

高等学校工程专科教材

结 构 力 学

薛光瑾 主编

薛光瑾 李世昌 陈国杰 编

高等教育出版社

前 言

本书是根据国家教育委员会审订的高等工程专科学校土建类《结构力学》(多学时)教学基本要求编写的,是列入国家教委大专教材规划的通用教材,适合工业与民用建筑、水利、港航与道桥等专业使用。

全书共分十二章。主要包括:平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、结构的位移计算、力法、超静定拱的计算、位移法、力矩分配法与近似法、矩阵位移法、结构在移动荷载作用下的计算和结构的动力计算。此外,书中还编写了超静定结构计算与结构计算简图的补充讨论与平面刚架静力计算程序设计及应用,并附有BASIC与FORTRAN两种语言的平面刚架源程序,可供各校选用。书中有“*”号的章节是不同专业的选学内容。

本书为了体现专科特色和满足高等专科学生的需要,在选材上加强了针对性和实用性;在叙述上则力求简明扼要、通俗易懂。

本书主编为长春建筑高等专科学校薛光瑾副教授,参加编写工作的有南京航务工程专科学校李世昌教授(第三章、十一章、附录Ⅱ)、华南建设学院(东院)陈国杰副教授(第六章、第八章及第三章的前期编写工作),薛光瑾副教授(第一章、二、四、五、七、九、十、十二章、附录Ⅰ)。

1992年6月国家教委高等工程专科力学课程教材编审组 and 高等教育出版社在广州召开了审稿会,出席审稿会的有南昌水利水电专科学校雷克昌教授、黑龙江水利水电专科学校汤瑞瑾副教授、华南建设学院(西院)钟桂岳副教授、南昌水利水电专科学校傅赣清讲师和高等教育出版社余美茵编审。与会同志对本书稿提出了许多宝贵意见。

本书审阅人有雷克昌、汤瑞瑾、傅赣清。由钟桂岳、北方交通大学赵如骥副教授进行了复审。复审中又提出很多具体的宝贵意见。在本书稿编写的过程中,还得到兄弟院校很多同志的帮助与支持,在此一并感谢。

由于编者水平有限,书中错误不当之处恳请使用本书的师生与读者批评指正。

编 者

1992.12

(京) 112号

内 容 提 要

本书是根据国家教育委员会审订的高等学校工程专科土建类《结构力学》(多学时)教学基本要求编写的,是列入国家教委大专教材规划的通用教材,适合高等专科学校土建、水利、港航与道桥等专业作教材,也可供大专函授、自学及有关工程技术人员参考。

全书共12章,分述:结构几何组成分析,静定结构内力及位移计算,计算超静定结构的力法,位移法,力矩分配法和近似法,影响线,矩阵位移法,结构的动力计算,以及包含平面刚架计算程序的附录等。各章中附有一定数量的例题和习题,供读者学习和选作。对不同专业选学或难度较大的例题加有•号,便于选择和引起重视。

高等学校工程专科教材

结 构 力 学

薛光瑾 主编

薛光瑾 李世昌 陈国杰 编

•

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

文 字 大 ○ = 厂 印 装

•

开本787×1092 1/16 印张26.75 字数660 000

1994年6月 第1版 1995年3月第2次印刷

印数 6 131—17 150

ISBN 7-04-004686-5/TU·58

定价 11.00元

目 录

第一章 绪论	1		
§ 1-1 结构力学的研究对象和任务	1		
§ 1-2 结构的计算简图及其分类	3		
§ 1-3 结构上的荷载及其分类	7		
第二章 平面体系的几何组成分析	9		
§ 2-1 概述	9		
§ 2-2 关于刚片、自由度和约束的概念	9		
§ 2-3 几何不变体系的基本组成规则 及瞬变体系的概念	12		
§ 2-4 几何组成分析方法举例	14		
§ 2-5 体系的几何组成与静定性的关系	16		
思考题	17		
习题	17		
第三章 静定结构的内力计算	20		
§ 3-1 静定梁	20		
§ 3-2 静定平面刚架	28		
§ 3-3 三铰拱	34		
§ 3-4 静定平面桁架	41		
§ 3-5 静定组合结构	53		
§ 3-6 静定结构的特性	56		
思考题	57		
习题	53		
第四章 静定结构的位移计算	67		
§ 4-1 概述	67		
§ 4-2 变形体虚功原理	68		
§ 4-3 结构位移计算的一般公式	74		
§ 4-4 静定结构在荷载作用下的位移 计算	77		
§ 4-5 图乘法	82		
§ 4-6 静定结构由于支座移动、温度 变化所引起的位移	89		
§ 4-7 互等定理	93		
思考题	95		
习题	96		
第五章 力法计算超静定结构	103		
§ 5-1 超静定结构的组成与超静定次 数的确定	103		
§ 5-2 力法的基本原理与力法的典型 方程	106		
§ 5-3 力法的计算步骤与举例	110		
§ 5-4 结构的对称性利用	121		
§ 5-5 超静定结构的位移计算与最后 内力图的校核	131		
§ 5-6 温度改变与支座移动时超静定 结构的计算	134		
思考题	139		
习题	140		
第六章 超静定拱的计算	146		
§ 6-1 超静定拱概述	146		
§ 6-2 两铰拱的计算	147		
* § 6-3 无铰拱的计算	152		
思考题	163		
习题	163		
第七章 用位移法计算超静定结构	166		
§ 7-1 位移法的基本概念	166		
§ 7-2 等截面直杆的转角位移方程	167		
§ 7-3 位移法的基本未知量与基本体系	175		
§ 7-4 位移法的典型方程与计算步骤	178		
§ 7-5 位移法计算举例	181		
§ 7-6 对称结构的计算	189		
§ 7-7 直接利用平衡条件建立位移法 方程	192		
* § 7-8 等高排架的计算——剪力分配 法	194		
思考题	200		
习题	200		
第八章 力矩分配法与近似法	205		
§ 8-1 力矩分配法的基本概念	205		
§ 8-2 多结点的力矩分配	211		
§ 8-3 无剪力分配法	218		
§ 8-4 用近似法计算多跨多层刚架	221		
思考题	228		

