



# 牛顿传

(美) I. B. 科恩著

科学出版社

# 牛顿传

〔美〕I. B. 科恩 著

葛显良 译

侯定远 沈永欢 校

DC21/18

科学出版社

1989

## 内 容 简 介

本书译自美国《科学家传记辞典》(Dictionary of Scientific Biography)一书牛顿条。本书介绍了牛顿生平事迹，并详实、全面、准确地记述了牛顿一生在数学、光学、动力学、天文学等科学领域的贡献，对《自然哲学的数学原理》一书进行了详细的分析和评价。此外还对牛顿在炼金术、神学等方面的兴趣进行了分析，讨论了它们在牛顿科学思想中所占的地位。

本书译稿经俞扬根先生审阅，李文林同志复审。

本书可供科学工作者、科学哲学工作者、科学史工作者、教师、大专以上学生阅读。

## 牛 顿 传

〔美〕 L. B. 科恩 著

葛显良 译

侯定远 沈永欢 校

责任编辑 韩安平 张鸿林

科学出版社出版

北京市东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1989年7月第一版 开本：787×1092 1/32

1989年7月第一次印刷 印张：5 3/4

印数：0001—4,400 字数：130,000

ISBN 7-03-001050-7/Z·53

定 价：2.90 元

## 目 录

早年生活和教育.....	1
卢卡斯讲座教授.....	4
数学.....	7
光学.....	27
动力学、天文学及《原理》的诞生.....	43
《原理》中的数学.....	54
《原理》：总轮廓.....	63
《原理》：定义和公理.....	66
《原理》第一卷.....	69
《原理》第二卷.....	77
《原理》第三卷：“宇宙体系”.....	82
《光学》的修订(较后的问题)；化学和物质理论.....	87
炼金术、预言书、神学、年代学和历史学.....	92
伦敦年代：铸币局，皇家学会，与弗拉姆斯提德和与莱布尼兹的争端.....	99
牛顿的哲学：推究哲理的法则，总释，《光学》中的问题.....	103
注释.....	106
参考文献.....	136
原著 .....	136
第二手文献 .....	142

资料来源 .....	145
附录 .....	169
牛顿一生大事表(译者编) .....	169
汉英人名对照表 .....	174
汉英地名对照表 .....	178

## 早年生活和教育

伟大的数学家、物理学家艾萨克·牛顿 (Isaac Newton) 1642 年 12 月 25 日 (儒略历，即现行公历的 1643 年 1 月 4 日) 生于英国林肯郡伍尔斯索普村。他是遗腹子，出生前的 10 月 6 日，父亲就已去世下葬；他是平民的后裔，父母双方的祖先都是不见经传的人物。他出生时还不足月，家里人当时对他能否活下来，非常担心。后来他自己也说过刚出生时小得能放在一夸脱的杯子中。他在父亲的故居中长大，这所房屋至今还保存在林肯郡格兰瑟姆附近的伍尔斯索普村中。

他的母亲汉娜(娘家姓艾丝考夫)再嫁后，将三岁的儿子牛顿交给年迈的外祖母抚养。1653 年，继父巴纳巴斯·史密斯牧师去世，他母亲带着三个小孩(一男二女)回到伍尔斯索普。这三个异父弟妹留下的四男四女，也就是牛顿的侄子、侄女、外甥、外甥女，后来成为牛顿的继承人。其中一位叫凯瑟琳的外甥女，曾在伦敦为牛顿操持家务数年，后来她嫁给了继牛顿出任铸币局长的约翰·康杜特。

牛顿从未见过父亲，这无疑影响了他的性格。在他 1662 年用速记写的青年忏悔录中，至少有一条反映了他对母亲再嫁的愤慨和对继父的嫉恨。该条中写道：“险恶的父母史密斯，要烧掉他们和他们所住的房屋。”<sup>[1]</sup>

