

任怀宗 师先进 编

特殊 函数及其应用



中南工业大学出版社

特殊函数及其应用

任怀宗 师先进 编

中南工业大学出版社

1986·长沙

内 容 简 介

本书主要介绍贝塞尔函数、勒让德函数、拉米函数几种特殊函数以及运算微积。而其重点是在通过一些物理问题来阐述这些函数的应用。

本书可供高等学校应用地球物理专业高年级学生和研究生用作教材或主要参考书。也可供物理或其它有关专业的学生以及从事这些方面的科研工作者参考。

特殊函数及其应用

任怀宗 师先进 编
责任编辑 肖 梓 高

*

中南工业大学出版社出版发行
中南工业大学出版社印刷厂印刷
湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092 1/32， 印张：13.5 字数：315千字
一九八六年十二月第一版 一九八六年十二月第一次印刷
印数：0001——1500册

*

国际标准书号：ISBN 7-81020-003-8/O·001

统一书号：13442·012 定价：2.15元

前 言

在应用数学中，特殊函数是出现在偏微分方程的求解中。即应用在寻求满足于给定的微分方程和边界条件的某一函数的过程中，这就是所谓求解数学物理微分方程。显然，这一问题也深刻体现了数学与物理问题紧密的结合应用。

当前有些工科大学毕业生在阅读更近代的有关专业书籍文献时，在理论上常常遇到的难点之一，便是有关特殊函数应用这方面的问题。尤其对从事应用地球物理学科的同志来说，特殊函数及其应用更是对理解和应用有关的理论和进行科学研究工作必不可少的基础知识。为了适应这方面的需要，作者在七十年代末期为冶金部地球物理勘探工程师进修班，以及以后各届的物探硕士研究生开设了特殊函数及其应用一课。其主要目的不在于诸特殊函数本身的数学论证，而在于阐述利用这一专门数学工具来解决应用地球物理学中有关场的理论问题。本书是在该课程原有任怀宗所编讲义的基础上编写成的。全书共分九章，第一章叙述基础知识，第二章叙述以后要用到的一些常用函数，第三章至第八章，叙述了贝塞尔函数、勒让德函数、拉米函数、以及叙述相应这三种函数应用的各一章，又由于在解决位场等问题时，常常要用到一些变换关系，从方便于应用和学习出发，故在最后简要的编写了第九章运算微积及其应用一章。

本书第一章和第九章由师先进编写，其余七章由任怀宗编写，最后由任怀宗和师先进共同审阅。

感谢武汉地质学院北京研究生部谭承泽教授，长春地质学院申宁华教授、中南工业大学程方道教授，桂林冶金地质学院雷林源副教授审阅本书原稿讲义和提出宝贵的意见。以及敦促其出版鼓励。

感谢刘代志同志承担本书的抄缮、校对和绘图的工作，这些给予作者十分有力的协助。

感谢中南工业大学物探教研室和出版社的同志们，对本书的编写和出版所给予的鼓励和支持。

限于作者水平，书中缺点和错误在所难免，敬希读者们予以指正。

编 者

一九八六年五月

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1.1 数学场论	(2)
一 标量场 $u = u(x, y, z)$ 的梯度	(2)
二 矢量场 $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ 的散度	(3)
三 矢量场 $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ 的旋度	(5)
四 有势场 (保守场)	(6)
五 管形场 (无源场)	(7)
六 劈形算符	(7)
七 格林公式	(8)
§ 1.2 正交曲线坐标系	(9)
一 一般正交曲线坐标系	(9)
二 球面坐标 r, θ, φ	(12)
三 柱面坐标 ρ, φ, z	(15)
四 其它正交曲线坐标系	(17)
§ 1.3 数学物理方程	(22)
一 定解问题	(22)
二 数学物理方程的导出	(23)
§ 1.4 分离变数法与特殊函数常微分方程	(28)
第二章 若干常用函数	(41)
§ 2.1 高斯函数和误差函数	(41)
§ 2.2 Γ 函数 (第二类尤拉积分)	(42)
§ 2.3 β 函数 (第一类尤拉积分)	(49)
§ 2.4 复变数的 Γ 函数和 β 函数	(53)

