任怀宗 师先进 编

特殊函数及其应用

中南工业大学出版社

特殊函数及其应用

任怀宗 师先进 编

中南工业大学出版社

1986·长沙

内 容 简 介

本书主要介绍贝塞尔函数、勒让德函数、拉米函数几种特殊函数以及运算微积。而其重点是在通过一些物理问题来阐述这些函数的应用。

本书可供高等学校应用地球物理专业高年级学生和研究生用作教材或主要参考书。也可供物理或其它有关专业的学生以及从事这些方面的科研工作者参考。

特殊函数及其应用

任怀宗 师先进 编

责任编辑 肖粹高

*

中南工业大学出版社出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印刷

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：787×1092 1/32， 印张：13.5 字数：315千字

一九八六年十二月第一版 一九八六年十二月第一次印刷

印数：0001——1500册

*

国际标准书号：ISBN 7-81020—003-8/O·001

统一书号：13442·012 定价：2.15元

前　　言

在应用数学中，特殊函数是出现在偏微分方程的求解中。即应用在寻求满足于给定的微分方程和边界条件的某一函数的过程中，这就是所谓求解数学物理微分方程。显然，这一问题也深刻体现了数学与物理问题紧密的结合应用。

当前有些工科大学毕业生在阅读更近代的有关专业书籍文献时，在理论上常常遇到的难点之一，便是有关特殊函数应用这方面的问题。尤其对从事应用地球物理学科的同志来说，特殊函数及其应用更是对理解和应用有关的理论和进行科学研究工作必不可少的基础知识。为了适应这方面的需要，作者在七十年代末期为冶金部地球物理勘探工程师进修班，以及以后各届的物探硕士研究生开设了特殊函数及其应用一课。其主要目的不在于诸特殊函数本身的数学论证，而在于阐述利用这一专门数学工具来解决应用地球物理学中有关场的理论问题。本书是在该课程原有任怀宗所编讲义的基础上编写成的。全书共分九章，第一章叙述基础知识，第二章叙述以后要用到的一些常用函数，第三章至第八章，叙述了贝塞尔函数、勒让德函数、拉米函数、以及叙述相应这三种函数应用的各一章，又由于在解决位场等问题时，常常要用到一些变换关系，从方便于应用和学习出发，故在最后简要的编写了第九章运算微积及其应用一章。

本书第一章和第九章由师先进编写，其余七章由任怀宗编写，最后由任怀宗和师先进共同审阅。

感谢武汉地质学院北京研究生部谭承泽教授，长春地质学院申宁华教授、中南工业大学程方道教授，桂林冶金地质学院雷林源副教授审阅本书原稿讲义和提出宝贵的意见。以及敦促其出版鼓励。

感谢刘代志同志承担本书的抄缮、校对和绘图的工作，这些给予作者十分有力的协助。

感谢中南工业大学物探教研室和出版社的同志们，对本书的编写和出版所给予的鼓励和支持。

限于作者水平，书中缺点和错误在所难免，敬希读者们予以指正。

编　　者

一九八六年五月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　绪　　论

在众多的学科中，人们常常需要研究位场的问题。例如在地球物理探测中，就需要研究重力场、磁场或电场等它们的场强度或势在空间的分布状态，或者是研究电磁波（或弹性波）的电场强度和磁感应强度在空间和时间中的变化状况。按所研究的对象，前者只涉及空间位置（x、y、z）的变化，而后者的自变数还需要加入时间 t。概而言之，即在已知物理场的某些规律下，来建立和解算某一描述场的分布状态的物理量 u，它在给定的空间（x、y、z）和时间 t 中如何变化。以数学的语言表示，即求解函数 $u(x、y、z)$，或 $u(x、y、z、t)$。我们知道，这一过程在数学上即是求解偏微分方程。

从数学的角度来看，一些主要的微分方程按它们的形式可以归纳为几种简单类型，它们之间紧密联系着。在处理这些类型方程求解问题时，从数学上可以方便的把它们统一进行考虑。然而这些方程类型所代表的物理问题。却有着它们各自的含义。这是因为它们受到各自的定解条件所规定。

在下面，本章将简要介绍上述内容的基本理论和知识。

§ 1.1　数学场论

为了描述某一物理现象的特定性质或状态，人们在特定空间域中（一个体积V中或一个曲面S上）定义一个或一组多元函数。而数学场论就是研究这一个或一组多元函数。这种函数的自变量一般是场中点的坐标和时间变量 t 。

对于不随时间而变的场叫做稳定场，随时间而变的场叫做非稳场。

数学场可以分为标量场、矢量场和张量场，而前二者都可以统一在张量场的名下，只是其秩数不同罢了。

一、标量场 $u=u(x, y, z)$ 的梯度

(1) 方向导数

场 u 在P点沿 $\vec{l}_0$（单位矢量）方向的**方向导数**为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$$