青少年时代，牛顿对机械设计很感兴趣。据说由于受到约翰·贝特的《自然与艺术之奥秘》<sup>[2]</sup>一书的启发，他制作了由老鼠拉动的水车模型、钟、灯笼和火焰风筝，他把风筝放得很高很高，使左邻右舍大吃一惊。他还在伍尔斯索普的屋子里的墙壁和窗棂上涂绘了一些草图和一幅建筑图（已予以再现并保存），还画了许多飞鸟、走兽、人物、船舶和植物。可能是在五

岁时，他开始在斯基林登和斯托克两地妇女主办的小学中接受早期教育。后来他进入格兰瑟姆的公立中学，但他母亲回到伍尔斯索普后，却令他退学，想让他务农。他对农活兴趣索然，总是心不在焉，无精打采。在格兰瑟姆那所中学校长约翰·斯托克斯和舅父（伯顿·科格勒斯教区长）威廉·艾丝考夫的鼓励下，家里才让青年牛顿作上大学的准备。1661年6月5日，他被剑桥三一学院录取，并得到资助，1664年成为奖学金获得者，1665年获得文学士学位。

牛顿在大学本科时期所读书籍中，有开普勒的《光学》（可能是1653年在伦敦重印的《屈光学》）。也曾开始读欧几里得的《几何原本》，但据说因发现此书“无足轻重”就弃而攻读斯科顿（翻译并增补）的笛卡儿《几何学》拉丁文第二版。<sup>[3]</sup>据说此后不久，牛顿在被选为奖学金获得者时，巴罗曾对他进行测试，发现他在欧几里得几何学方面还有不足之处。<sup>[4]</sup>牛顿所读的笛卡儿《几何学》是借来的一本拉丁文本（1659—1661年阿姆斯特丹出版），书中有弗朗斯·范·斯科顿的评注，并有德·博内、赫德、休雷特、德·维特和斯科顿本人的信件和宗教宣传的短文。他那时攻读的其他书籍还有奥特雷德的《数学入门》，华里斯的《无穷算术》，沃尔特·查利顿关于伊壁鸠鲁和伽桑狄的概论，狄格拜的《随笔两则》，笛卡儿的《哲学原理》（以及他的拉丁文版信件），伽利略的《对话》（索尔兹伯里的英译本）——但显然没有读他的《数学论文与证明》，玛吉拉斯的经院哲学概论，温因和斯特里特关于天文学的著作，以及亨利·莫尔（格兰瑟姆本地人，牛顿在剑桥时即与之相识）的一些著作。稍后，还读过并注释过斯普拉特的《英国皇家学会史》，早期的《哲学汇刊》和胡克的《显微术》。

保存至今的牛顿在三一学院时所写的笔记本中，有一本含有用希腊文写的关于亚里士多德的《工具论》和《伦理学》的

注释，<sup>[14]</sup>附有根据丹尼尔·斯塔尔、尤斯塔奇斯和杰拉德·伏西斯等人的评注而作的补充。这个，加上他对玛吉拉斯和其他人著作的研读，都说明牛顿在经院修辞学和演绎逻辑方面颇具根底。他通过研究近代著作编成的一套《哲学问题集》表明他还读过查利顿和狄格拜的著作。<sup>[15]</sup>他也熟悉格兰维耳和玻意耳的论著，而且，毫无疑问，研究过伽桑狄所写关于哥白尼天文学的概述，当时这篇著作是和伽利略的《恒星使节》、开普勒的《屈光学》一起出版的。<sup>[16]</sup>

牛顿大学时代的朋友，除了同居一室并一度任牛顿听写员的威金斯外，极少为人所知。他当时所住房间已无法了解。他的学士论文题目以及他的学习成绩在同届毕业生中属于那一等级也都无从知悉。倒是他自己曾经记下一些无疑是大学生涯中的不平常事件：“沉迷于扑克牌两次”，“上小酒馆两次”。