第三章	贝塞尔 (Bessel) 函数	(57)
§ 3.1	第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$, ($2n \neq \text{整数}$)	(58)
§ 3.2	第二类贝塞尔函数 $[y_n(x)]$	(61)
§ 3.3	第三类贝塞尔函数 (汉克尔函数) $H_n^{(1)}(x)$ · $H_n^{(2)}(x)$	(67)
§ 3.4	贝塞尔函数的性质	(70)
一	递推公式	(70)
二	本征值和零点	(71)
三	贝塞尔函数的正交关系	(74)
四	贝塞尔函数的模	(77)
五	富里哀—贝塞尔级数	(79)
§ 3.5	$J_n(x)$ 的母函数与加法公式	(80)
§ 3.6	球贝塞尔函数 $j_e(x)$, $n_e(x)$, $h_e^{(1)}(x)$, $h_e^{(2)}(x)$	(82)
一	定义	(82)
二	本征值问题	(84)
三	半奇数阶贝塞尔函数	(84)
§ 3.7	变形 (虚宗量) 贝塞尔函数 ($I_n(x)$)	(86)
一	定义	(86)
二	性质	(88)
§ 3.8	开耳芬 (Kelvin) 函数	(92)
§ 3.9	贝塞尔函数的积分公式	(94)
§ 3.10	含贝塞尔函数的定积分	(97)
一	第一索宁 (Sonine) 有限积分公式	(97)
二	韦伯-李普兹希积分公式	(98)
§ 3.11	可以化为贝塞尔方程的微分方程	(103)
§ 3.12	贝塞尔函数的渐近表达式和数字计算示例	(107)
第四章	贝塞尔函数的应用	(111)
§ 4.1	两种不同电导率空间中点源场的值	(111)

§ 4.2	具有 n 层电性水平层的地表面点源场的电位分布.....	(118)
§ 4.3	半空间电性层电导率随深度变化时点源场的电位分布.....	(130)
§ 4.4	中间层电导率 (σ_2) 变化的三层水平层点电源的电位分布.....	(135)
§ 4.5	在非均匀的各向异性地层中点电源的位.....	(142)
§ 4.6	在钻井中点电极的电位分位.....	(147)
§ 4.7	均匀交变电磁场中水平园柱体的解.....	(152)
§ 4.8	地面导线环电流产生的电磁场.....	(159)
§ 4.9	交流电通过园柱体的趋肤效应.....	(167)
§ 4.10	垂直磁偶极子的场强矢量表达式.....	(173)
§ 4.11	园盘形的接地电阻.....	(180)
第五章	勒让德 (Legendre) 函数	(183)
§ 5.1	二阶常微分方程的级数解法.....	(184)
一	常点邻域的级数解.....	(184)
二	正则奇点邻域中的级数解法.....	(191)
§ 5.2	勒让德多项式.....	(196)
一	勒让德多项式的微分 (洛德利格斯 Rodrigues 公式) 和积分 (拖列夫利积分、拉普拉斯积分) 表示式.....	(196)
二	勒让德多项式的某些性质.....	(198)
§ 5.3	勒让德多项式的母函数与递推公式.....	(199)
一	母函数.....	(199)
二	递推公式.....	(201)
§ 5.4	勒让德多项式的正交性.....	(203)
一	正交关系.....	(203)
二	勒让德多项式的模.....	(204)
三	广义富里哀级数.....	(205)
§ 5.5	缔合勒让德函数.....	(207)
一	缔合勒让德函数的引出.....	(207)

二	缔合勒让德函数的微分, 积分表达式	(210)
三	递推公式	(212)
四	缔合勒让德函数的正交性	(213)
§ 5.6	球函数	(218)
§ 5.7	勒让德多项式的根及零值	(224)
§ 5.8	函数展为勒让德多项式表示的级数	(226)
§ 5.9	斯特姆—刘维本征值问题	(228)
第六章	勒让德函数的应用	(236)
§ 6.1	均匀电流场中的导体球	(236)
§ 6.2	在点源电流场中的导体球	(242)
一	供电极在球外的情形	(242)
二	理想导体球的情况	(245)
三	供电极在半球形域外的视电阻率	(248)
四	供电极在球内的情形	(253)
五	供电极在半球形域内的视电阻率	(259)
§ 6.3	圆环和圆盘的位	(262)
§ 6.4	高斯地磁理论	(265)
§ 6.5	通过两接地点电极的直流场	(269)
§ 6.6	物质体的引力位	(272)
§ 6.7	点电源场中的多层浸染球壳的电位分布	(276)
§ 6.8	均匀“极化”球体的电场	(282)
§ 6.9	波动方程的空间形式解	(285)
第七章	拉米函数	(293)
§ 7.1	椭球坐标	(293)
§ 7.2	椭球坐标系中的拉普拉斯方程表达式	(296)
§ 7.3	拉米方程	(300)
§ 7.4	拉米方程的积分	(302)
§ 7.5	拉米函数的正交性	(310)
§ 7.6	按照拉米函数展开的级数	(313)
§ 7.7	第二类拉米函数	(315)
§ 7.8	椭球内部与外部的位函数	(319)

