

JJGLSX
席唤民 牟 科 编著

经济 管理 数学

旅游教育出版社

高等学校经济贸易与旅游类各专业适用教材

经 济 管 理 数 学

席唤民 牟 科 编著

旅 游 教 育 出 版 社

(京)新登字168号

内容提要

《经济管理数学》包括“微积分”、“应用线性代数”、“管理统计学”、“运筹学——经济管理决策方法的最优选择”四个部分，共四篇二十八章。全书在保持科学性、系统性和完整性的前提下，从实际问题出发，引入数学概念，介绍数学定理和数学公式，并用例题突出基本方法和应用。每章后列有针对性的练习题，书后附有答案。这是一部内容全面、理论联系实际、深入浅出、通俗易懂、具有较强可读性的教科书。

本书可供经济、贸易、旅游经济管理、饭店管理、旅行社管理、旅游财会、计划、统计等专业大学本科、专科和成人高等教育的使用教材。也适合有志于经济管理工作的高中水平人员自学之用。

高等学校经济贸易与旅游类专业试用教材

经济管理数学

席唤民 牟科 编著

旅游教育出版社出版

(北京市朝阳区定福庄1号)

北京市京东印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本：787×1092毫米1/16 印张44.5 800千字

1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷

印数1-3000册 定价11.30元

ISBN7-5637-0225-3/G·053

前 言

在改革开放方针指引下,为适应经济贸易、旅游经济管理、饭店管理、旅行社管理、旅游财会、计划、统计等专业数学教学的需要,根据上述各专业教学大纲的要求,我们编写了这部《经济管理数学》教科书。全书共分四篇二十八章,包括“微积分”、“应用线性代数”、“管理统计学”、“运筹学——经济管理决策方法的最优选择”。每章后列有相当数量的习题,书后并附有答案。各专业可根据专业与学时的教学要求,选教有关内容与篇章。

本书积我们三十多年教学的经验与教训,特别是经过十年来在经贸、旅游等专业数学教学的实践,参阅了有关教材编写的内容与特点,着意从实践出发,引入数学概念,重点介绍数学基本定理与运算公式、法则,用实例突出基本方法和应用。寓科学性、系统性与实用性为一体,力求内容全面,理论联系实际,深入浅出,通俗易懂,既便于讲授,又便于自学。

本书有关内容曾经过北京第二外国语学院外经系、旅游系,北京旅游学院有关系专业试用过。北京旅游学院数学教研室郭正媛和田伍龙等老师在使用中提出了宝贵意见,谨在此表示感谢。

本书承蒙北京广播学院甘章泉教授认真细致的审阅,对此书提出了宝贵的指导与具体修改意见,我们在此表示衷心地感谢。

限于编写者水平,书中定有错误与不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编 者

一九九一年一月二十八日

目 录

第一篇 微 积 分

第一章 函数	(1)
§ 1. 集合.....	(1)
§ 2. 函数概念与表示法.....	(5)
§ 3. 反函数与基本初等函数.....	(8)
§ 4. 复合函数与初等函数.....	(12)
习题一.....	(13)
第二章 极限与连续	(16)
§ 1. 数列的极限.....	(16)
§ 2. 函数的极限.....	(18)
§ 3. 无穷大量与无穷小量.....	(20)
§ 4. 极限的运算法则.....	(22)
§ 5. 两个重要极限.....	(24)
§ 6. 函数的连续性.....	(27)
习题二.....	(31)
第三章 导数及其应用	(33)
§ 1. 导数概念.....	(34)
§ 2. 导数的基本公式及运算法则.....	(36)
§ 3. 高阶导数.....	(45)
§ 4. 中值定理.....	(47)
§ 5. 罗必塔法则.....	(49)
§ 6. 导数在最优化方法中的应用.....	(54)
§ 7. 导数在经济与管理中的应用——边际分析与弹性分析.....	(63)
习题三.....	(67)
第四章 微分及其应用	(73)
§ 1. 微分概念.....	(74)
§ 2. 微分的几何意义.....	(75)
§ 3. 微分运算法则.....	(76)
§ 4. 微分的应用.....	(77)
习题四.....	(79)
第五章 积分及其应用	(80)

