去．

2. 力学的一般定理

力学的一般定理是力学基本定律的推论，是力学用于处理特殊情况的实际形式．

A．引力中心运动定理

物质系统引力中心的运动就好像整个系统的物质都集聚在这个中心，而所有的外力都作用在它的上面一样．

设 O 是参考原点，G 是物质系统的引力中心，则有

$$\mathbf{OG}=\frac{\Sigma m\mathbf{OP}}{\Sigma m},$$

其中位于 P 点的质量为 m．

令物质系统的总质量 M 等于 Σm，得

$$M\mathbf{OG}=\Sigma m\mathbf{OP}.$$

求两次导数，得

$$M\boldsymbol{\gamma}_g=\Sigma m\frac{d^2\mathbf{OP}}{dt^2}=\Sigma\mathbf{F}_e. \tag{2}$$

其中，第二等式就是基本方程 (1)．

B．角动量定理

物质系统对于 O 点的角动量的时间导数，在任何时刻都等于各外力对同一 O 点的力矩之和．

物质系统的角动量定义为

$$\boldsymbol{\sigma}=\Sigma(\mathbf{OP}\wedge m\mathbf{V}_p),$$

由此得

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}=\Sigma\left(\frac{d\mathbf{OP}}{dt}\wedge m\mathbf{V}_p\right)+\Sigma\left(\mathbf{OP}\wedge m\frac{d\mathbf{V}_p}{dt}\right).$$

上式右端第一个向量积为零，故得

$$\frac{d\sigma}{dt}=\Sigma(m\mathbf{OP}\wedge\boldsymbol{\gamma}_p). \tag{3}$$

角动量定理的一个直接推论是：如果外力矩为零或外力为有心力，$\frac{d\sigma}{dt}=0$，角动量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为常向量[1)]，物质系统的质心在一个平面内运动.

C. 动能定理

物质系统在 t_0—t_1 时间间隔内动能的变化等于在同一期间内作用在此系统上的内力和外力所作的功的总和.

物质系统的动能定义为系统的全部组元 P 的动能的总和，即 ΣmV_p^2.

设 $\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{F}_e$ 分别代表作用在 P 上的内合力和外合力，则可把动能定理写成：

$$\frac{1}{2}\Sigma mV_p^2(t_1)-\frac{1}{2}\Sigma mV_p^2(t_0)$$
$$=\Sigma\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{F}_i(t)+\mathbf{F}_e(t))\cdot\mathbf{V}_p(t)dt, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{V}_p(t)$ 表示 P 点在时刻 t 的速度.

(2)，(3) 和 (4) 式都是 (1) 式的推论. 事实上，(1)式包含了物质系统的全部动力学性质. 尽管如此，在某些简单的情形下，我们还将应用这些公式以减少一些证明.

3. 牛顿定律

牛顿的万有引力定律确定作用在物质系统上力的性质，而在一般力学的框架内，研究这个定律导出的结果，就构成了

---

1) 法文本和英译本均作 $\sigma=0$，有误，应为 $\frac{d\sigma}{dt}=0$. ——译者注

天体力学领域. 万有引力定律指出: 质量为m和m'的两个质点A和B沿着两质点间的连线AB互相吸引，吸引力和它们的质量的乘积成正比,而和它们之间距离的平方成反比.

设 $AB=r$，作用在B上的力从B指向A，其值为$k(mm'/r^2)$. 这里，k是比例常数，称为万有引力常数，在厘米·克·秒制中，其实测值为 $6.670\pm0.005\times10^{-8}$达因·厘米^2/克^2.

在第15节中,我们将给出天文学家们所采用的单位系统中k的值.

按照向量的写法;牛顿万有引力定律可表示为:

A对B的吸引力，$\mathbf{F}_B=kmm'\mathbf{BA}/r^3$

B对A的吸引力，$\mathbf{F}_A=kmm'\mathbf{AB}/r^3$.

注意: 牛顿定律含有引力通过空间瞬时传递的意思.