1665年6月以后，牛顿可能在林肯郡住了十八个月，那时大学因鼠疫流行而关闭。在此期间，牛顿为他在数学、光学、天文学即天体力学方面的研究工作奠定了基础。过去，人们认为牛顿在这些方面的所有发现是他在伍尔斯索普闭门索居时获得的。那时，他只偶然地去过附近的布斯比一次。牛顿后来说：“1665和1666两年鼠疫期间，我正处于发明创造的鼎盛年华，比以后任何时候更潜心于数学和哲学。”不过，事实上牛顿在1666年3月至6月间至少回过剑桥一次。<sup>[17]</sup>在那里他显然可以利用学院和大学的图书馆，在三一学院写出有关他的数学发现的文章，然后回到林肯郡进行修改和润色。甚至，关于折射和色散的棱镜实验也可能是他在三一学院的房间里，而不是在农村中完成的。虽然在伍尔斯索普时，他可能已经做过钟摆的实验以测定地球引力。至于苹果落地这一插曲，牛顿自己说过，“引起了”关于“地球引力的想法”，则一定是发生在布斯比或伍尔斯索普的。<sup>[18]</sup>

## 卢卡斯讲座教授

大学毕业后约两年，1667年10月1日，牛顿被选为三一学院的选修课研究员，1668年3月16日升为专修课研究员。1668年7月7日获硕士学位。1669年10月29日（是年他二十六岁），被任命为卢卡斯讲座教授，接替该讲座首任教授艾萨克·巴罗。一般都认为巴罗辞去这一职务是为了能让牛顿继任<sup>[10]</sup>。

大学章程规定，卢卡斯讲座教授每学期一周至少讲一次课，然后必须将每年度内的十次（或更多）讲授的完整定稿缴存于大学图书馆。牛顿任此职期间，按规定缴存了关于光学（1670—1672），算术与代数（1673—1683），《自然哲学的数学原理》（简称《原理》）第一卷的绝大部分（1684—1685），以及《宇宙体系》（1687）等讲稿。但1686年和始于1688年止于1696年初移居伦敦这一段时间，他可能作过的任何讲授都无纪录可查。十七世纪七十年代，牛顿曾想出版他对金克休生代数学的注释和自己关于流数的论著，但均未如愿。1672年他成功地出版了瓦伦尼乌斯《普通地理学》的修订版，显然是为了供他的学生使用。

根据汉弗莱·牛顿的追忆<sup>[11]</sup>，牛顿在写作《原理》的几年里，“除了作为卢卡斯讲座教授在授课时间去各课堂讲课外，极少离开他的房间。他讲课时，去听的人屈指可数，听得懂的人更是凤毛麟角。由于缺乏听众，只得面对墙壁宣读讲稿”，授课时他“常能保持镇静至半小时左右；如果座无一人，一般也要在课时进行到只剩四分之一或更少时才回来。”他偶尔接待

外国人，也能“毫不拘泥，坦率谦恭。”他“进食极少”，常把“进食一事，置之脑后”，也很少就食于“餐厅，只在某些节日”偶然出现，也往往是“拖着鞋跟磨平的鞋子，袜带松解，披着宽大的白色法衣，头发凌乱。”他“极少去学校礼拜堂”，却“常去圣玛丽教堂，尤其在上午。”<sup>[12]</sup>

牛顿有时去伦敦出席皇家学会的会议（1672年起，他成为该会会员）。为了建造三一学院新图书馆（1676年），他曾捐助40英镑和各种书籍。他当时跟包括玻意耳、柯林斯、弗拉姆斯提德、戴维·格雷哥里、哈雷、胡克、惠更斯、莱布尼兹、华里斯等人在内的英国和大陆的科学家进行直接或间接的通信联系（通常以亨利·奥尔登堡为中介）。他在写《原理》一书前后，常忙于化学实验；在十七世纪七十年代中期，曾考虑出版一部光学著作<sup>[13]</sup>；在九十年代，曾进一步修改《原理》以便出第二版，并打算在第三卷中选录卢克莱修的论著并引证古代的学术观点。这一时期，他的主要研究项目是太阳摄动对月球运动的影响；这几年他也时断时续地研究数学问题。