§ 1. 不定积分	(80)
§ 2. 定积分的概念	(97)
§ 3. 微积分基本定理	(102)
§ 4. 定积分的计算方法	(104)
§ 5. 广义积分	(108)
§ 6. 定积分的应用	(112)
习题五	(120)
第六章 多元函数的微分法及应用	(125)
§ 1. 多元函数概念	(125)
§ 2. 偏导数	(131)
§ 3. 全微分	(134)
§ 4. 多元复合函数与隐函数的微分法	(136)
§ 5. 二元函数的极值及应用	(140)
习题六	(144)
第七章 二重积分及其应用	(147)
§ 1. 二重积分的基本概念和性质	(147)
§ 2. 二重积分的计算及应用	(150)
习题七	(159)
第八章 级数 (简介)	(160)
§ 1. 无穷级数的收敛与发散的概念	(161)
§ 2. 幂级数	(165)
§ 3. 泰勒级数	(168)
§ 4. 初等函数的幂级数展开及其应用	(169)
习题八	(174)
第九章 微分方程 (简介)	(176)
§ 1. 一般概念	(176)
§ 2. 一阶微分方程	(177)
§ 3. 几种特殊类型的二阶微分方程	(182)
习题九	(184)

第二篇 应用线性代数

第一章 行列式	(186)
§ 1. 行列式的概念	(186)
§ 2. 行列式的性质与展开	(189)
§ 3. 克莱姆法则	(197)
习题一	(200)
第二章 矩阵	(201)

§ 1. 矩阵的概念	(201)
§ 2. 矩阵的运算	(204)
§ 3. 逆矩阵	(219)
§ 4. 矩阵的初等变换	(225)
习题二	(231)
第三章 n维向量	(234)
§ 1. 向量及其运算	(234)
§ 2. 向量间的线性关系	(237)
§ 3. 向量组与矩阵的秩	(245)
习题三	(250)
第四章 线性方程组	(251)
§ 1. 线性方程组的相容性和解的判断	(252)
§ 2. 齐次线性方程组	(255)
§ 3. 用矩阵的初等变换解线性方程组	(256)
§ 4. 线性方程组解的结构	(259)
§ 5. 矩阵的特征值与特征向量	(266)
习题四	(269)
第五章 投入产出数学模型	(271)
§ 1. 投入产出法的基本原理	(271)
§ 2. 投入产出法在经济管理中的应用	(281)
§ 3. 投入产出法与现代化管理	(284)
习题五	(290)

第三篇 管理统计学

第一章 数据整理	(291)
§ 1. 搜集资料	(291)
§ 2. 总体、个体、样本	(291)
§ 3. 数据整理与频数分布	(292)
§ 4. 样本特征数	(296)
§ 5. 特征数简化计算方法	(302)
§ 6. 差异系数 (变异系数, 离散系数)	(303)
习题一	(304)
第二章 概率基础	(305)
§ 1. 随机事件	(305)
§ 2. 概率的定义	(308)
§ 3. 概率加法	(311)
§ 4. 概率乘法	(312)

§ 5. 全概率公式及贝叶斯公式	(316)
习题二	(317)
第三章 随机变量与概率分布	(319)
§ 1. 离散型随机变量的概率分布	(320)
§ 2. 随机变量的分布函数及其性质	(322)
§ 3. 离散型随机变量的特征数	(324)
§ 4. 常用的离散型随机变量的分布	(329)
§ 5. 连续型随机变量的分布	(335)
§ 6. 常用的连续型随机变量的分布	(338)
§ 7. 二维随机变量及其分布	(346)
§ 8. 极限定理	(350)
习题三	(354)
第四章 统计推断基本原理	(355)
§ 1. 参数估计的基本概念	(355)
§ 2. 估计量与总体参数的点估计	(356)
§ 3. 总体参数的区间估计	(359)
§ 4. 假设检验	(362)
§ 5. 参数检验的几种统计检验方法	(363)
§ 6. 关于样本容量 n 的确定	(370)
习题四	(371)
第五章 方差分析	(372)
§ 1. 方差分析基本概念与实例	(372)
§ 2. 单因素方差分析	(374)
§ 3. 多重比较法	(381)
习题五	(382)
第六章 回归分析	(383)
§ 1. 一元线性回归	(384)
§ 2. 线性相关的显著性检验	(387)
§ 3. 利用回归方程预测与控制	(388)
§ 4. 一元非线性回归分析	(394)
§ 5. 多元回归分析	(398)
习题六	(407)
第七章 非参数假设检验	(408)
§ 1. 单个样本的假设检验	(409)
§ 2. 两个样本的假设检验	(412)
§ 3. K 个样本的非系数假设检验	(422)
§ 4. 相关度量	(431)