习题	228	§ 11-3 单元刚度方程和单元刚度矩阵.....	291
第九章 超静定结构计算方法与结构		§ 11-4 单元刚度矩阵的坐标变换.....	296
计算简图的补充讨论.....	233	§ 11-5 结构刚度方程和结构刚度矩	
§ 9-1 超静定结构基本计算方法比较		阵(后处理法)	302
与选择.....	233	§ 11-6 非结点荷载的处理.....	312
* § 9-2 超静定结构计算方法的联合应用...	234	§ 11-7 直接刚度法计算步骤和计算	
§ 9-3 超静定结构的特性.....	236	示例.....	322
* § 9-4 结构计算简图的补充讨论.....	237	* § 11-8 结构刚度方程和结构刚度矩	
第十章 结构在移动荷载作用下的计		阵(先处理法).....	333
算	247	思考题.....	342
§ 10-1 影响线的概念.....	247	习题.....	342
§ 10-2 静力法作简支梁、外伸梁的影		第十二章 结构的动力计算.....	346
响线.....	248	§ 12-1 概述.....	346
§ 10-3 间接荷载作用下的影响线.....	252	§ 12-2 单自由度体系无阻尼自由振动.....	349
§ 10-4 机动法作静定梁的影响线.....	254	§ 12-3 单自由度体系无阻尼强迫振动.....	355
* § 10-5 静力法作桁架影响线.....	257	§ 12-4 阻尼对单自由度体系振动的	
* § 10-6 铁路和公路的标准荷载制.....	261	影响.....	361
§ 10-7 影响线的应用.....	262	§ 12-5 两个自由度体系的自由振动.....	370
* § 10-8 换算荷载.....	272	§ 12-6 简谐荷载作用下两个自由度	
§ 10-9 简支梁的内力包络图与绝对		体系的强迫振动.....	381
最大弯矩.....	277	§ 12-7 自振频率的近似计算.....	387
§ 10-10 连续梁的影响线与包络图	281	思考题.....	393
思考题	285	习题.....	394
习题	285	附录 I 单阶柱系数表.....	398
第十一章 矩阵位移法	290	附录 II 平面刚架计算程序的编制	
§ 11-1 概述	290	与应用	400
§ 11-2 结构的离散化(单元的划分)...	290	主要参考书目	420

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务

在土木、建筑、水利、港口等类工程建筑物中，以一定方式组成，能承受和传递荷载并起到骨架作用的部分或体系称为结构。工业厂房中由屋架、梁、柱、基础等构件组成的结构（图1-1a），水工建筑中承受水压力的堤坝、闸门（图1-2），公路和铁路工程中支撑行车等荷载的桥梁（图1-3）、涵洞、隧道以及承受土压力的挡土墙等构筑物，都是结构的例子。

结构按几何特征可分为杆件结构、板壳结构和实体结构三大类。长度远大于其横截面尺寸的构件称为杆件。由若干杆件组成的结构称为杆件结构（如图1-1和图1-3所示）。由长度与宽度远大于其厚度的构件组成的结构称为板壳结构，形状呈平面状的为板，呈曲面状的为壳。长度、宽度和厚度为同量级尺寸的结构，则为实体结构。图1-4a所示为平面折板屋面结构，图1-

