数学物理方程和
特殊函数

刘志旺　编

成都电讯工程学院出版社

·1988·

内容提要

本书分为两部分。第一部分，数学物理方程，包括二阶线性偏微分方程的分类，三大类型方程的几种典型解法，分离变量法与本征值理论，变分问题与有限元法等。第二部分，特殊函数，包括二阶线性常微分方程的级数解法，勒让德多项式，贝塞尔函数，埃尔米特多项式，拉盖尔多项式，超几何函数等。书中每章（或节）都有相当数量的习题，并附有答案。书末列出若干附录，作为基本内容的补充。

本书可作为工科硕士研究生的教材，也可作理、工科高年级学生的教材或参考书，并可供高等学校教师和工程技术人员阅读参考。

数学物理方程和特殊函数

刘志旺　编

*

成都电讯工程学院出版社出版

成都电讯工程学院出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本 850×1168　1/32　印张 12.5　字数 327 千字

版次 1988年7月第一版　印次 1988年7月第一次印刷

印数 1-3500 册

中国标准书号　ISBN 7—81016—037—0/O·2

(13452·3)　　定价：3.80 元

前 言

《数学物理方程和特殊函数》是工科硕士研究生和理、工科高年级学生的一门重要的专业数学基础课。本书编者经过多年教学实践后在所编讲义的基础上，对全书的内容作了比较大的修改和充实。在体系上既重视一定的数学基础理论，又注意与专业的相应联系，能为后继专业课和工程应用提供基本的理论和方法。

本书内容包含两部分。第一篇，数学物理方程，首先介绍二阶线性偏微分方程及其分类的基本理论和方法；然后详细地以几种典型的方法分别讨论了三大类型方程——波动方程、扩散方程（热传导方程）和位势方程的求解；对常用的分离变量法及本征值理论作了集中的论述，为特殊函数的学习打下了基础；最后考虑到专业及实际问题的广泛应用，我们将原讲义附录中的δ-函数及其求解方程的应用、变分问题与有限元法专门列为两章内容进行讨论。第二篇，特殊函数，由于二阶线性常微分方程的级数解理论和方法是本书特殊函数导出的基础，因此首先介绍它；接着对常用的几种特殊函数——勒让德多项式、贝塞尔函数、埃尔米特多项式、拉盖尔多项式等进行系统全面的论述；最后对在理论上和实用上都有重要意义的超几何函数概念及其性质给以必要的研究，并介绍专业中常见的若干特殊函数的超几何函数表达式。书中每章（或节）都安排有相当数量的习题，并附有部分答案。书末列出若干附录，如正交曲线坐标系、积分变换、Γ-函数、B-函数、正交多项式及切比谢夫多项式、椭圆函数、雅可比多项式等，作为对基本内容的补充。

阅读本书应具有数学分析、常微分方程、复变函数、线性代数等数学基础知识。本书可作为工科硕士研究生的教材，也可作为理、工科高年级学生的教材或参考书，并可供高等学校的教师和广大工程技术人员阅读参考。

本书在编写过程中得到刘盛纲、张其劭、关本康和冯潮清、何浩法等几位专家教授的指导和审校，并提出了很多宝贵的意见。编者在此对他们表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，加上时间仓促，书中定有不少缺点和错误，请读者批评、指正。

编 者

1987年10月

目　录

第一篇　数学物理方程

第一章　二阶线性偏微分方程及其分类……………………(1)

§ 1.1　方程的一般概述……………………(1)

§ 1.2　几个问题的提出……………………(2)

§ 1.3　方程的分类……………………(4)

习题……………………(14)

第二章　波动方程……………………(16)

§ 2.1　定解问题的导出……………………(16)

§ 2.1.1　弦振动方程……………………(16)

§ 2.1.2　膜振动方程……………………(20)

§ 2.1.3　电磁波方程……………………(21)

习题……………………(23)

§ 2.2　一维波动方程的柯西问题……………………(24)

§ 2.2.1　无界弦振动的柯西问题的解……………………(25)

§ 2.2.2　解的适定性论证……………………(27)

§ 2.2.3　解的意义……………………(29)

§ 2.2.4　半无界弦与延拓法……………………(33)

§ 2.2.5　非齐次方程的柯西问题……………………(35)

习题……………………(39)

§ 2.3　高维波动方程柯西问题……………………(40)

§ 2.3.1　平均值法与泊松公式……………………(41)

§ 2.3.2　二维波动方程柯西问题·降维法……………………(46)