习题七	(435)
第八章 预测	(436)
§ 1. 预测的分类	(437)
§ 2. 时间序列分析预测法	(437)
§ 3. 马尔科夫链预测法	(468)
§ 4. 其它预测法	(473)
习题八	(473)
第九章 抽样调查	(474)
§ 1. 调查方法	(474)
§ 2. 抽样法原理	(475)
§ 3. 抽样调查的方案设计和步骤	(476)
§ 4. 简单随机抽样	(476)
§ 5. 分层抽样 (类型抽样)	(481)
§ 6. 整群抽样	(489)
§ 7. 等距 (系统、机械) 抽样	(494)
§ 8. 多阶段抽样法	(498)
习题九	(504)

第四篇 运筹学——经济管理决策方法的最优选择

第一章 线性规划	(506)
§ 1. 线性规划问题的数学模型	(506)
§ 2. 两个变量线性规划问题的图解法	(515)
§ 3. 单纯形方法	(517)
§ 4. 对偶规划与对偶单纯形方法	(540)
§ 5. 线性规划问题的特殊类型	(550)
习题一	(564)
第二章 动态规划	(567)
§ 1. 多阶段决策问题	(567)
§ 2. 动态规划问题的递推关系式和最优化原理	(568)
§ 3. 动态规划方法在经济管理中的应用	(571)
习题二	(581)
第三章 对策论	(582)
§ 1. 对策的基本概念	(582)
§ 2. 矩阵对策	(584)
§ 3. 矩阵对策的几种解法	(589)
§ 4. 其它对策模型	(596)
习题三	(596)

第四章 存贮论	(597)
§ 1. 有关存贮论的基本概念	(598)
§ 2. 确定性存贮模型	(599)
§ 3. 随机性存贮模型	(606)
习题四	(610)
第五章 排队论	(611)
§ 1. 排队服务系统的基本概念	(612)
§ 2. 顾客到达流分布和服务时间分布	(615)
§ 3. 损失制服务系统模型及其应用	(619)
§ 4. 等待制服务系统模型及其应用	(622)
§ 5. 混合制服务系统模型及其应用	(626)
§ 6. 一般服务型排队系统	(628)
习题五	(636)
附表 1 二项分布表	(632)
附表 2 泊松分布表	(938)
附表 3 正态分布表	(640)
附表 4 正态分布临界值表	(642)
附表 5 t 分布临界值表	(643)
附表 6 χ^2 分布临界值表	(645)
附表 7 F 分布临界值表	(647)
附表 8 相关系数临界值表	(651)
附表 9 符号检验表	(653)
附表 10 游程检验中 r 的临界值表	(654)
附表 11 秩和检验表	(656)
附表 12 威尔科克森 (Wilcoxon) 配对符号等级检验中 T 的临界值表	(657)
附表 13 柯尔莫洛哥夫—斯米尔诺夫 (Kolmogorov-Smirnov) 双样本检验中 K_D 的临界值表	(658)
附表 14 柯尔莫哥洛夫——斯米尔诺夫 (Kolmogorov-Smirnov) 双样本检验中 D 的临界值表	(659)
附表 15 曼-惠特尼 (Mann-Whitney) U 检验临界值表	(660)
附表 16 克鲁斯卡尔-沃利斯 (Kruskal-Wallis) 单向等线方差分析中观测值 H 的相伴概率表	(662)
附表 17 斯皮尔曼 (Spearman) 等级相关系数 r_s 的临界值表	(664)
附表 18 肯达尔 (Kendall) 一致性系数中 S 的临界值表	(665)
附表 19 有对比方案的平均数比较试验临界系数 t_α 表	(666)
附表 20 确定最大 (小) 秩和数的临界系数 C_α 表	(668)