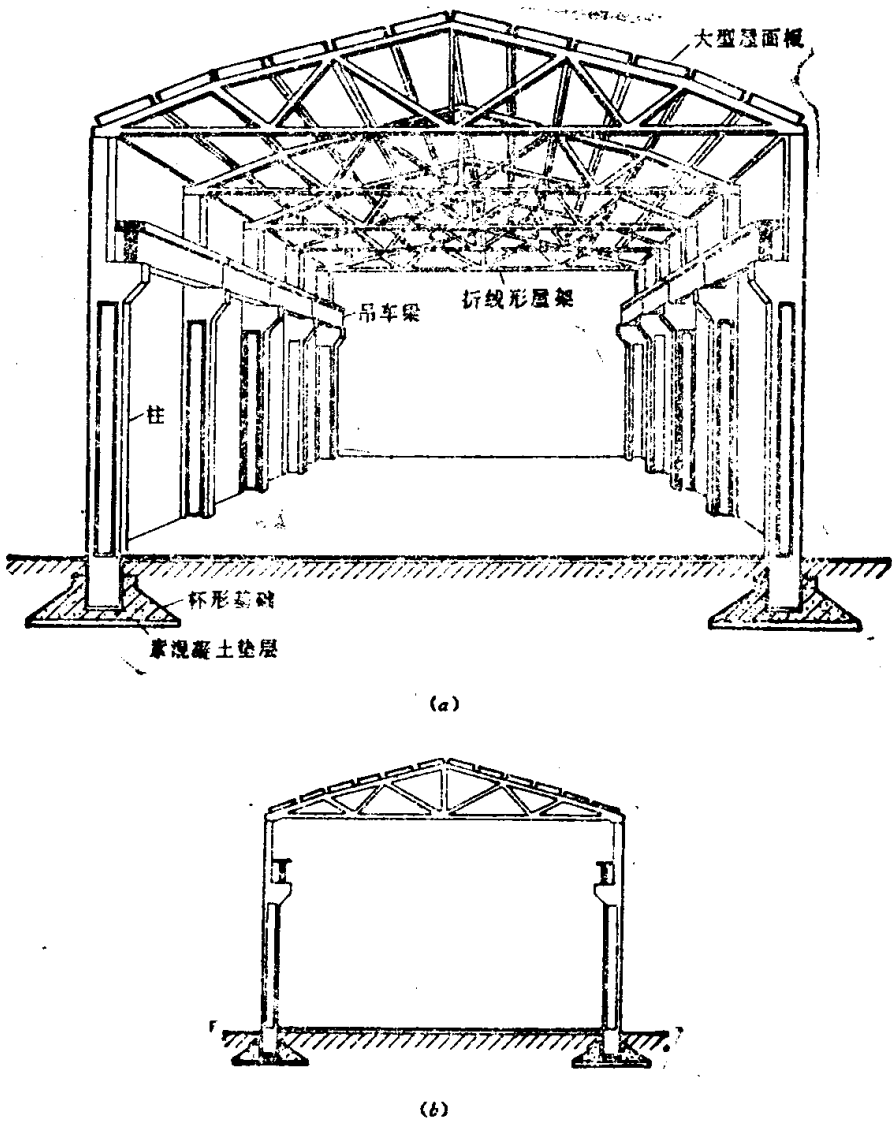


图 1-1

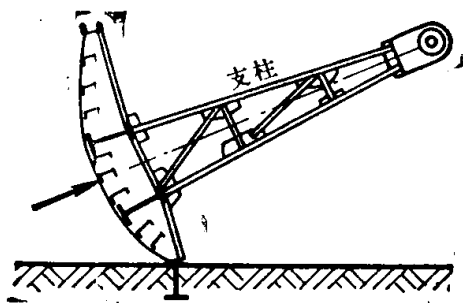


图 1-2

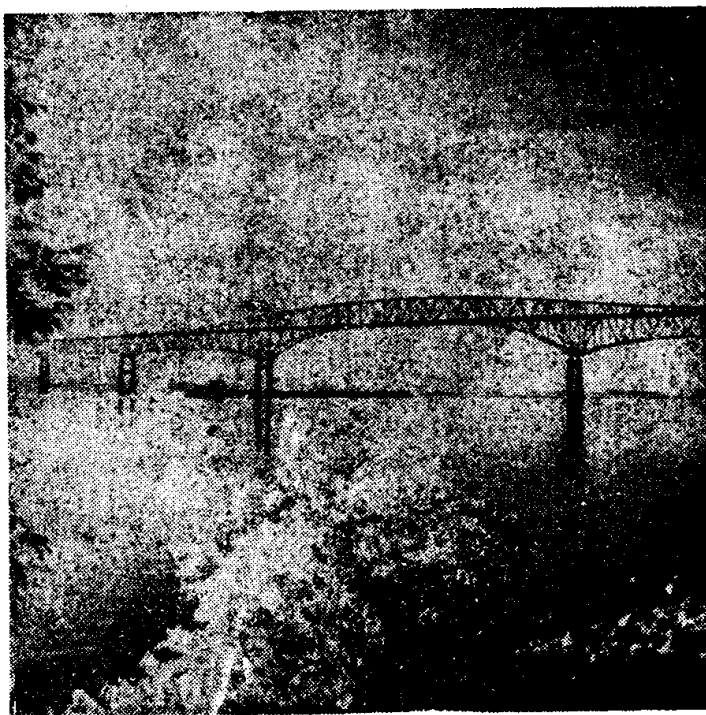


图 1-3

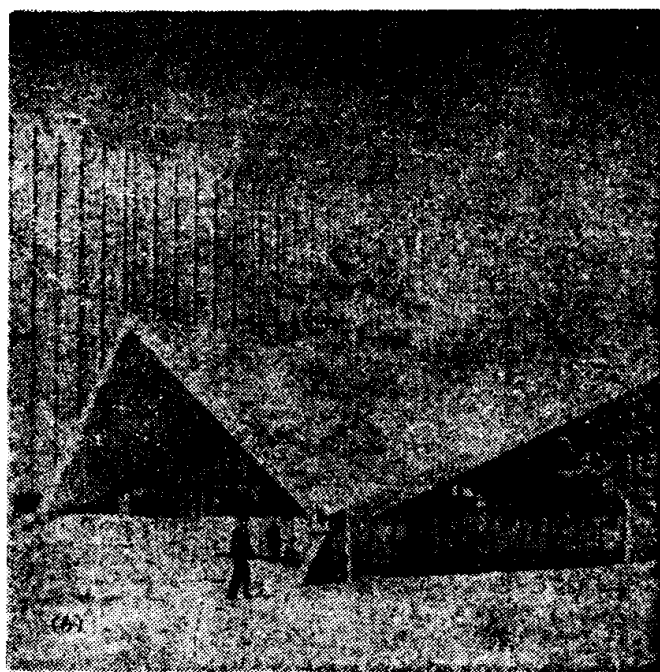
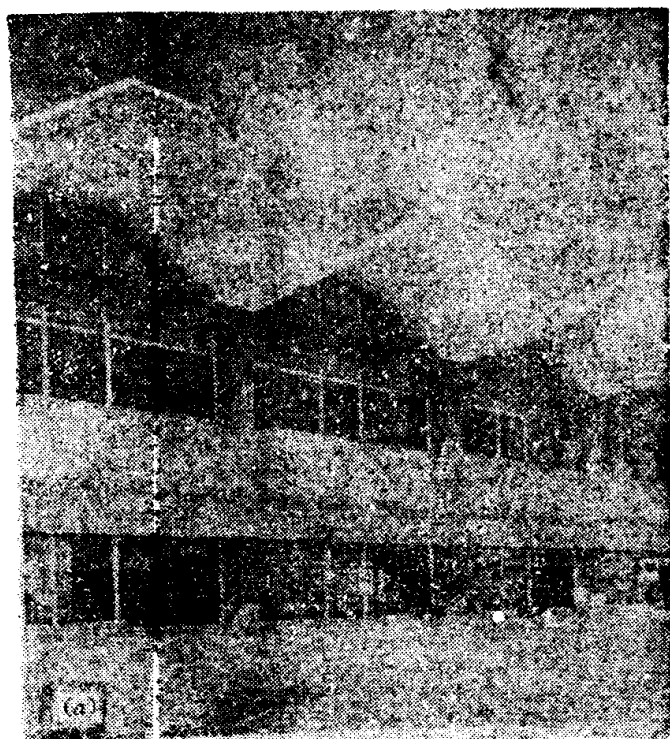


图 1-4

4b所示为双曲抛物面结构；图1-5所示重力坝，一般看作是实体结构。

结构力学与材料力学、弹性力学有着密切的联系，它们的任务基本相同，但在研究对象和侧重面上有所区别。材料力学的任务是研究外因作用对单个杆件的影响，即研究和计算单个杆件的强度、刚度和稳定性；弹性力学是以板壳、实体结构为主要研究对象，研究弹性体的应力、应变和位移的计算理论与方法；结构力学则是以杆件结构为主要研究对象，其基本任务包括以下几方面：

1. 研究结构的组成规律和合理形式;
2. 研究结构在荷载及其它外在因素作用下的内力分析, 为结构强度计算提供依据;
3. 研究结构在荷载与其它外在因素作用下引起的变形与位移, 为结构刚度计算提供依据;
4. 研究结构的稳定计算, 以保证结构的稳定性。

以上几方面, 无论对任何一方面的研究都涉及到内力和位移的计算。因此, 研究结构在各种外在因素作用下内力和位移的计算原理与方法是结构力学的主要内容。

结构力学是一门专业技术基础课, 在专业学习中占有重要的地位。它一方面与数学、理论力学、材料力学等先修课程有密切联系, 另一方面将为今后学习其它专业结构课程提供必要的基本理论和计算方法。

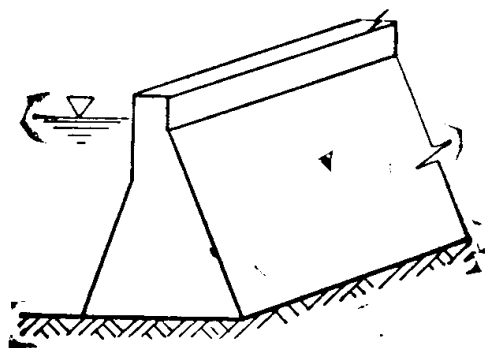


图 1-5

§ 1-2 结构的计算简图及其分类

一、结构的计算简图

由于实际结构的组成、受力和变形情况比较复杂, 影响力学分析的因素很多, 所以在作结构的力学分析时, 要完全按照结构的实际情况进行计算, 几乎是不可能的, 也是不必要的。考虑到影响结构力学分析的诸多因素中, 有影响大的主要因素, 有影响小的次要因素, 因此, 在进行结构的力学分析之前, 必须按计算精度的要求, 略去次要因素, 考虑主要因素, 把实际结构抽象和简化为既能反映结构实际受力情况又便于进行计算的模型, 这种简化了的用来代替实际结构的力学模型, 称为结构的计算简图。计算简图的选择是十分重要的, 它直接影响计算的工作量和精确度。因此, 对计算简图的选择必须持慎重态度。