4. 牛顿定律的范围和局限

第一节介绍的关于力学定律的全部假说，与牛顿万有引力定律一起,形成了一组首尾一致的公理,它们的推论构成了牛顿力学;这些推论就是天体力学所研究的对象.即使不谈任何实际物理问题的应用，也可设想数学中应该有一个分支致力于这些问题的研究的. 然而,值得考察一下,用这些公理来描述自然界的物理性质,究竟真实到什么样的程度? 事实上,正因为长期的观测证实了这些假说的全部推论,所以,天体力学发表的著作才如此之多. 在测量和计算的精度范围内，我们总能证实上述假说的物理真实性. 像卫星和行星的运动、潮汐、地轴的进动、双星的运动、月球的天平动、地球的重力和彗星的运动等十分不同的现象,全都受天体力学理论的支配.这使得我们把牛顿定律当作万有引力定律. 但在上述的各种运动中有一个是例外，这就是勒威耶首先在水星的运动中注

意到的．水星近日点(水星轨道上最接近太阳的点)的进动超过牛顿力学的预期值大约每百年 $42''$．此后，对金星、地球和火星也观测到类似的偏差，只是偏差值同观测误差的数量级相同；即使是水星的附加进动值，也比经典理论已预先算出的进动值小得多．因此，利用牛顿定律可得到很好的近似，虽然仍然需要微小的改正．

这就引起爱因斯坦对时间和空间的公理进行重大修改，他这样做的理由大都超出了天体力学的范畴．即使是概略地论述广义相对论，都要超出本书的目的．从根本上讲，相对论否认绝对时间和伽利略惯性坐标系的存在，假设引力以光的速度传播，并认为引力是由于物质的存在使时空连续统变形所引起的．但是，尽管有这样基本的差异，相对论在一阶近似下简化为牛顿力学；而考虑到测量的精度，除了上述的近日点的进动之外；在二阶近似中也可以略去同牛顿力学的差异．

这种情况的实际结果是我们可以继续应用牛顿力学的公理．应用牛顿力学的公理要比应用广义相对论的公理容易得多，并可以改正到广义相对论的二阶．很容易看出，改正量是很小的，而且由于用牛顿力学得到的简化的二体运动和真实运动只有很小的差异，我们可以简单地把这些相对论性改正加到牛顿力学所描述的运动中去．

今后，我们将采用已经介绍的牛顿力学的定律和假说；但要记住，在少数情况下，必须进行相对论性的小改正，这只有在某些行星理论中才有必要．

5. *N* 体问题

作为上述各点的例证，我们将考察 N 体问题，即寻求只受牛顿引力相互作用的 N 个质点的轨道问题．N 体问题迄今还远远没有解决，这个问题在于可以把太阳系中各种天体的运

动当成N体问题的特殊情况（小N）来处理，尽管太阳、行星和卫星是准球形而不是质点．在第五章我们将指出，如果天体之间两两的距离足够大，则假定每颗行星的质量都集中在行星的引力中心，把行星当成质点，可以高精度地计算出这些天体之间的相互吸引力．

同样，对于受遥远质点的引力作用的准球形行星P，利用引力中心运动定理，我们可以这样计算作用在行星的各质点上的力，即把行星的质量当成全部集中于行星的引力中心．

除了几个很靠近它们的主星的卫星之外，这些假设已被太阳系天体的运动所证实．因此，我们可以用太阳系天体的引力中心代替这些天体，而把它们的运动问题化成N体问题．

6. N体问题的方程

考察以O为原点的惯性参考系中，质量为m_i，坐标为(x_i, y_i, z_i)的N个质点P_i，$1 \leqslant i \leqslant N$．

设第j个质点P_j受其他$N-1$个质点$P_i(1 \leqslant i \leqslant N; i \neq j)$的引力吸引，作用在$P_j$上的合力为

$$\mathbf{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{k m_i m_j \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i}{|P_jP_i|^3}. \tag{5}$$

力学基本定律在这里成为

$$m_j \frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2} = \mathbf{F}_j,$$

其中，$d^2\mathbf{OP}_j/dt^2$是质点P_j的加速度．消去m_j，得

$$\frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{k m_i \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i}{|P_jP_i|^3}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{6}$$

这样，我们得到N个表示质点轨道的向量微分方程．如果我们把这些向量方程都投影到三个坐标轴上去，则可获得

$3N$ 个二阶微分方程，形成一个 $6N$ 阶微分方程组：

$$\frac{d^2x_j}{dt^2}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_i(x_i-x_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2y_j}{dt^2}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_i(y_i-y_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2z_j}{dt^2}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_i(z_i-z_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$j=1,2,\cdots,N \qquad (7)$$

微分方程组 (7) 的解法构成天体力学中最重要的分支之一：太阳系动力学；N 体中的每一个点 P 代表太阳系中的一个天体.