第八章	拉米函数的应用	(327)
§ 8.1	均匀椭球体在均匀磁场中的磁化强度	(327)
§ 8.2	均匀电场中椭球体的位	(343)
§ 8.3	椭球体电容的测定	(349)
第九章	运算微积及其应用	(354)
§ 9.1	富里叶变换 (富氏变换)	(354)
一	富里叶级数与富里叶积分	(354)
二	富里叶变换	(359)
三	举例	(360)
§ 9.2	富里叶变换的性质	(364)
一	线性	(364)
二	平移	(364)
三	伸缩	(365)
四	翻转	(365)
五	微分	(365)
六	积分	(365)
七	对称 (或对偶)	(365)
八	共轭	(365)
九	奇偶虚实	(365)
十	卷积 (或褶积)	(366)
十一	巴什瓦等式与能谱密度	(366)
§ 9.3	δ 函数和它的富里叶变换	(368)
一	脉冲函数与 δ 函数	(368)
二	δ 函数的基本性质	(370)
三	δ 函数的富里叶变换	(370)
§ 9.4	二维、三维富里叶变换	(373)
§ 9.5	微分方程的富氏变换法	(376)
§ 9.6	离散富里叶变换	(386)
一	无限离散序列	(386)
二	有限离散序列	(389)
三	离散富里叶变换与褶积	(393)

四	二维有限离散富里叶变换.....	(395)
§ 9.7	富里叶变换与线性滤波.....	(396)
一	线性平移不变滤波器.....	(396)
二	脉冲响应函数与传输函数.....	(397)
三	滤波的运算方法.....	(398)
§ 9.8	富里叶变换在位场转换中的应用.....	(399)
一	重力位场的变换.....	(400)
二	磁力位场的变换.....	(404)
§ 9.9	拉普拉斯变换 (拉氏变换)	(408)
一	从富氏变换到拉氏变换.....	(408)
二	拉氏变换的存在问题.....	(410)
三	反拉氏变换, 复反演积分的级数公式.....	(411)
§ 9.10	拉氏变换的性质.....	(415)
§ 9.11	微分方程拉氏变换解法.....	(418)
参考文献		(422)

第一章 绪 论

在众多的学科中，人们常常需要研究位场的问题。例如在地球物理探测中，就需要研究重力场、磁场或电场等它们的场强度或势在空间的分布状态，或者是研究电磁波（或弹性波）的电场强度和磁感应强度在空间和时间中的变化状况。按所研究的对象，前者只涉及空间位置 (x, y, z) 的变化，而后的自变数还需要加入时间 t 。概而言之，即在已知物理场的某些规律下，来建立和解算某一描述场的分布状态的物理量 u ，它在给定的空间 (x, y, z) 和时间 t 中如何变化。以数学的语言表示，即求解函数 $u(x, y, z)$ ，或 $u(x, y, z, t)$ 。我们知道，这一过程在数学上即是求解偏微分方程。

从数学的角度来看，一些主要的微分方程按它们的形式可以归纳为几种简单类型，它们之间紧密联系着。在处理这些类型方程求解问题时，从数学上可以方便的把它们统一进行考虑。然而这些方程类型所代表的物理问题。却有着它们各自的含义。这是因为它们受到各自的定解条件所规定。

在下面，本章将简要介绍上述内容的基本理论和知识。

§ 1.1 数学场论

为了描述某一物理现象的特定性质或状态，人们在特定空间域中（一个体积 V 中或一个曲面 S 上）定义一个或一组多元函数。而数学场论就是研究这一个或一组多元函数。这种函数的自变量一般是场中点的坐标和时间变量 t 。

对于不随时间而变的场叫做稳定场，随时间而变的场叫做非稳场。

数学场可以分为标量场、矢量场和张量场，而前二者都可以统一在张量场的名下，只是其秩数不同罢了。

一、标量场 $u = u(x, y, z)$ 的梯度

(1) 方向导数

场 u 在 P 点沿 $\vec{l}_0$ （单位矢量）方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$$