计算简图的选择应遵循以下两个基本原则:

1. 尽可能反映实际结构的主要受力情况以及结构的构造和性能, 以保证计算的精度。
2. 略去次要因素, 使计算得到尽可能多的简化。

在选取计算简图时, 对实际结构可从下列几方面进行简化:

1. 结构的简化

结构的简化包括两方面内容: 一是结构体系的简化, 另一是结构杆件的简化。结构体系的简化是指把实际空间整体的结构, 在可能的条件下, 略去某些次要因素后, 简化或分解为若干平面结构。杆件的简化包括以下两点: 一是有些格构式杆件在计算中用实体杆件代替, 曲率不大的微曲杆用直杆或折杆代替; 另外是一根实际杆件一般可用杆件的轴线表示, 直杆用直线表示, 曲杆或拱等构件用曲线表示。

2. 结点的简化

结构中各杆件的相互连接处称为结点。结点通常可简化为刚结点和铰结点两类。

刚结点的特征是结点连接各杆不能绕结点自由转动, 即在结点处各杆端间的夹角始终保持不变。结点对杆端存在转动约束, 各杆端除产生轴力、剪力以外, 还产生杆端弯矩, 图1-6a

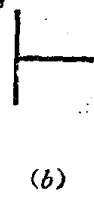
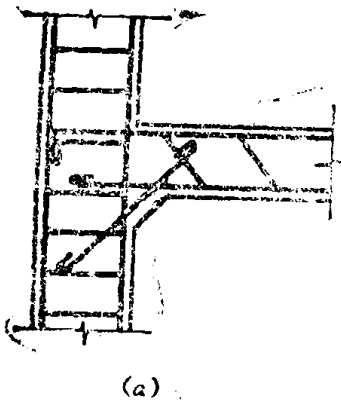


图 1-6

所示为一钢筋混凝土结构刚性结点的构造图，图1-6b为该刚性结点的简图。

铰结点又可分为完全铰结点与不完全铰结点。理想的完全铰结点的特征是它所连接的各杆都可以绕铰结点自由转动，即在结点处各杆件的夹角可以改变，不存在转动约束，不产生杆端弯矩也不传递弯矩。木屋架中的结点接近于铰结点(图1-7a)。图1-7a表示钢屋架的一个结点，虽然各杆件是以焊缝与垫板焊接在一起的，但为了简化和反映在结点荷载作用下桁架各杆的受力特

点，在计算简图中也取为完全铰结点。理想铰结点可用一个小圆圈表示，如图1-7b与d所示。

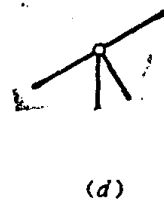
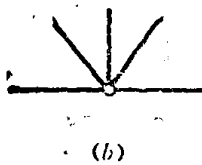
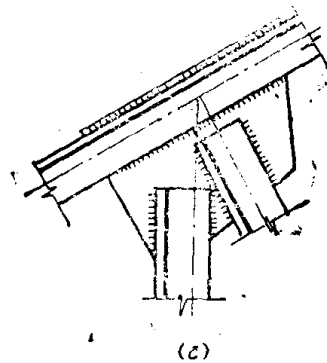
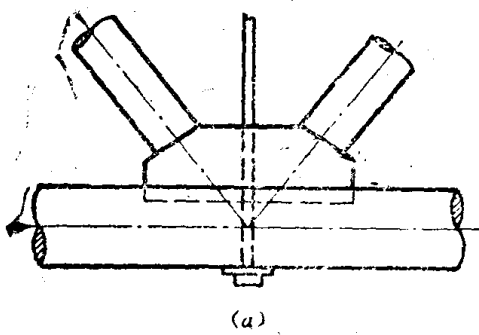


图 1-7

不完全铰是指在同一结点上某些杆件是刚性连接，而另一些杆件则是铰接的结点，如图1-8a、b所示。

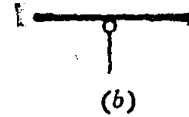
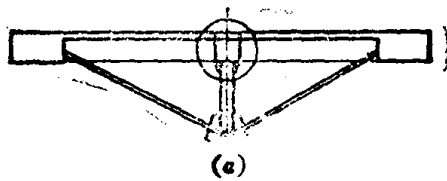


图 1-8

3 支座的简化

结构与基础或支承部分连接的装置，称为支座。平面结构的支座，通常有固定铰支座、可动铰支座、固定支座和定向支座四种，如图1-9所示。前三种支座在静力学与材料力学中已经熟悉，第四种为定向支座，其特征是杆件可沿某一指定方向移动，但杆端不产生转动。图1-9d所示定向支座，可沿水平方向移动，因而这种支座可以产生竖直方向的支座反力 Y 和支座反力矩 M 。

4. 荷载的简化

荷载是作用在结构上的主动力。实际结构构件上作用的荷载，一般是作用在构件内部的体力（如自重）以及作用在构件某面积上的面力（如风压力），但在计算简图中都需要把它们简化为作用在构件纵轴线上的线荷载、集中荷载或力偶。如梁的自重可简化为沿梁轴线方向分布的线荷载；楼板直接搁置在梁上，楼板传给梁的荷载也简化为沿梁轴线方向分布的线荷载。