与牛顿保持友谊的学生中，对他的生活和事业影响最大的是查尔斯·蒙塔古。他是曼彻斯特伯爵的孙子，在三一学院享有与专修课研究员同桌吃饭资格的大学生，也是“帮助牛顿筹建剑桥哲学学会的一小群学生之一”<sup>[14]</sup>（该学会未建成）。与牛顿有亲密友谊的还有：亨利·莫尔、爱德华·佩格特（牛顿曾推荐他在基督公立学校任数学教师）、佛兰西斯·阿斯通、约翰·埃利斯（后任凯厄斯学院院长）和 J·F·维盖尼，维盖尼是剑桥大学最早的化学教授，据说他曾将一个修女的放荡故事告诉牛顿，结果被摒诸门外，不许再见牛顿的面。当信奉天主教的英王詹姆士二世企图勒令剑桥大学收录贝尼迪派僧侣奥尔本·弗朗西斯时，牛顿曾为捍卫大学的权利而积极活动。  
1689年他被大学选民选为下院议员。

牛顿作为下院议员留居伦敦时，恢复了与蒙塔古和皇家学会的联系，结识了惠更斯和包括洛克在内的其他一些人物。此后牛顿曾就神学和圣经方面的问题与洛克通信切磋。理查德·本特利以牛顿的宇宙体系为部分依据在准备其题为《驳无神论》的玻意耳讲座就职讲稿时，曾向牛顿请求指点和帮助。

牛顿还结识了另外两位科学家，他们都想为《原理》筹备第二版。一位是爱丁堡大学教授戴维·格雷哥里，牛顿后来曾帮助他在牛津取得教席。格雷哥里曾记录了在十七世纪九十年代牛顿修改《原理》时，他与牛顿的谈话。另一位是来自瑞士的避难者尼古拉斯·费谢·德·杜勒，他是牛顿一度诚心期望用机械论来解释引力的鼓吹者。费谢可能很快就成了牛顿最亲密的朋友。1693年初秋，牛顿显然受到了抑郁症的严重侵扰，竟对洛克和佩皮斯进行了荒诞不经的攻击，因而有人说他已丧失了理智。<sup>[15]</sup>

十七世纪九十年代《原理》出版后的几年之中，牛顿显然对剑桥大学和自己的科学教授职务感到厌倦。他希望能在别处谋一职位。当时有人想让他任查特豪斯公立学校校长，但他不感兴趣。<sup>[16]</sup>最后蒙塔古（由于辉格党在下院重新掌权，他也吉星高照）在1696年3月为他谋得了铸币局总监之职。他指定威廉·惠斯顿代理他的教授职务，直到1701年12月10日，即他第二次被选为代表大学的下院议员后，即刻正式辞去了这一职务。<sup>[17]</sup>

## 数 学

综述牛顿对数学的贡献，不仅必须考虑他对微积分和对分析的其他方面(包括无穷级数和最著名的一般二项式展开)的奠基性工作，而且要考虑他在代数和数论、古典几何和解析几何、有限差分、曲线分类、计算方法和逼近论，甚至概率论方面的创造性工作。

三百多年来，牛顿在数学方面的很多著述基本上埋没在集牛顿手稿之大成的“朴次茅斯收藏”中。现在藏稿的主要部分正陆续出版，广大学者不久就能详细理清牛顿数学思想的来龙去脉。<sup>[18]</sup>这里，只能举出他最重要的成就，同时将其著作按传播方式和出版先后分为四类：(1)生前印就的著作，(2)以手稿形式传阅的著作，(3)以通信形式提示或概述的著作，(4)出版甚晚的著作。由于他“创造了流数微积分和无穷级数理论这两大数学方法，并将它们不可分割地结合在他的‘分析’术中，”所以无论生前身后，牛顿都能“按照他自己的愿望”影响数学的发展。<sup>[19]</sup>下面就着重论述这两个课题。