(2) 梯度

场 u 在 P 点的梯度为

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \vec{n}$$

$$\text{或 } \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (1-1)$$

式中 $\vec{n}$ 是过 P 点等值面 $u=c$ 的法线单位矢量, $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 表示 x 、 y 、 z 轴上的单位矢量, 其

梯度方向: 与过 P 点等值面垂直, 且指向 u 增加的一方, 是函数 u 变化最快的方向;

梯度模: 等于函数 u 沿法线 n 的方向导数, 即

$$|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (1-2)$$

(3) 梯度在某一方向上的投影等于该方向上的方向导数,

即
$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u) \cdot \vec{l}_0$$

(4) $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2$

(5) $\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1$

总的说, 一个标量场 u 的梯度 $\text{grad } u$, 是从原标量场求出的矢量场 (矢量导数场)。在这里梯度是一个数学概念, 只有当我们给定标量场 u 是某一物理场时, 则 $\text{grad } u$ 才赋予一具体的物理意义。例如 u 代表静电场的电位场时, $-\text{grad } u$ 表示该静电场的电场强度。又如在地热学中, 如标量场 u 表示为无限介质中的温度场时, 则各点的 $-\text{grad } u$ 的方向就是该点热量流动的方向。

二、矢量场 $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ 的散度

(1) 通量

场 $\vec{A}$ 在曲面 S 上的通量为

$$\phi = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i [\vec{A}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i] = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

若曲面 S 是闭合的，其 $\vec{n}$ 通常代表 S 的向外法线，则通量为

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

(2) 散度

场 $\vec{A}$ 在 P 点的散度为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \delta V \rightarrow 0}} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS}{\delta V}$$

$$\text{或 } \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-3)$$

式中 S 是包围 P 点的一个闭曲面， δV 是 S 所围域的体积。

矢量场 $\vec{A}$ 的散度是一个标量(场)。例如，在电学中有

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

形象地说就是在电场中一点电场强度 $\vec{E}$ 的散度

相当于从该点发出的每单位体积的电力管数(电场强度通量)，其数值就等于该点的电荷体密度与 ϵ_0 (真空的电介常数)的比值。 ρ 的正负决定了散度的正负，若为正，则表示该点为源头，若为负，则为尾间，如为零则表示电力管只是经过该点罢了。

(3) 奥高公式

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dV$$

式中 V 是曲面 S 所围成的空间域

$$(4) \operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$$

$$(5) \operatorname{div}(u \vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u$$

$$(6) \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

三、矢量场 $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ 的旋度

(1) 环流

场 $\vec{A}$ 在闭合迴路 l (闭合曲线) 上的环流为

$$C_l = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \vec{\tau}_i \Delta l_i = \oint_l \vec{A} \cdot \vec{\tau} dl$$

式中 $\vec{\tau}$ 为闭曲线 l 的切线单位矢量。

(2) 矢量场 $\vec{A}$ 的旋度

过 P 点画一个小平面, 其面积是 δS , 这小平面的边界线构成一个回路 l , 任意规定了 l 的绕行方向, 并按右手螺旋法规则定出小平面的单位正法线 $\vec{n}$ 。这样, 就可求出和 $\vec{n}$ 相对应的环流面密度

$$\sigma_n = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{A} \cdot \vec{\tau} dl}{\delta S}$$

转动小平面, 改变 $\vec{n}$ 的方向, 找出 σ_n 的最大值 $\sigma_n^{(m)}$, 这时法线位置用 $\vec{n}^{(m)}$ 表示, 矢量场 $\vec{A}$ 在 P 点的旋度为 (写作 $\operatorname{rot} \vec{A}$ 或 $\operatorname{curl} \vec{A}$)

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \sigma_n^{(m)} \vec{n}^{(m)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{或 } \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-4)
 \end{aligned}$$

可知矢量 $\vec{A}$ 的旋度 $\operatorname{rot} \vec{A}$ 乃是一个矢量场。

(3) 斯托克斯公式

$$\oint_l \vec{A} \cdot \vec{\tau} dl = \int_S (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}) dS$$

式中 S 表示所在回路 l 上的一个曲面，

$$(4) \operatorname{rot} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$(5) \operatorname{rot} (u \vec{A}) = u \operatorname{rot} \vec{A} + (\operatorname{grad} u) \times \vec{A}$$

$$(6) \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

$$(7) \operatorname{div} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

四、有势场 (保守场)

具有下列条件的场称为有势场。

(1) 矢量场 $\vec{A}$ 是某一函数 $u(x, y, z)$ 的梯度

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u$$