习 题 答 案

第一篇 微积分	(669)
习题一答案	(669)
习题二答案	(671)
习题三答案	(672)
习题四答案	(678)
习题五答案	(679)
习题六答案	(682)
习题七答案	(685)
习题八答案	(686)
习题九答案	(686)
第二篇 应用线性代数	(687)
习题一答案	(687)
习题二答案	(688)
习题三答案	(689)
习题四答案	(690)
习题五答案	(691)
第三篇 管理统计学	(692)
习题一答案	(692)
习题二答案	(692)
习题三答案	(693)
习题四答案	(694)
习题五答案	(694)
习题六答案	(694)
习题七答案	(695)
习题八答案	(696)
习题九答案	(696)
第四篇 运筹学——经济管理决策方法的最优选择	(697)
习题一答案	(697)
习题二答案	(698)
习题三答案	(698)
习题四答案	(699)
习题五答案	(699)

第一篇 微 积 分

微积分是高等数学的主要部分。微积分的出现在数学发展史上是件划时代的大事，它对于二百年来现代数学的发展起了决定性的作用，它扎根于近代科学的各个领域，成为人类认识自然、改造自然的有力武器，称为“学科的基础”“打开科技大门的钥匙”“经济管理的重要工具”。

微积分是对立的统一。如果说微分是反映局部的量，而积分则是反映整体的量。微分是“化整为零”，积分是“积零为整”。积分是微分的无限积累，微分是积分的无限细分。恩格斯曾用通俗的例子形象的描述了微积分：“如果一杯水的最上面一层分子蒸发了，那么水层的高度 x 就减少了 dx ，这样一层分子又一层分子地继续蒸发，事实上就是一个连续不断的微分。如果热的水蒸汽在一个容器中由于压力和冷却又凝结成水，而且分子一层又一层地积累起来直到容器满了为止，那么这里就真正进行了一种积分。”

本篇从函数与极限概念出发，进而讨论微分学、积分学概念，讲述计算方法及其应用。

第一章 函 数

§ 1 集合

集合是现代数学中一个重要概念，它对经济管理数学的研究起着非常重要的作用。在今后讲解线性代数、线性规划及概率论等课程中常应用到它。现简要作一介绍。

一、集合概念

所谓集合，就是具有某种属性的事物或对象的全体。构成集合的每一个事物或对象称为集合的元素。例如

- (1) 从1到100的整数
- (2) n 个生产部门（非生产部门不在）
- (3) 全体偶数
- (4) 直线 $x+y+1=0$ 上的所有点

都是集合。通常用大写字母 A 、 B 、 C 、……表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c 、……表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，称为 a 属于 A 或 a 在 A 中，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是 A 的元素，称为 a 不属于 A 或 a 不在 A 中，记作 $a \notin A$ 。集合中元素的数目称为这个集合的基数（或势）。基数有限的集合称为有限集合。基数为无限数目的称无限集合。例如（1）（2）为有限集合，（3）（4）为无限集合。

二、集合的表示法

(一) 列举法：把集合里所有元素放在花括号 $\{\}$ 里，所有元素不得重复和遗漏。如掷一颗骰子可能得到的点数集合 A ，可表示为 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ；由 $x^2-5x+6=0$ 的根所构成的集合 B ，可表示为 $B=\{2, 3\}$

(二) 构造法（描述法）：把集合元素所具有的共同属性在花括号 $\{\}$ 内表示出来。如全体偶数的集合 A 可表示为 $A=\{x|x=2n \quad n \text{ 为整数}\}$ ；又如大于2小于5所有实数的集合 B 可表示为 $B=\{x|2<x<5\}$ 。