(2)梯度

场 u 在P点的梯度为

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial n} \vec{n}$$

或

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \qquad (1-1)$$

式中$\vec{n}$是过P点等值面$u=c$的法线单位矢量，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$表示x、y、z轴上的单位矢量，其

梯度方向：与过P点等值面垂直，且指向u增加的一方，是函数u变化最快的方向；

梯度模：等于函数u沿法线n的方向导数，即

$$|\text{grad}\ u|=\frac{\partial u}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{1-2}$$

(3) 梯度在某一方向上的投影等于该方向上的方向导数，

即 $\frac{\partial u}{\partial l}=(\text{grad}\ u)\cdot\vec{l}_0$

(4) $\text{grad}(u_1+u_2)=\text{grad}\ u_1+\text{grad}\ u_2$

(5) $\text{grad}(u_1u_2)=u_1\,\text{grad}\ u_2+u_2\,\text{grad}\ u_1$

总的说，一个标量场u的梯度 grad u，是从原标量场求出的矢量场（矢量导数场）。在这里梯度是一个数学概念，只有当我们给定标量场u是某一物理场时，则 grad u 才赋予一具体的物理意义。例如u代表静电场的电位场时，$-\text{grad}\ u$表示该静电场的电场强度。又如在地热学中，如标量场u表示为无限介质中的温度场时，则各点的$-\text{grad}\ u$的方向就是该点热量流动的方向。

二、矢量场$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{K}$的散度

(1) 通量

场$\vec{A}$在曲面S上的通量为

$$\phi = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i [\vec{A}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i] = \int_s \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

若曲面S是闭合的，其$\vec{n}$通常代表S的向外法线，则通量为

$$\phi = \oint_s \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

(2) 散度

场$\vec{A}$在P点的**散度**为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\substack{S \to 0 \\ \delta V \to 0}} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot \vec{n} dS}{\delta V}$$

或 $$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1-3)$$

式中S是包围P点的一个闭曲面，δV是S所围域的体积。

矢量场$\vec{A}$的散度是一个标量（场）。例如，在电学中有$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$，形象地说就是在电场中一点电场强度$\vec{E}$的散度相当于从该点发出的每单位体积的电力管数（电场强度通量），其数值就等于该点的电荷体密度与ε_0（真空的电介常数）的比值。ρ的正负决定了散度的正负，若为正，则表示该点为源头，若为负，则为尾闾，如为零则表示电力管只是经过该点罢了。

(3) 奥高公式

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dV$$

式中V是曲面S所围成的空间域

(4) $\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B})=\operatorname{div}\vec{A}+\operatorname{div}\vec{B}$

(5) $\operatorname{div}(u\vec{A})=u\operatorname{div}\vec{A}+\vec{A}\cdot\operatorname{grad}u$

(6) $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

三、矢量场$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$的旋度

(1) 环流

场$\vec{A}$在闭合迴路 l（闭合曲线）上的**环流**为

$$C_l=\lim_{\Delta l_i\to 0}\sum_i \vec{A}_i\cdot\vec{\tau}_i\,\Delta l_i=\oint_l \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,dl$$

式中$\vec{\tau}$为闭曲线 l 的切线单位矢量。

(2) 矢量场$\vec{A}$的旋度

过P点画一个小平面，其面积是δS，这小平面的边界线构成一个回路 l，任意规定了 l 的绕行方向，并按右手螺旋法规则定出小平面的单位正法线$\vec{n}$。这样，就可求出和$\vec{n}$相对应的**环流面密度**

$$\sigma_n=\lim_{l\to 0}\frac{\oint_l \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,dl}{\delta S}$$

转动小平面，改变$\vec{n}$的方向，找出σ_n的最大值$\sigma_n^{(m)}$，这时法线位置用$\vec{n}^{(m)}$表示，矢量场$\vec{A}$在P点的**旋度**为（写作$\operatorname{rot}\vec{A}$或$\operatorname{curl}\vec{A}$）

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\sigma_n^{(m)}\vec{n}^{(m)}$$

或 $$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \qquad (1-4)$$

可知矢量$\vec{A}$的旋度 rot $\vec{A}$ 乃是一个矢量场。

(3) 斯托克斯公式

$$\oint_l \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,dl=\int_s(\vec{n}\cdot\mathrm{rot}\vec{A})dS$$

式中S表示所在回路 l 上的一个曲面，

(4) $\mathrm{rot}\,(\vec{A}+\vec{B})=\mathrm{rot}\,\vec{A}+\mathrm{rot}\vec{B}$

(5) $\mathrm{rot}\,(u\vec{A})=u\,\mathrm{rot}\vec{A}+(\mathrm{grad}u)\times\vec{A}$

(6) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A})=0$

(7) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$

四、有势场（保守场）

具有下列条件的场称为有势场。

(1) 矢量场$\vec{A}$是某一函数$u(x,\ y,\ z)$的梯度

$$\vec{A}=\mathrm{grad}\,u$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com