§ 2.3.3　解的物理意义……………………(47)

§ 2.3.4　非齐次波动方程的柯西问题……………………(50)

习题……………………(52)

第三章　扩散方程·积分变换法……………………(55)

§ 3.1　定解问题的建立……………………………………………………(55)
§ 3.1.1　方程的导出……………………………………………………(55)
§ 3.1.2　定解条件……………………………………………………(59)
§ 3.2　积分变换求解法……………………………………………………(60)
§ 3.2.1　傅里叶变换法……………………………………………………(60)
§ 3.2.2　拉普拉斯变换法……………………………………………………(65)
习题……………………………………………………(69)
第四章　位势方程·格林函数法……………………………………………………(72)
§ 4.1　定解问题的提法……………………………………………………(72)
§ 4.1.1　方程的导出……………………………………………………(72)
§ 4.1.2　边界条件的提法……………………………………………………(73)
§ 4.2　基本公式……………………………………………………(73)
§ 4.2.1　格林第一、第二公式……………………………………………………(73)
§ 4.2.2　调和方程的基本解……………………………………………………(76)
§ 4.2.3　基本积分公式……………………………………………………(77)
习题……………………………………………………(81)
§ 4.3　格林函数及其应用……………………………………………………(82)
§ 4.3.1　问题的引入……………………………………………………(82)
§ 4.3.2　格林函数的性质……………………………………………………(85)
§ 4.3.3　格林函数解法的意义……………………………………………………(88)
§ 4.3.4　格林函数的物理意义及镜象法……………………………………………………(89)
§ 4.3.5　格林函数解法应用……………………………………………………(91)
§ 4.4　解的适定性讨论……………………………………………………(96)
§ 4.4.1　极值原理……………………………………………………(97)
§ 4.4.2　存在性定理……………………………………………………(98)
§ 4.4.3　唯一性与稳定性定理……………………………………………………(99)
习题……………………………………………………(100)
第五章　δ-函数·基本解·解……………………………………………………(102)
§ 5.1　δ-函数……………………………………………………(102)
§ 5.1.1　δ-函数的定义……………………………………………………(102)
§ 5.1.2　δ-函数的性质……………………………………………………(104)

§ 5.1.3　高维δ-函数……………………………………………… (108)
§ 5.2　　广义函数……………………………………………… (108)
§ 5.2.1　泛函的概念…………………………………………… (108)
§ 5.2.2　广义函数……………………………………………… (109)
§ 5.3　　基本解·解……………………………………………… (113)
§ 5.3.1　基本解的概念………………………………………… (113)
§ 5.3.2　解的性质……………………………………………… (113)
§ 5.3.3　偏微分方程的基本解·解……………………………… (114)
　　　　　习题…………………………………………………… (120)
第六章　分离变量法·本征值理论………………………… (123)
§ 6.1　　一维混合问题………………………………………… (123)
§ 6.1.1　齐次波动方程………………………………………… (123)
§ 6.1.2　齐次扩散方程………………………………………… (133)
§ 6.1.3　非齐次问题的处理…………………………………… (135)
　　　　　习题…………………………………………………… (139)
§ 6.2　　高维混合问题………………………………………… (141)
§ 6.2.1　二维问题的解………………………………………… (141)
§ 6.2.2　三维方程的分离变量法……………………………… (147)
§ 6.3　　本征值理论…………………………………………… (151)
§ 6.3.1　问题的引入…………………………………………… (151)
§ 6.3.2　本征值理论…………………………………………… (154)
§ 6.3.3　小结…………………………………………………… (158)
　　　　　习题…………………………………………………… (161)
第七章　变分问题和有限元法……………………………… (162)
§ 7.1　　变分问题……………………………………………… (162)
§ 7.1.1　泛函的变分…………………………………………… (162)
§ 7.1.2　泛函的极值…………………………………………… (163)
§ 7.1.3　变分法………………………………………………… (165)
§ 6.1.4　变分原理……………………………………………… (168)
§ 7.2　　有限元法……………………………………………… (172)
§ 7.2.1　有限元法的基本原理………………………………… (172)