(三) 图示法（文氏图）：用一个平面区域表示集合。集合内的元素以区域内的点表示。如图1-1

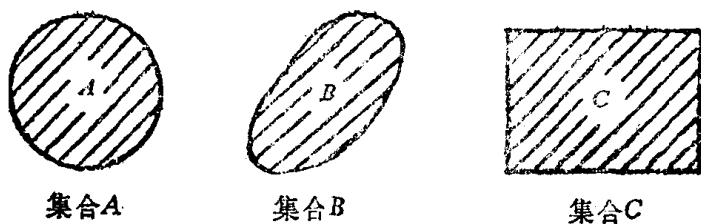


图 1-1



图 1-2

三、全集与空集

(一) 全集：由所研究的所有事物或对象构成的集合称为全集，记作 U 。全集是相对的，一个集合在某种条件下是全集，在另一种条件下可能不是全集。例如，研究经贸公司的经济效益问题，若限于北京，则在京所有经贸公司的集合就是全集，对全国而言，它就不是全集。

(二) 空集：不包含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ 。例如，能被2整除的奇数集合；体温在 45°C 以上所有人的集合均为空集。值得注意的是，不能把空集同仅有一个元素“0”的集合混淆。 $\{0\}$ 及 $\{\phi\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集“ ϕ ”为其元素。

四、子集

如果集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，亦即，若 $b \in B$ ，则 $b \in A$ ，就称 B 是 A 的子集，记作 $B \subset A$ ，或 $A \supset B$ ，读作 B 包含于 A ，或 A 包含 B 。如图1-2

若 $B \subset A$ ，且 A 中至少有一个元素 $i \notin B$ 时，称 B 是 A 的真子集。

例： $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $B=\{2, 4, 6\}$ ，

则 $B \subset A$ ，且 B 是 A 的真子集。

关于子集还有如下特性：

(一) 空集是任意集合的子集。即对任意集合 A ，有 $\phi \subset A$ 。

(二) 任何集合本身就是自己的最大子集。即 $A \subset A$ 。

(三) 集合间的包含关系有传递性。如果 $A \subset B$ ， $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。

(四) 互为子集的集合相等。即 $A \subset B$ ，且 $B \subset A$ ，则 $A=B$ 。

五、集合的运算

引例：有甲、乙两同美国际贸易公司，甲公司商品销往 a, c, d, e 各国；乙公司商品销往 b, c, d, f 各国。若分别以 A, B 表示甲公司和乙公司销售地区的集合，即 $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, f\}$ ，那么

(1) 两公司销往地区的全体是 $\{a, b, c, d, e, f\}$

(2) 两公司共同销售地区是 $\{c, d\}$

(3) 甲公司销往而乙公司不销往的地区是 $\{a, e\}$

这里出现了与数的加、减、乘相类似但又本质不同的运算。下边讨论这些运算。

(一) 集合的并：集合 A 和集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$ ，也有写为 $A+B$ 。如图 1-3，即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

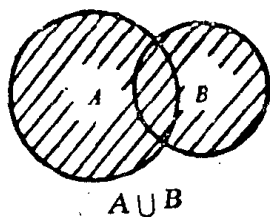


图 1-3

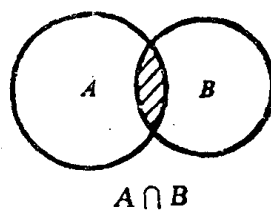


图 1-4

集合的并有以下性质：

(1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

(2) $A \cup \phi = A$, $A \cup U = U$

$A \cup A = A$ 。若 $A \subset B$ ，则 $A \cup B = B$

(二) 集合的交：集合 A 和集合 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记作 $A \cap B$ ，也有写为 AB 。如图 1-4 阴影部分。用构造式表示： $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

集合的交有以下性质：

(1) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$,

(2) $A \cap A = A$, $A \cap \phi = \phi$,

$A \cap U = A$ 。若 $A \subset B$ ，则 $A \cap B = A$

例 1 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A \cap B = \{3\}$

例 2 设 A 为某单位会英语人的集合， B 为会日语人的集合。

则 $A \cup B$ 表示会英语或会日语人的集合

$A \cap B$ 表示既会英语又会日语的人集合。

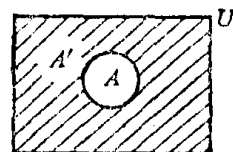


图 1-5

(三) 集合的补：全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合称为 A 的补集（余集），记作 A' ，即 $A' = U - A$ ，如图 1-5，用构造式表示： $A' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$

