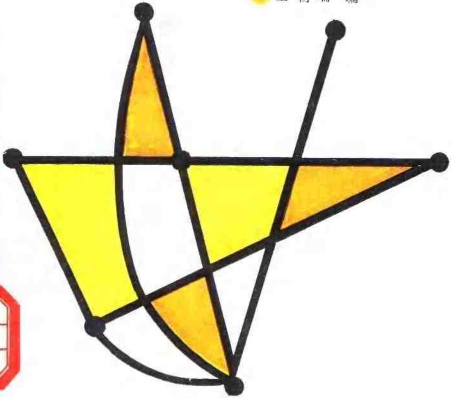
高等院校教材

图论

（修订本）

王朝瑞 编



北京工业学院出版社

图 论

（修订本）

王朝瑞 编

北京工业学院出版社

内 容 提 要

本书第一版曾于 1981 年出版，现在是修订本。

全书共十五章，前十章讨论无向图，后五章讨论有向图。

本书是一本图论入门书，着重介绍图论中的基本概念和图的基本性质，对图的矩阵表示作了较为详细地讨论。书中有较多的例题和习题，并附有习题解答，便于教和学，

本书可供高等工科院校高年级学生或研究生作为图论课教材或参考书，也可供工程技术人员参考和初学图论的读者阅读。

图 论

（修 订 本）

王朝瑞 编

※

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京工业学院印刷厂印刷

※

787×1092 毫米 32 开本 12.875 印张 275 千字

1987 年 6 月第一版 1987 年 6 月第一次印刷

印数：1－10,000 册

统一书号：13434·52 定价：2.10 元

序

图论是近二十年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个新兴的数学分支，在许多领域，诸如物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理各方面都有广泛的应用。因此受到全世界数学界和工程技术界越来越广泛的重视。

我国在五十年代开始开展图论方面的工作，取得了许多可喜的成果。但是总的来说，图论在我国还不够普及，从事这方面研究和应用的人也还不够多，为了普及图论知识，推广图论的应用，以及为进一步培养专门人材创造条件，我院曾受北京市数学会的委托，举办图论普及班，本书是在为这个普及班编写的讲义的基础上修改而成的。

图论的内容十分丰富，涉及的面也比较广，要想在一本书中包括图论的全部内容几乎是不可能的，为了达到普及和推广的目的，本书所涉及的只是图论中的基础知识，但它们又是工程实际中经常用到的，在叙述上，力求作到对基本概念的阐述通俗易懂，便于初学者掌握，在方法上是以线性代数的基础知识作为研究图的主要工具。

本书共十三章，前八章讨论无向图，内容有：图与子图，E 图和 H 图，通路的集合和最短通路，树，割集，图的连通度，图的矩阵表示，平面图。后五章讨论有向图，包括有向图的概念，有向图的矩阵表示，生成树的生成，网络的流，信号流图。

本书在编写中，承孙树本教授的热忱帮助和指导，并认真审阅了原稿，在此表示衷心的感谢。还要感谢应用数学研究所的王建方和蔡晨两位老师，他们详细审阅了手稿，提出许多宝贵意见。

书中有关的 Fortran 语言程序是尤定华老师协助编写的，谨此致谢。

王 朝 瑞

北京工业学院　1980.5.

再 版 序

本书第一版于1981年由人民教育出版社（现高等教育出版社）出版，此次由北京工业学院出版社再版。

这次再版除了对第一版中若干不妥和错误之处作了修正之外，还作了如下修改：

删去了第一版中的割集矩阵的可实现性，图的同调、图的厚度、回路矩阵和割集矩阵的非零大行列式的值、电网络方程等节、增加了匹配和色数两章；在内容的叙述和安排上作了若干改动；有些章节打上*号，难度较大的定理的证明用*号隔开，如果学时数较少，这些内容可以省略。

上述改动大都是根据读者的反映，我在这里谨向他们表示衷心的感谢。

应广大读者的要求，这次再版增加了习题解答，这部分工作是由孙良、赵光复和王成德三位同志协助完成的，有的习题和解答选自张克明、林国宁和张忠辅三位同志编写的“图论及其应用习题解答”一书，在此一并向他们表示谢意。

王朝瑞

1985.12.

目　　录

第一章　图

本章介绍图与描述图的局部结构的一些基本概念和术语，这一章的名词和概念较多，但它们都是基本的，是我们进一步讨论的基础，因此希望读者能熟练地掌握这些概念，这对以后的讨论是非常重要的.

1.1　图的概念

1.1.1　引例

我们所讨论的图（graph）与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图形等是很不相同的. 先来看两个例子.

例 1.1.1　有六个男子篮球队：解放军队，湖北队，广东队，北京队，四川队和上海队. 这六个球队进行比赛的情况是：

解放军	对	广东、北京、上海；
湖北	对	广东、四川、上海；
广东	对	解放军、湖北；
北京	对	解放军、四川、上海；
四川	对	湖北、北京、上海；
上海	对	解放军、湖北、北京、四川.

那么上述六个球队和这六个球队按上表进行的比赛构成一个“图”.