§ 7.2.2 过程分析……………………………………………………（183）
习题……………………………………………………………（193）

第二篇 殊特函数

第八章 二阶线性常微分方程的级数解……………………（185）
§ 8.1 方程及其常点和奇点……………………………………（185）
§ 8.2 方程在其常点邻域内解的性质…………………………（186）
§ 8.3 方程在其正则奇点邻域内的解…………………………（187）
习题……………………………………………………………（191）
第九章 勒让德多项式·球函数……………………………（192）
§ 9.1 勒让德多项式……………………………………………（192）
§ 9.1.1 勒让德方程的解…………………………………………（192）
§ 9.1.2 勒让德多项式……………………………………………（196）
§ 9.1.3 勒让德多项式的表达式…………………………………（200）
§ 9.1.4 勒让德多项式的生成函数·递推公式…………………（202）
§ 9.1.5 勒让德方程的本征值问题………………………………（208）
§ 9.2 连带勒让德多项式·球函数……………………………（217）
§ 9.2.1 问题的引入………………………………………………（217）
§ 9.2.2 几个表达式………………………………………………（220）
§ 9.2.3 球函数……………………………………………………（225）
习题……………………………………………………………（229）
第十章 贝塞尔函数…………………………………………（233）
§ 10.1 贝塞尔方程的解…………………………………………（233）
§ 10.1.1 方程的级数解……………………………………………（233）
§ 10.1.2 第一类贝塞尔函数………………………………………（234）
§ 10.1.3 方程的通解·第二类贝塞尔函数………………………（236）
§ 10.2 贝塞尔函数的性质………………………………………（242）
§ 10.2.1 微分关系和递推公式……………………………………（242）
§ 10.2.2 半奇阶贝塞尔函数………………………………………（244）
§ 10.2.3 贝塞尔函数的生成函数…………………………………（246）

§ 10.2.4　贝塞尔函数的积分表达式…………………………（249）
§ 10.2.5　加法公式……………………………………………（250）
§ 10.3　贝塞尔函数的其他类型及渐近公式…………………（253）
§ 10.3.1　汉克尔函数…………………………………………（253）
§ 10.3.2　变态贝塞尔函数……………………………………（255）
§ 10.3.3　凯尔文函数…………………………………………（261）
§ 10.4　傅里叶-贝塞尔级数……………………………………（262）
§ 10.4.1　贝塞尔函数的零点及其性质………………………（262）
§ 10.4.2　贝塞尔函数系的正交归一性………………………（264）
§ 10.4.3　完备性………………………………………………（266）
§ 10.4.4　应用问题……………………………………………（267）
§ 10.5　贝塞尔积分……………………………………………（272）
§ 10.5.1　傅里叶-贝塞尔积分…………………………………（272）
§ 10.5.2　含贝塞尔函数的积分………………………………（274）
§ 10.6　球贝塞尔函数…………………………………………（278）
§ 10.6.1　定义及有关表达式…………………………………（278）
§ 10.6.2　傅里叶-球贝塞尔级数………………………………（281）
§ 10.7　可以化为贝塞尔方程的微分方程……………………（284）
习题……………………………………………………（286）

第十一章　埃尔米特多项式和拉盖尔多项式………………（291）

§ 11.1　埃尔米特多项式………………………………………（291）
§ 11.1.1　埃尔米特方程及其解………………………………（291）
§ 11.1.2　埃尔米特多项式的生成函数及有关表达式………（294）
§ 11.1.3　埃尔米特多项式系的正交归一性…………………（296）
§ 11.1.4　应用…………………………………………………（298）
§ 11.2　拉盖尔多项式…………………………………………（300）
§ 11.2.1　拉盖尔方程及其解…………………………………（300）
§ 11.2.2　拉盖尔多项式的生成函数·微分表达式·递推公式……（301）
§ 11.2.3　斯图姆-刘维尔本征值问题…………………………（303）
习题……………………………………………………（304）