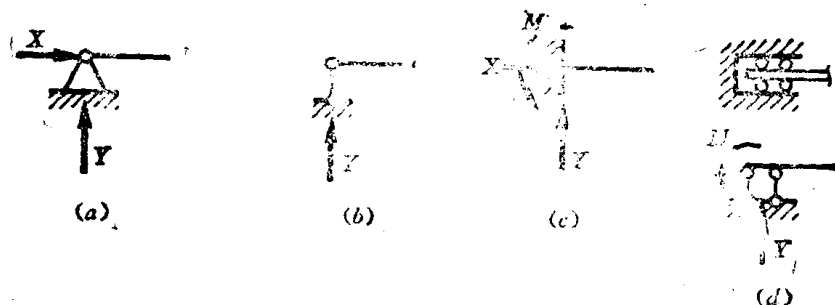


图 1-9

下面以图1-1a所示工业厂房为例，具体说明结构计算简图的简化方法。

该单层厂房结构是由许多横向平面单元（如图1-1b）通过各种纵向构件（如屋面板和吊车梁等）联系起来的复杂空间结构。由于各个横向平面单元沿厂房纵向是有规律地排列的，而且作用在结构上的荷载一般又是沿纵向均匀分布的，因此，在计算一个横向平面单元时，可不考虑整体空间作用的纵向影响，而将它们视为彼此独立的平面结构。作用在结构上的荷载，则通过纵向构件分配到各横向平面结构上。这样，就把一个空间结构分解为若干平面结构进行计算。这一简化过程即结构体系的简化。在这一简化过程中，略去纵向影响这一次要因素，对结果会有—定影响，但却反映了结构的主要受力特点。

其次是对各构件进行简化。柱用其轴线表示。屋架是格构式构件，其平面内刚度很大，整体可用—实体直杆代替，简图可用—直线表示。

屋架两端与柱顶的联结，常用螺栓联结或用焊接，使两柱顶之间不能发生相对线位移，但不能阻止柱顶的转动。因此这种联结点可简化为铰结点。柱下端如嵌入基础较深，联结牢固，可视为固定支座。这就是结点和支座的简化。

吊车梁传给柱的压力，因吊车梁与柱牛腿接触面积较小，可用集中力表示；柱子所受的水平风力可按平面单元负荷宽度化为沿柱长方向的均布线荷载。

作用在屋面上的风力可化作柱顶力。这就是荷载的简化。

综上所述，经过以上四个过程的简化，可获得厂房横向平面单元（一般称作排架）的计算简图，如图1-10所示。

在计算屋架各杆内力时，可把屋架单独取出。屋架与两柱顶的联接处，可分别视为固定铰支座和可动铰支座。屋架为平面杆系结构，屋架的各杆可用其轴线表示，并假定所有这些轴线都在同一平面内，且在每一结点处都相交于一点。这些交点就抽象地代替了实际的结点。根据力学分析和实测验证可知，当荷载只作用于结点时，屋架各杆的内力主要是轴力。弯矩和剪力都很小，故可把各个结点假定为理想的铰结点。于是得到屋架的计算简图如图1-11a所示。当屋架跨度不很大时，按这种计

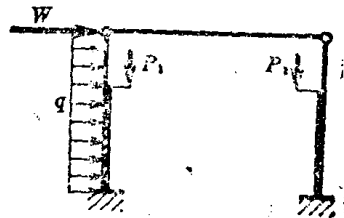


图 1-10

算简图所得到的各杆轴力与实际轴力比较接近。在有些情况下，除计算轴力（主内力）外，尚需验算由于杆端刚性约束作用所引起的弯矩和剪力（一般称为次内力），此时，屋架结点需化为刚性结点，计算简图如图1-11b所示。

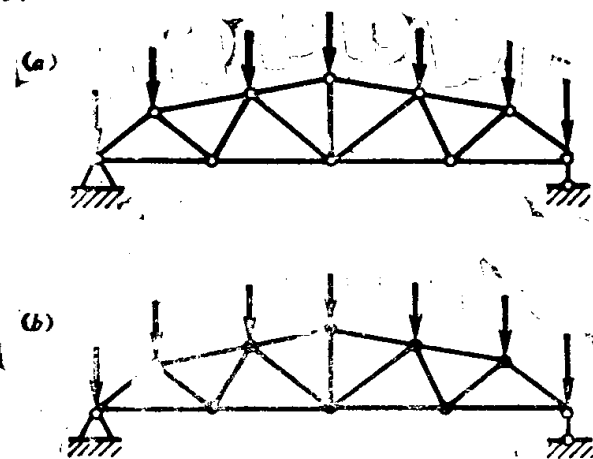


图 1-11

最后需要指出，计算简图确定后，在进行结构设计时，还应采取相应的一些构造措施，以使实际结构的内力分布和变形特点与计算简图的情形相符。

为了加强有关计算简图的一些知识，本教程将在学习了结构计算的基本方法之后，再对结构计算简图作进一步的补充讨论（详见*§9-4）。

二、平面杆件结构的分类

杆件结构按其杆件轴线和外力的空间位置，可分为平面杆件结构和空间杆件结构。有的空间杆件结构可化为平面杆件结构，有的则必须按空间杆件结构计算。本书仅限于研究平面杆件结构。平面杆件结构按其受力特性又可分为以下几种：

1. 梁——梁是以受弯为主的构件，它可以是单跨的（图1-12a、c），也可以是多跨的、连续的（图1-12b、d）。

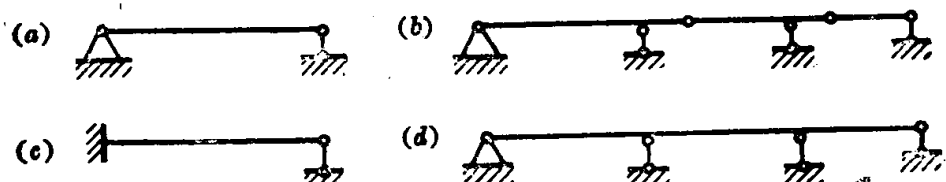


图 1-12

2. 拱——拱是一种推力结构，即在竖向荷载作用下不仅产生竖向支座反力而且还产生支座水平推力，并具有曲线形轴线的结构。拱结构可以是单跨的（图1-13a、b、c），也可以是多跨的（图1-13d）。