补集有下列性质：

(1) $A \cup A' = U$

(2) $A \cap A' = \phi$

(3) $A'' = A$

例1 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A=\{1, 3, 5\}$

则 $A'=\{2, 4\}$

例2 设 $U=\{\text{全部产品}\}$, $A=\{\text{合格产品}\}$

则 $A'=\{\text{不合格产品}\}$

(四) 集合的差: 属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差, 记作 $A-B$, 如图1-6的阴影部分。用构造式表示: $A-B=\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

例: 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

则 $A-B=\{2, 4\}$ $B-A=\{7, 9\}$

(五) 集合的笛卡尔乘积: 设集合 A 与 B , $x \in A$, $y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积。又叫叉积。记作 $A \times B$, 即 $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

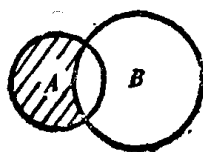


图 1-6

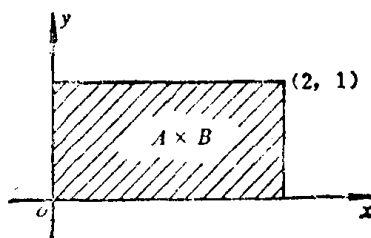


图 1-7

例1. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{2, 3\}$

则 $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

例2. 设 $A=\{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B=\{y | 0 \leq y \leq 1\}$

则 $A \times B = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

它表示平面直角坐标系中矩形区域, 如图1-7。

例3. 某百货公司的两个门市部除去都供应普遍需要的450种商品之外, 又各有特色。现知甲门市部经销800种商品, 乙门市部经销700种商品, 若令:

$A=\{\text{甲所经销商品的品种}\}$

$B=\{\text{乙所经销商品的品种}\}$

试叙述集合 $A \cap B$ 、 $A-B$ 、 $B-A$ 的含义, 并求这些集合的元素各有多少?

解: 由集合定义可知:

$A \cap B = \{\text{甲、乙均经销的商品品种}\}$

其数目为450

$A - B = \{\text{甲独自经销的特色商品品种}\}$

其数目为: $800 - 450 = 350$

$B - A = \{\text{乙独自经销的特色商品品种}\}$

其数目为: $700 - 450 = 250$

六、集合运算律

- (一) 交换律: (1) $A \cup B = B \cup A$
 (2) $A \cap B = B \cap A$
- (二) 结合律: (1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 (2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (三) 分配律: (1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 (2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- (四) 摩根律: (1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 (2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

上述运算律都能直接从上面的定义推出或用文氏图作直观的验证。这里从略。

§2 函数概念与表示法

一、函数的概念

(一) 常量与变量。当我们考察、研究各种自然现象和某一生产过程，以及从事各种经济活动中，经常遇到各种不同的量。有的量在过程中随时变化，称为变量。而有的量在过程中保持不变，称为常量。例如，某公司批发站在汽车运货的过程中，汽车行驶速度、路程和耗油量都在不断变化，是变量；而车上的人数、货物的重量保持不变，是常量。常量与变量是相对的。若在汽车卸货过程中，车速、路程和耗油量成为常量，车上货物重量却逐渐减少而成为变量。

习惯上，常用 x, y, z 等表示变量，用 a, b, c 等表示常量。就宏观意义上讲，初等数学是常量数学，高等数学是变量数学。变量变化有一定的范围，通常用区间表示。区间可分：1) 开区间，即 $a < x < b$ ，记作 (a, b) ；2) 闭区间，即 $a \leq x \leq b$ ，记作 $[a, b]$ ；3) 半开区间，即 $a < x \leq b$ ， $a \leq x < b$ 分别记作 $(a, b]$ ， $[a, b)$ 。上述区间都在有限范围内，统称有限区间。此外，还有无限区间，即 $x > a$ 或 $x \geq a$ ； $x < a$ 或 $x \leq a$ ； $-\infty < x < +\infty$ 。分别记作 $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$ ； $(-\infty, a)$ 或 $(-\infty, a]$ ； $(-\infty, +\infty)$ 。