第十二章　超几何函数…………………………………………（305）

§ 12.1 超几何方程和超几何函数…………………………（305）
§ 12.1.1 方程及其级数解…………………………………（305）
§ 12.1.2 超几何函数的性质………………………………（310）
§ 12.1.3 某些特殊函数的超几何函数表达式………………（313）
§ 12.2 合流超几何函数…………………………………（317）
§ 12.2.1 合流超几何方程及其解……………………………（317）
§ 12.2.2 库梅函数的两个性质………………………………（319）
§ 12.2.3 几个特殊函数的库梅函数表达式…………………（320）
习题……………………………………………………（323）
附录Ⅰ 正交曲线坐标系………………………………（326）
Ⅰ-1 基本概念……………………………………………（326）
Ⅰ-2 拉普拉斯算符………………………………………（328）
Ⅰ-3 几种坐标系的拉普拉斯式…………………………（331）
附录Ⅱ 积分变换…………………………………………（334）
Ⅱ-1 傅里叶变换…………………………………………（334）
1.概念…………………………………………………（334）
2.基本性质……………………………………………（336）
Ⅱ-2 拉普拉斯变换………………………………………（340）
1.定义…………………………………………………（340）
2.基本性质……………………………………………（341）
Ⅱ-3 拉普拉斯逆变换·反演公式…………………………（346）
附录Ⅲ Γ-函数和B-函数…………………………………（348）
Ⅲ-1 Γ-函数………………………………………………（348）
1.定义…………………………………………………（348）
2.性质及公式…………………………………………（348）
Ⅲ-2 B-函数………………………………………………（355）
1.定义…………………………………………………（355）
2.性质…………………………………………………（355）
附录Ⅳ 正交多项式………………………………………（356）
Ⅳ-1 概念…………………………………………………（356）
Ⅳ-2 正交函数系的构造…………………………………（357）

Ⅳ-3 展开理论……………………………………………… (363)
附录Ⅴ 椭圆函数简介…………………………………… (364)
Ⅴ-1 概念…………………………………………………… (364)
Ⅴ-2 椭圆函数的性质……………………………………… (366)
Ⅴ-3 其他类型的椭圆积分………………………………… (367)
附录Ⅵ 积分变换表……………………………………… (368)
1.傅里叶变换表…………………………………………… (368)
2.拉普拉斯变换表………………………………………… (370)
附录Ⅶ $J_0(x)=0$的根和$J_1(x)$的对应值表………………… (373)
习题答案…………………………………………………… (374)

第一篇　数学物理方程

在力学、电磁学和其他自然科学中，经常提出大量的偏微分方程问题，数学物理方程就是描述这些物理现象和过程，并反映这些物理量间关系的偏微分方程，其中尤以二阶线性方程为主。它们的重要性，早在十八世纪就被人们认识，例如，在1715年泰勒(Taylor)将弦线的横向振动问题归结为如下著名的弦振动方程以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

后，贝努里(Bernoulli)从弦发出声音的事实，得出该方程的三角级数解；在此基础上，傅里叶(Fourier)在理论上完成了解此方程的驻波法，这是至今仍然采用的基本方法。同时，欧拉(Euler)和拉格朗日(Lagrange)在研究流体力学，拉普拉斯(Laplace)在研究势函数，傅里叶在研究热传导等物理问题中，都导出了一系列数学物理方程及其求解方法，取得了初步成就。到了十九世纪，随着科学技术的发展及对方程的深入研究，形成了数学中的一门重要分支

偏微分方程理论，这样又促进了自然科学和工程技术的发展。

第一章　二阶线性偏微分方程及其分类

§ 1.1　方程的一般概述

定义　关于未知函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及其一阶、二阶偏导函数的关系式

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},\cdots)=0\quad(1.1.1)$$

称为含 n 个自变量的二阶偏微分方程。特别地，对于我们重点研究的两个自变量 x,y 的二阶偏微分方程，有关系式

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0 \tag{1.1.2}$$

假设方程(1.1.2)的形式可写为

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0 \tag{1.1.3}$$

式中a_{11}，a_{12}，a_{22}只是x,y的函数，此方程称为关于最高阶导函数的线性方程。如果a_{11}，a_{12}，a_{22}不只是x,y的函数，而且也是u,u_x，u_y的函数，则此方程称为准(或拟)线性方程。若方程的未知函数及其各阶偏导函数都是一次的，即

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{1.1.4}$$

其中系数a_{11}，a_{12}，a_{22}，b_1，b_2，c及自由项f是x,y的函数，则方程(1.1.4)称为二阶线性偏微分方程。

注意，以上都假定a_{11}，a_{12}，a_{22}，b_1，b_2，c及f是变量x,y在某一区域D上的连续可微函数。

特别地，当方程(1.1.4)的系数为常数时，则方程是常系数的线性方程。而当$f=0$时，方程则是齐次的。

如果定义在某个区域D上，且具有二阶连续偏导数的函数u代入方程后能使其成为恒等式，则称此函数u为方程在该区域上的解。

§1.2 几个问题的提出

1.迭加原理

二阶线性偏微分方程的一个重要性质是迭加原理，即若$u_i(i=1,2,\cdots,n)$是方程的解，则对任意常数$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，