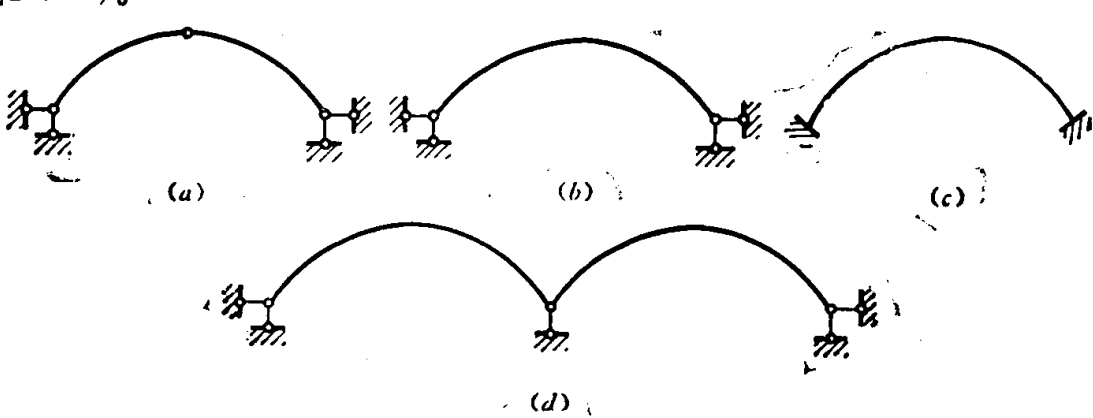


图 1-13

3. 平面桁架——平面桁架是在一个平面内的直杆铰接体系（图1-14a、b）。在同平面内的结点荷载作用下，各杆主要产生轴力。

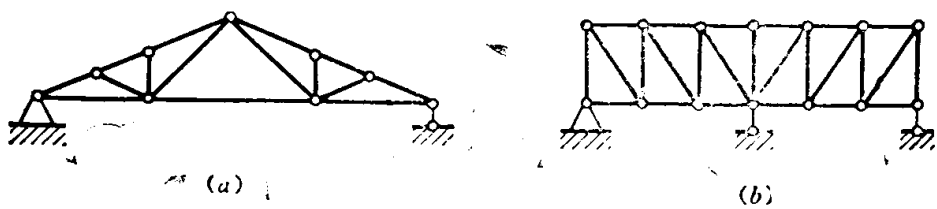


图 1-14

4. 平面刚架——平面刚架是由同一平面内的梁和柱组成的结构，其结点全部或部分为刚结点。刚架各杆主要承受弯矩，也承受剪力和轴力。平面刚架可以是单跨单层的（如图1-15a），也可以是多跨多层的（图1-15b、c）。

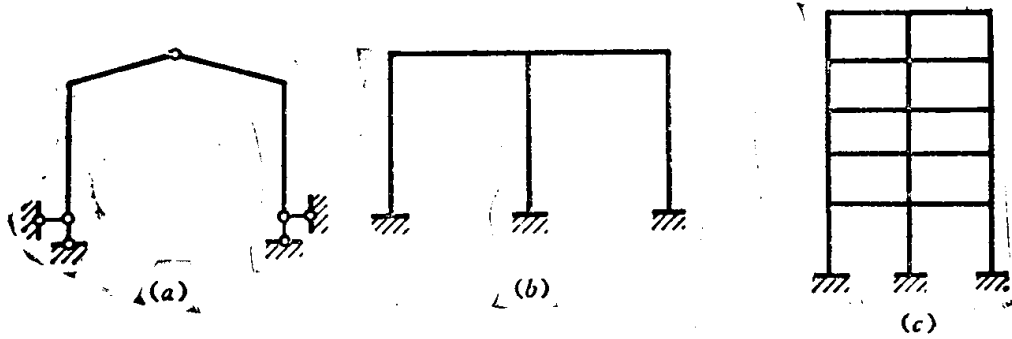


图 1-15

5. 组合结构——组合结构是由受力形式不同的两部分杆件组合而成的结构（图1-16a、b）。在这种结构中部分杆件只承受轴力，而另一部分杆件则同时还承受弯矩和剪力。

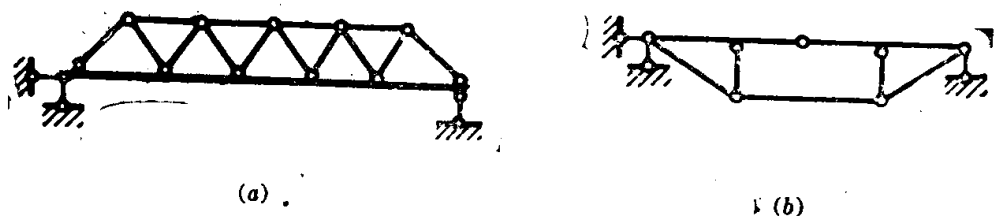


图 1-16

杆件结构按计算方法，又可分为静定结构和超静定结构。若一结构承受任何荷载时，所有反力和内力都可由静力平衡条件完全确定，这种结构称为静定结构，如图1-12a和b、图1-13a、图1-14a、图1-15a、图1-16b所示结构都是静定结构。而超静定结构全部反力和内力只用静力平衡条件是不能确定的，还必须同时考虑变形条件才能求得。

§ 1-3 结构上的荷载及其分类

工程结构中常遇到的荷载，按其不同特征可分为以下几类：

一、荷载按其作用时间的久暂分类

1. 恒载——恒载是指永久作用在结构上的不变荷载，如自重、土压力及固定在结构上的附属部分的重量。

2. 活载——活载是指暂时作用于结构上的荷载，例如楼（屋）面活载、施工活载、车辆与吊车荷载、人群、风雪荷载等。活载还可分为可动活载和移动活载两类。可动活载是指在结构上能占有任意位置的活载，如风载、雪载等；而移动荷载则为一系列互相平行、间距保持不变且能在结构上移动的活载，如桥梁上的列车或汽车荷载、吊车荷载等。

二、荷载按其作用性质分类

1. 静力荷载——静力荷载是指其大小、方向和位置不随时间变化或变化很缓慢的荷载。它不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力的影响，结构的自重及其它的恒载都属于静力荷载。

2. 动力荷载——动力荷载是指随时间迅速变化的荷载。它会使结构产生显著的冲击或振动，结构将发生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响。例如动力机械运转时产生的振动荷载、冲击波的压力、地震时地面运动对建筑物产生的动力作用等都是动力荷载。

三、荷载按其分布范围分类

1. 分布荷载——分布荷载是指连续分布在结构上的荷载。在杆件结构中，根据杆件的负荷面积常把连续分布的面积荷载化为作用于杆件轴线上的线分布荷载。当此荷载集度为常数时则为均布荷载。

2. 集中荷载——集中荷载是指分布面积远小于结构尺寸的荷载，因而可近似地认为是作用在结构上某一点的荷载。如吊车梁上的吊车轮压、次梁对主梁的作用等。

应该指出：结构除了承受荷载外，尚可受到其它外在因素的作用，如温度的改变、支座的移动、材料的收缩等。

第二章 平面体系的几何组成分析

§ 2-1 概 述

一、几何不变体系与几何可变体系

结构的作用是承受荷载和传递荷载。如果不考虑材料的应变和结构的弹性变形，结构应能在荷载作用下保持自身的几何形状和位置。凡在任意荷载作用下能保持原有几何形状和位置的体系，称为几何不变体系，如图2-1a所示。即使不考虑材料的应变，哪怕在很小外力作用下，几何形状和位置也将改变的体系，称为几何可变体系，如图2-1b、c所示。