牛顿在1664年二十一岁以前，似乎没有涉猎过较高深的数学。直到这一年，由于接触到斯科顿的《杂录》和其编译的笛卡儿《几何学》以及华里斯的《无穷算术》(可能还有他的其他著作)等书，他潜在的数学天才才得以启发。斯科顿的编译本引导他了解休雷特、德·维特、赫德、德·博内和其他一些人的数学贡献。牛顿也读了维埃特、奥特雷德和惠更斯的著作。此外，还通过仔细研读巴罗所编的《原本》和《数据》两书，弥补了他早期对欧几里得几何学的忽视。

近年来<sup>[20]</sup>，学者们已认识到，笛卡儿和华里斯对牛顿数学成就的两个主要领域——一是微积分，一是解析几何与代数——来说，具有“巨大的形成性影响作用。”近来在三一学院图书馆中偶然发现了属牛顿所有的一本笛卡儿《几何学》。他在书中所作的旁注表明，牛顿对笛卡儿的书，完全不像人们以前所设想的那样，全盘贬抑。他的旁注，并不像康杜特和布雷斯特所说，只是包括全部否定的“错。错。不是几何”，而仅在有些地方注着“错误”一词；至于偶然出现的“不是几何”的边注，则只是用来指出某些问题，例如笛卡儿的曲线分类。应该说是代数而远非凡几何。牛顿年青时代所作的另一些注释提供了他从华里斯那里学到的一些东西，主要是“不可分割法”<sup>[21]</sup>。

除了研读上述著作，牛顿还接触到费马和詹姆士·格雷哥里的概念和方法。虽然巴罗“宣读他的关于运动的讲稿”时，牛顿显然在座，并且记述过，<sup>[22]</sup>巴罗的讲演“可能促使我考虑这些问题”，但巴罗对牛顿数学思想的影响也许不像通常想像的那样重要。

牛顿在其创造性的数学生涯中，迈出的第一大步是发现一般的二项式定理，即  $(a + b)^n$  的展开式。关于这点，他写道：“1665年初我发现了逼近级数法和把任意二项式的任意次幂化成这样一个级数的规则…。”<sup>[23]</sup>他还说过：

“1664和1665年间的冬天，在研读华里斯博士的《无穷算术》并试图修改他用以化圆为方 [即求圆面积或计算  $\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ ] 的级数时，我找出了用以求圆面积的另一无穷级数，然后又找出了用以求双曲线图形面积的另一无穷级数…。”<sup>[24]</sup>

1676年6月13日，牛顿将“前一封信”寄给奥尔登堡转交莱布尼兹。信中写道：分式“可用除法化成无穷级数；而根式可用开方法化成无穷级数，”后者

“…用这一定理可以大大简化，

$$\begin{aligned} \overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} &= P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q \\ &\quad + \frac{m-2n}{3n} C Q + \frac{m-3n}{4n} D Q + \dots \end{aligned}$$

这里  $P + PQ$  表示这样一个量：它的根，或任意次幂，或幂的根，乃是我们要求的； $P$  表示此量的第一项， $Q$  是除以第一项后的余项， $m/n$  是  $P + PQ$  的幂的指数，不管这个指数是整数或是分数（可以这样说），是正数或是负数。”<sup>[25]</sup>

牛顿给出的一个实例是下面的展开式：

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + x^2} \text{ 或 } (c^2 + x^2)^{1/2} &= c + \frac{x^2}{2c} \\ &- \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \dots \end{aligned}$$

这里

$$P = c^2, \quad Q = x^2/c^2, \quad m = 1, \quad n = 2,$$

且

$$A = P^{\frac{m}{n}} = (c^2)^{\frac{1}{2}} = c,$$

$$B = (m/n)AQ = x^2/2c,$$

$$C = \frac{m-n}{2n}BQ = -x^4/8c^3,$$

等等。

另外的例子包括

$$(y^3 - a^2y)^{-\frac{1}{3}},$$

$$(c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{2}},$$

$$(d + e)^{-\frac{1}{2}}.$$

牛顿在信中所作出的或许是最重要的一个陈述是：处理无穷级数时，“所有通常对十进制数字所作的各种运算，对级数符号均可同样进行。”