7. N 体问题的积分

所谓 N 体问题微分方程组的一个积分是指 N 体的坐标、某些坐标的导数、还可能有时间的一个函数关系式；这种关系式对于任意时刻均满足微分方程组，并依赖于一个任意参数. 如果已知方程组的一个积分，则方程组降低一阶. 下面，我们将尝试寻求方程组 (7) 的积分.

(a) 把引力中心运动定理应用到整个 N 体系统：因为 N 体系统没有受到外力，其引力中心对惯性系作匀速直线运动. 引力中心 G 的坐标由下列向量关系式给出：

$$\mathbf{OG}=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j\mathbf{OP}_j}{\Sigma m_j}.$$

令 $M=\Sigma m_j$ 表示 N 体系统的总质量.

引力中心 G 的加速度为零可表为

$$\frac{d^2\mathbf{OG}}{dt^2}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2}=0.$$

上列求和式对 t 积分两次，得

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{OP}_j = \mathbf{A}t + \mathbf{B}.$$

其中，**A** 和 **B** 是两个任意的向量．取这个方程的坐标分量，一共有三个方程，每个方程依赖于两个任意参数（a_x，b_x 或 a_y，b_y 或 a_z，b_z）；这样，我们得到六个积分：

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} m_j x_j &= a_x t + b_x\\ \sum_{j=1}^{N} m_j y_j &= a_y t + b_y\\ \sum_{j=1}^{N} m_j z_j &= a_z t + b_z\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

(b) 把角动量定理应用到 N 体系统：因为 N 体系统没有受到外力，外力对于 O 点的力矩为零；所以，N 体系统对于 O 点的角动量的时间导数也为零，角动量为常数．我们有

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{OP}_j \wedge m_j \frac{d\mathbf{OP}_j}{dt} = \mathbf{C}.$$

其中，**C** 是任意的常向量，其分量为（C_x，C_y，C_z）．

取这个方程的三个坐标分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} m_j\left(y_j \frac{dz_j}{dt} - z_j \frac{dy_j}{dt}\right) &= C_x\\ \sum_{j=1}^{N} m_j\left(z_j \frac{dx_j}{dt} - x_j \frac{dz_j}{dt}\right) &= C_y\\ \sum_{j=1}^{N} m_j\left(x_j \frac{dy_j}{dt} - y_j \frac{dx_j}{dt}\right) &= C_z\end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

这样，我们得到三个新的积分．

(c) 注意到如果我们令

$$U = k\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{m_i m_j}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{1/2}},\quad (10)$$

则对于一个给定的 h，有

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} = k\sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{N}\frac{m_i m_h(x_i-x_h)}{[(x_h-x_i)^2+(y_h-y_i)^2+(z_h-z_i)^2]^{3/2}}.$$

以 h 代替 (7) 式中的 j，则和上式右端恒等. 因此，我们也可以把 (7) 式写成

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_j},\quad m_j\frac{d^2y_j}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_j},\quad m_j\frac{d^2z_j}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_j}.\quad (11)$$

由于 U 不显含时间，故有

$$\frac{dU}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_j}\frac{dz_j}{dt}\right).$$

应用 (11) 式，上式成为

$$\frac{\partial U}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}\frac{dx_j}{dt}+m_j\frac{d^2y_j}{dt^2}\frac{dy_j}{dt}+m_j\frac{d^2z_j}{dt^2}\frac{dz_j}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2\right].$$

积分上式，则得一个新积分. 事实上，从动能定理出发，也能得出这个积分：

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\left[\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2\right]=U+h.$$

其中，h 是一个任意的常数.

这样，我们一共找到了方程组 (7) 的十个积分，容易证明它们是相互独立的. 邦加雷已证明，没有其他的单值解析积分.

应用上述 N 体问题积分的经典结果，可见它们使方程组降到 $6N-10$ 阶. 特别是著名的二体问题降到二阶. 下一章我们将看到，二体问题的二阶微分方程组是完全可积的.