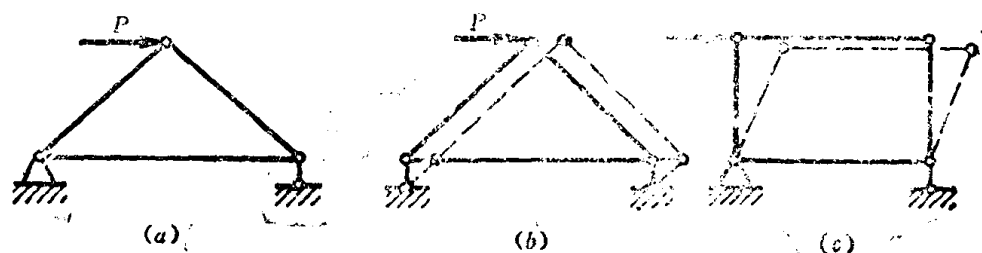


图 2-1

二、几何组成分析的目的

对体系中各杆件之间的连接方式和体系与地面的联接方式进行分析，称为体系的几何组成分析。几何组成分析的目的在于：

1. 判别某一体系是否几何不变，从而决定它能否作为结构。
2. 研究几何不变体系的组成规律，以保证结构是几何不变的，并能创造新的结构型式。

此外，根据几何组成分析的结果，可以确定结构是静定的还是超静定的，以便选择适当的结构计算方法。学习了几何组成分析，有助于结构的受力分析。

§ 2-2 关于刚片、自由度和约束的概念

一、刚片

对体系进行几何组成分析时，由于忽略了材料的应变，所以可将一个构件、一根杆件视为刚体，在平面体系中又把刚体称为刚片。由若干个构件组成的体系，如果已判明它是几何不变的，则该体系也可看成是一个刚片。显然，支承体系的基础也可看作是一个刚片。

二、自由度的概念

为了判别平面体系是否几何不变，涉及到体系自由度的计算。所谓一个体系的自由度是指该体系运动时可以独立改变的几何参变数的数目。或者说是用来确定该体系位置所需的独立坐标的数目。例如，被限定在平面坐标系内运动的一个点，需两个独立的坐标 x 和 y 确定它的位置（图2-2a），因此说一个点在平面内有两个自由度；平面坐标系内一个刚片需两个坐标确定刚片内一个点 A 的位置，然后再用坐标 ϕ 确定刚片内一条线 AB 的倾角（图2-2b）。这样用三个独

立坐标就可确定刚片在平面内的位置，因此说一个刚片在平面内有三个自由度。

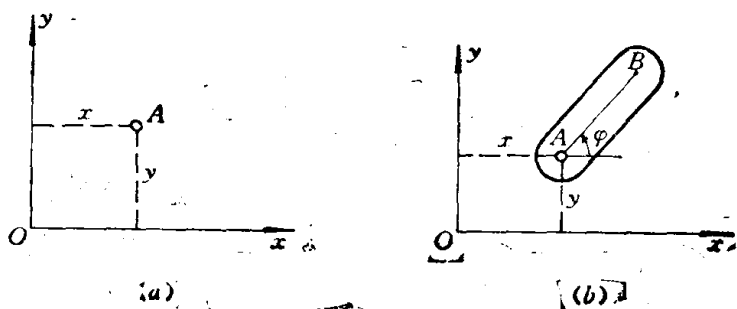


图 2-2

三、约束的作用

在刚片之间，若加入某些联结的装置，它们的自由度将会减少。减少体系自由度的装置称为约束。能减少一个自由度的装置称为一个约束。若体系中增加一个约束，而体系的自由度并不因而减少，则此约束称为多余约束。下面分析几种联结装置所起的约束作用。

图2-3a所示为一个刚片用一根链杆与地面联结，此时刚片只有两种运动可能，即链杆AC绕C点转动及刚片绕A点转动。刚片的位置由角度 φ_1 和 φ_2 即可确定，所以它的自由度等于2，比来自自由刚片减少了一个自由度。可见一根链杆能减少一个自由度，相当于一个约束。链杆也可以是刚性的折杆或曲杆（图2-3b），也起到同样的约束作用。

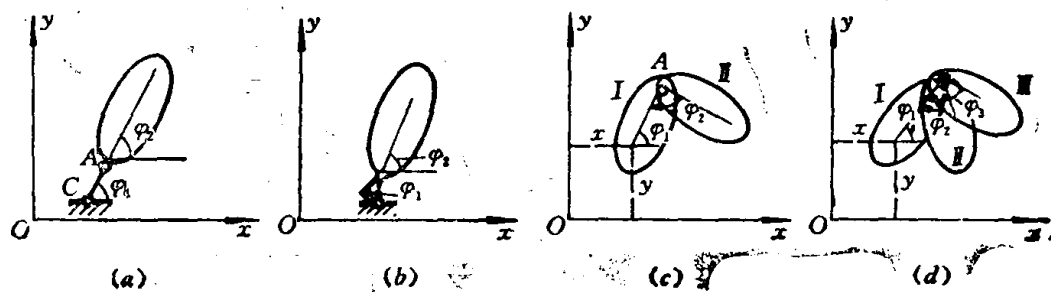


图 2-3

联结两个刚片的铰称为单铰。图2-3c所示刚片I与刚片II用一个铰连在一起构成一个体系，这两个刚片不联结时有6个自由度，用铰联结后则只有4个自由度，即刚片I由 x 、 y 、 φ_1 来确定，而刚片II只有绕A点的转动，即其位置用转角 φ_2 确定。可见一个单铰可减少2个自由度，即相当于两个约束。

有时用一个铰联结两个以上的刚片，这种铰称为复铰。图2-3d为联结三个刚片的复铰。在刚片I的位置确定后，刚片II和刚片III只能绕铰A转动，用转角 φ_2 和 φ_3 即可确定它们的位置。这样，三个刚片联结后自由度由9个变成5个，减少了4个自由度。因此，联结三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。一般说来，从减少自由度的观点来看，联结 n 个刚片的复铰，相当于 $(n-1)$ 个单铰的作用。

图2-4a所示为一个刚片与地面相联结，铰A的作用是使刚片只能绕A点转动，而不能有其它形式的运动。如果把刚片用链杆1、2与地面相联结（图2-4b），两链杆的交点O相当于瞬时转动中心，刚片只能绕O点转动。所以两根链杆的作用相当于在其交点处加一个单铰，不过这种铰实际上并不存在，故称这种铰为虚铰。当体系运动时，两根链杆交点的位置也将随之改变，