华里斯用不可分量法，求出  $n = 0, 1, 2, 3$  等正整数值时的  $\int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ ，从而得到一些求曲线形面积（即求这些曲线下区域的面积）的方法；为了求出单位圆的面积，他探索了用插值法计算积分  $\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ 。他证明了

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}.$$

牛顿读华里斯著作后受到启发，又大大地前进了一步，使积分上限任意变动，然后导出表示半径为  $x$  的圆的面积的无穷级数：

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \cdots.$$

这样把上限任意变动，使他认识到由  $x$  的各次幂所决定的各个项显示了二项式系数。这样，因子  $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{5}{128}, \dots$

就能简明地以  $\binom{q}{1}, \binom{q}{2}, \binom{q}{3}, \binom{q}{4}, \dots$  的形式出现在下列一般公式的一个特殊情况中，即当  $q = \frac{1}{2}$ ，

$$\int_0^x (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = x - \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} x^5$$

$$-\binom{q}{3} \cdot \frac{1}{7} X^7 + \binom{q}{4} \cdot \frac{1}{9} X^9 + \dots,$$

这里

$$\binom{q}{n} = \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}.$$

D·T·怀特赛德认为牛顿就是这样从不定积分开始，并按“华里斯方式进行微分”而直接导出“二项式 $(1-x^p)^q$ 的级数展开式，…事实上就是它的现代形式”，但“为保证收敛性，隐含地要求 $|x^p|$ 小于1。”他“把这个一般展开式的一些特殊展开式跟代数除法和开平方法 $(q=\frac{1}{2})$ 所得到的结果进行比较，”借以检验上述一般级数展开式的正确性。此项工作完成于1664—1665年间冬，后以经过修改的形式出现在牛顿的《运用无穷多项方程的分析学》(简称《分析》)一书之首。

牛顿曾在1676年10月24日寄奥尔登堡转(像以前一样)莱布尼兹的“后一封信”中准确地概述了这一方法的发展过程：

“在我开始研究数学时，我看到了大名鼎鼎的华里斯的著作，书中他考虑这样一种序列，对这个序列进行插值，就能得出圆和双曲线的面积，也就是说明了这样一个事实：在一系列曲线中，其公共基线或轴为 $x$ ，其纵坐标为

$$(1-x^2)^{0/2}, (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$(1-x^2)^{4/2}, (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \dots,$$

如果能对其中每隔开一个的曲线的面积，即

$$x, x - \frac{1}{3}x^3, x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \dots$$

进行插值，我们就能得到隔在中间的各曲线的面积，其中第一个  $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$  是圆…。”<sup>[26]</sup>

把华里斯的固定上限改变成任意变量  $x$  被称为“牛顿突破的关键”，这说明了它的重要性，因为“ $x$  的各种不同的幂次按次序排出了数字系数，从而第一次揭示了此序列的二项式特征。”<sup>[27]</sup>

约在 1665 年，牛顿发现了

$$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots,$$

这一幂级数（即实际上确定了它的系数序列），而最重要的是他还发现了对数级数。他也求出了双曲线  $y(1+x) = 1$  的面积，用的方法是：对  $r = 0, 1, 2, \dots$ ，用表列出以  $x$  的幂表示的

$$\int_0^x (1+t)^r dt,$$

然后对

$$\int_0^x (1+t)^{-1} dt$$

进行插值。<sup>[28]</sup>从所列的表出发，他求得双曲线形的面积是级数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} \\ + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \dots,$$

这正是  $1+x$  的自然对数的级数展开式。牛顿写道：他在 1664—1665 年间冬“已发现了无穷级数方法”，“1665 年夏，由于鼠疫被迫离开剑桥，在布斯比用同样方法计算了双曲线形的面积，直到五十二位数目字”。<sup>[29]</sup>

约在同时，牛顿“基于一个变量（例如  $x$ ）的任意小的且最终消失的元素  $\delta$  的概念”；发明了“一种非常一般的微分法。”

1664 年 9 月，他在以笛卡儿《几何学》为基础的笔记中，首先