(二) 函数定义。在某一现象和过程中往往出现几个变化的量，它们之间不是孤立地，而是相互依赖，按照一定规律变化着。

例1. 把边长为 a 的正方形金属材料，四角各剪一个边长为 x 的小正方形，做一无盖小

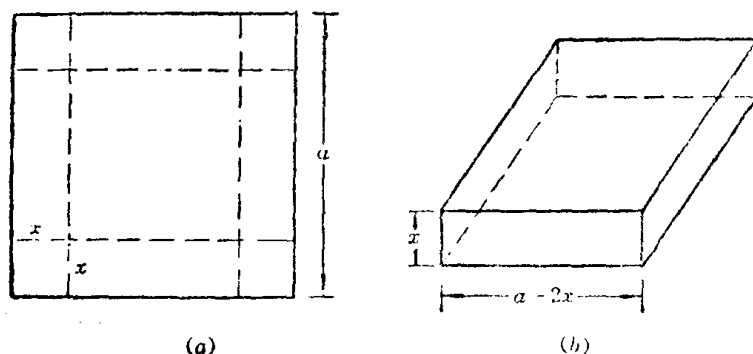


图 1-8

盒, 如图1-8, 小盒的容积 V 和盒高 x 满足下式:

$$V=x(a-2x)^2.$$

这个式子表达了容积 V 随 x 变化的规律, 当盒高 x 在 $(0, a)$ 中取定一个值时, 容积 V 就有一个确定值与之对应。

例2. 某厂每日生产某产品最多150件, 固定成本为100元, 每多生产一件, 成本增加6元。则每日产品的总成本 y 与产量 x 的关系为 $y=100+6x$, 当产量 x 取定一个值时, 则总成本 y 就有一个确定值与之对应。可以看出 x 的变化范围是 $[0, 150]$, y 的变化范围是 $[100, 1000]$ 。

从上边不同例子, 可抽象出共同规律。

定义: 设 x 与 y 是两个变量, 当 x 在某数集 X 中取定一值时, 按某一对应法则, y 总会在 Y 数集中有一个或多个数值与它对应。则变量 y 称为变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$ 。 x 称为自变量, y 称因变量, “ f ”为函数符号, 即“某一对应法则”。 x 取值范围 X 称函数的定义域, 记作 $D(f)$ 。 y 的对应取值范围 Y 称函数的值域, 记作 $Z(f)$ 。若函数 y 与自变量 x 是一一对应关系, 此函数叫单值函数, 否则就叫多值函数。本书除特别说明外, 均指单值函数。

函数关系均包含着三个要素, 即定义域、值域与对应的法则。对于反映实际问题的函数关系, 函数定义域应由问题的实际意义而定; 当函数只是由数学解析式给出时, 其定义域是由式子本身有无意义确定。例如以 R 为半径的园面积函数 $S=\pi R^2$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 而函数 $y=\pi x^2$ 的定义域则是 $(-\infty, +\infty)$ 。

例1. 求函数 $y=\lg(3x-2)+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域

解: 要使函数有定义,

$$3x-2>0 \text{ 且 } 4-x^2>0$$

即

$$3x>2 \text{ 且 } |x|<2$$

$$x>\frac{2}{3} \text{ 且 } -2<x<2$$

因此有

$$\frac{2}{3}<x<2$$

故定义域为

$$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$$

例2. 确定函数 $y=\arcsin \frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解:

$$\left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1 \text{ 且 } 25-x^2>0$$

即

$$|x-1| \leq 5 \text{ 且 } |x|<5$$

$$-4 \leq x \leq 6 \text{ 且 } -5 < x < 5$$

因此有

$$-4 \leq x < 5$$

故函数定义域为

$$[-4, 5)$$