所以通常又称它为瞬铰。

四、平面体系自由度的计算

在建立了上面所提到的一些概念之后，下面导出平面体系自由度的计算公式。

平面体系可以看成是多个刚片组合而成。平面体系的计算自由度为各刚片不受约束时的自由度总数与因约束作用而减少的自由度数之差，即

$$W = 3m - (2h + r) \tag{2-1}$$

式中： W ——平面体系的计算自由度；

m ——刚片数；

h ——单铰数；

r ——支座链杆数。

应用式(2-1)计算平面体系自由度时，必须注意单铰数 h ，如遇复铰，须将复铰折算成单铰后再代入。

实际上每一个约束不一定都能使体系减少一个自由度，因为这还与约束的具体布置有关。因此， W 不一定能反映体系真实的自由度。虽然如此，在分析体系是否几何不变时，还是可以根据 W 首先判断约束的数目是否足够。为此，把 W 称为体系的计算自由度。

在平面体系中，经常遇到全部杆件均为链杆而组成的链杆体系（如桁架），计算这种体系的自由度时，除可用式(2-1)外，还可用下面导出的公式。

设链杆体系中铰接结点数目为 j ，杆件数为 b ，支座链杆数为 r 。由于一个自由结点有两个自由度，未加约束之前，结点应有的自由度数目为 $2j$ ，每根杆件及支座链杆都相当于一个约束，共减少 $(b+r)$ 个自由度，于是链杆体系的计算自由度公式为

$$W = 2j - (b + r) \tag{2-2}$$

例2-1 计算图2-5所示体系的自由度。

解 该体系的刚片数 $m=5$ ；结点 D 、 F 、 G 各为一个单铰，结点 E 是复铰，相当于两个单铰，因此单铰总数 $h=5$ ；支座链杆数 $r=5$ ，应用式(2-1)，体系自由度为

$$\begin{aligned} W &= 3m - 2h - r \\ &= 3 \times 5 - 2 \times 5 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

例2-2 计算图2-6所示体系的自由度。

解 图2-6所示为铰接链杆体系， $j=10$ ， $b=16$ ， $r=3$ ，应用式(2-2)，体系自由度为

$$W = 2j - (b + r) = 2 \times 10 - (16 + 3) = 1$$

例2-3 计算图2-7所示体系的自由度。

解 在该体系中 $j=8$ ， $b=13$ ， $r=3$ ，由式(2-2)可计算体系自由度为

$$W = 2 \times 8 - (13 + 3) = 0$$

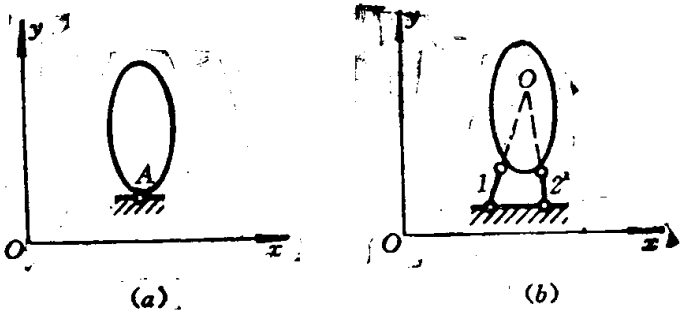


图 2-4

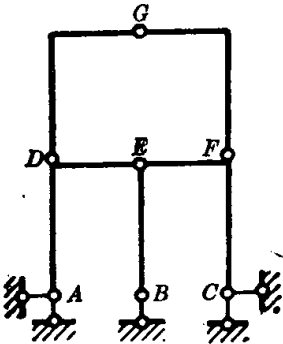


图 2-5

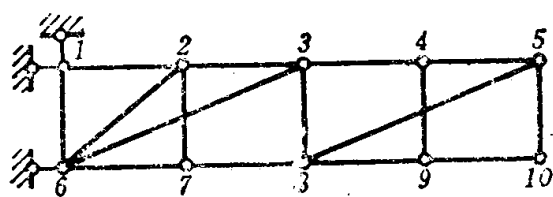


图 2-6

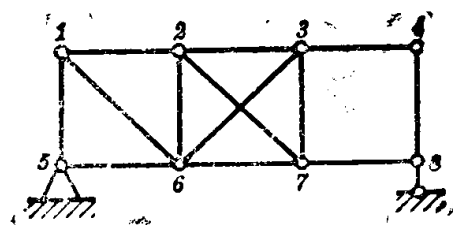


图 2-7

按照式(2-1)或(2-2)计算的结果,有如下三种情形:

1. $W > 0$, 表明体系缺少足够的约束,体系一定是几何可变的。

2. $W = 0$, 表明体系具有保证几何不变所需的最少约束数,但不一定就是几何不变体系。

如约束不当,仍然可能是几何可变的,或瞬变的。

3. $W < 0$, 表明体系内有多余约束存在。因此 $W \leq 0$ 是保证体系几何不变的必要条件,但不是充分条件。为了确定体系是否几何不变,尚需进一步研究几何不变体系的合理组成规则。

§ 2-3 几何不变体系的基本组成规则及瞬变体系的概念

体系的几何不变性是由于组成体系的各刚片之间具有足够的约束和合理的布置来保证的。前者要求体系的计算自由度 $W \leq 0$, 后者则要求体系的组成应符合基本规则。

本节讨论无多余约束的几何不变体系的组成方法。无多余约束是指体系内的约束数目恰好使该体系成为几何不变,只要去掉任意一个约束就会变成几何可变体系。

几何不变体系中,由三根杆件用不在同一直线上的三个单铰两两相联组成的三角形铰接体系(图2-8)是最简单的几何不变体系(因三角形边长一定,其形状不变),也是组成几何不变体系的最基本规则。从不同角度去分析,可得出以下三种规则。

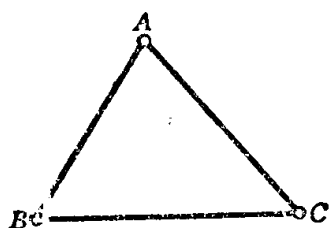


图 2-8

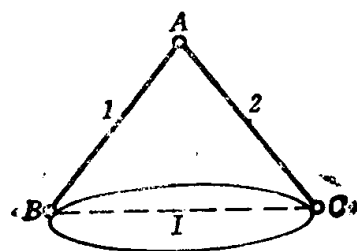


图 2-9

一、二元体规则

将点A看作是铰联结的点,BC杆视为刚片I,AB、AC当作联结结点A与刚片I的链杆,这样两根不在同一直线上的链杆联结的结点通常称为二元体。显然,这是几何不变的,由此可得二元体规则如下:

一个点与一个刚片用两根不共线的链杆相联,组成的体系是几何不变的(图2-9)。

在体系上增减二元体并不改变原体系的自由度。这是因为体系上增加一个点所增加的两个自由度,恰好能为新增加的两根不在同一直线上的链杆(即两个约束)所减去;在原体系上如