$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iu_i$也是原方程的解。

注意，这个原理对无限多个$u_i(i=1,2,\cdots)$也成立，但必须满足条件：级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_iu_i$一致收敛，因为将$u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_iu_i$代入方程时，

可以逐项微分。

这个原理不仅对线性方程适合，而且对线性条件也适合，这点在以后各章讨论中将会发现。反之，如果不是线性方程（或线性条件），则迭加原理不能成立。

2.定解问题的适定性提法

对偏微分方程的研究，仍然同常微分方程一致，一般是讨论解的性质、解的结构和求解方法等。我们知道，对于一个二阶常微分方程而言，它的通解依赖于两个任意常数；但对于偏微分方程来说，情况远比常微分方程复杂得多。其复杂性在于，一般而论，它的解很难用通解形式表出，我们却往往更多地研究偏微分方程在一些特定条件下的特解（从物理意义而言，就是研究反映特定的客观物理现象所服从的特殊规律）。这里指的特定条件称为定解条件，一般地，包括初始条件和边界条件。包含所论方程（定解方程或泛定方程）和定解条件的问题，称为定解问题；只有初始条件，而无边界条件的定解问题，称为初值问题或柯西（Cauchy）问题；只有边界条件，而与时间无关的定解问题称为边值问题；两种条件皆有的定解问题称为混合问题。

在我们对定解问题进行研究时，自然会问：这个定解问题的解是否存在？即，一个偏微分方程究竟应具有什么条件才存在解？这就是解的存在性问题。其次，如果定解问题的解存在，是否只有一个，这是解的唯一性问题；最后，还要讨论解的稳定性（或解对定解条件，对自由项的连续依赖性）问题，即当定解条件（或自由项）有微小变化时，其解是否也只有微小变化。我们把定解问题的解的存在性、唯一性和稳定性统称为定解问题的适定性。这个适定性问题，我们要在每一章中作适当的有代表性的讨论。这是因为，一方面在专业中也需要这方面的知识；同时在研究偏微分方程的解时，可以引导我们初步判定所考察的定解问题是否合理，所加的定解条件是否恰当等。

当然也有这样的情形，虽然有时有的定解问题并不满足适定性

的要求，但在实际问题中仍然需要加以研究。譬如，对于电位u，满足拉普拉斯方程的第二边值问题，若u是该问题的解，则$u+$也是其解；这里，唯一性不成立，但是，这并不影响问题本身的研究，因为，电场（负电位梯度）的分布仍然符合问题的实际情况。在这种情形下，我们可以这样来理解上述问题的唯一性：它的解在除去一个常数因子外是唯一的。

3.研究对象

本书研究三类方程，即双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程，下面紧接着要讨论这种分类的理论和方法。它们的模型是波动方程、扩散方程（或热传导方程）和位势方程，即

$$u_{tt}-a^2\Delta u=F\quad \text{或}\ \Box u=F$$

$$u_t-a^2\Delta u=F$$

$$\Delta u=F$$

其中，Δ是拉普拉斯算符，$\Box$是波动算符，或称达朗贝尔D'Alembert）算符。在三维直角坐标下

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

从下一章起，我们要对它们加以详细讨论。

§1.3 方程的分类

研究方程的分类，首先要对自变量进行变换。这里，我们着重讨论两个自变量的情形，对于n个自变量的方程，我们可以用类推形式加以介绍。

1. 方程的化简

现在对二阶线性偏微分方程（1.1.4），即

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{1.3.1}$$

在区域D的某点(x_0,y_0)的邻域内进行化简，为此，作自变量变

换
$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=\eta(x,y) \end{cases} \tag{1.3.2}$$
在这里，假定变换是二次连续可微的，且在 (x_0,y_0) 的邻域内，雅可比行列式不等于零，即
$$J[\xi,\eta;x,y]=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.3.3}$$
于是，根据隐函数存在定理，条件（1.3.3）保证了变换（1.3.2）是可逆变换。

为了将方程（1.3.1）换为对新自变量 (ξ,η) 的关系式，根据复合函数求导法则，有
$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x \\ u_y &= u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2 \\ &\quad +u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x) \\ &\quad +u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2 \\ &\quad +u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$
将式（1.3.4）中诸导函数值代入方程（1.3.1），得
$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+\bar{c}u=\bar{f} \tag{1.3.5}$$
其中
$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2 \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2 \\ \bar{b}_1 &= a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y \\ \bar{b}_2 &= a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y \\ \bar{c} &= c \\ \bar{f} &= f \end{aligned}\right\} \tag{1.3.6}$$