例 1.1.2 北京、上海、天津、沈阳、广州、南京、重庆和连接这七个城市的铁路构成一个“图”.

因此，图论中所谓的图是指某类具体事物和这些事物之间的联系。如果我们用点表示具体事物，用线段表示两个具体事物之间的联系，那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的线段的集合所构成。这些点称为图的顶点(vertices)或节点(nodes)，线段称为边(edges)或支路(branches)。假设 i，j 是两个顶点，如果 i，j 之间有联系，那么 i 和 j 之间有一条边，用(i, j)或 ij 表示这条边，i，j 称为这条边的端点(end)。

在例 1.1.1 的图中，如果我们用顶点 1、2、3、4、5、6 分别代表解放军队，湖北队，广东队，北京队，四川队和上海队，那么所说的图是由顶点集合 $V=\{1,2,3,4,5,6\}$和边的集合 $E=\{(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$构成.

假如我们用平面上的几何点表示顶点(为清楚起见，用黑点来表示)，用直线段或曲线段表示边，那么可以把一个图画

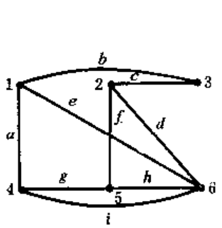


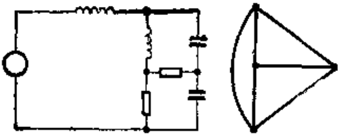
图 1.1-1

图 1.1-2 表示亲族关系的图

在平面上，而得到一个描述该图的几何图形．图1.1-1所示的图形就是描述例1.1.1的图的一个几何图形．

图还可以用来表示许多其他结构．譬如，用顶点表示人，边表示人与人之间的关系（如父子关系），那么亲族关系就可以用一个图来表示．图1.1-2给出这种图的几何图形．

又如，电路理论所依据的基尔霍夫电流定律和电压定律只与电路的拓扑性质有关，或者说，只与电路的联接性质有关，而与各支路所含的元件无关．因此任何具体电路都可以抽象为一个图．图1.1-3(b)是描述图1.1-3(a)所示电路图的一个几何图形．



(a)　　(b)

图 1.1-3

我们所以把一个顶点集合和一个边的集合称之为“图”，正是因为它们可以用一个图形来表示．这种图形有助于了解有关图的许多性质．但是必须指出，一个图的几何图形仅描绘出它的顶点和边之间所保持的相互关系，至于顶点的位置以及边的长、短、曲、直都是无关紧要的．

上面我们从直观上阐述了图的概念．从上面的讨论中可以看到，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则完全是不必

要的，换句话说，图的概念可以抽象化.

1.1.2 集合的积与二元关系

集合的积与二元关系这两个概念在图的抽象定义中起着重要的作用. 所以在给出图的抽象定义之前，我们先来讨论这两个概念。

两个具体事物 a 和 b，按照一定的次序排列，a 在前，b 在后，记成 (a, b)，则称 (a, b) 为一个有序对.

我们常常会遇到有序对的概念. 例如，在所有参加乒乓球比赛的选手中，有序对 (a, b) 可以表示冠军和亚军. 因此，有序对 (a, b) 和 (b, a) 是不同的.

定义 1.1.1 设 A 和 B 是两个集合. 由 $a\in A$, $b\in B$ 所组成的形如 (a, b) 的所有有序对构成的集合，称为 A 和 B 的笛卡儿积 (cartesian product)，或称为有序积，记作 $A\times B$.

笛卡儿积 $A\times B$ 的一个子集合，称为 A 到 B 的一个二元关系(binary relation).

特别地，当 $A=B$ 时，集合 A 到集合 B 的二元关系称为集合 A 上的一个二元关系.

例如，设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,d\}$，则

$$\begin{aligned} A\times B &= \{a,b,c\}\times\{a,b,d\} \\ &= \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,b), \\ &\qquad (b,d),(c,a),(c,b),(c,d)\} \end{aligned}$$

集合 $\{a,b,c\}\times\{a,b,d\}$ 的一个子集，譬如，$\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,a)\}$ 是 $\{a,b,c\}$ 到 $\{a,b,d\}$ 的一个二元关系.

集合 A 到集合 B 上的一个二元关系，是 A 中与 B 中有关系的元素的直观概念的形式化．事实上，如果 R 是 A 到 B 的一个二元关系，并且有序对 (a,b) 是 R 中的元素，那么元素 a 和 b 有某种关系．

上面我们是针对有序对来讨论的．如果组成偶对的两个事物 a 和 b 与次序无关，也就是说偶对 (a,b) 和偶对 (b,a) 相同，则称这种偶对为*无序对*．无序对也是经常会遇到的一个概念。譬如，在所有参加乒乓球男子双打者中间，偶对 (a,b) 表示获得冠军的一对选手，那么 (a,b) 和 (b,a) 表示同一对选手．

定义 1.1.2 设 A，B 是两个集合．由 $a\in A, b\in B$ 所组成的无序对构成的集合，称为 A 和 B 的*无序积*，记作 $A\&B$．

无序积 $A\&B$ 的一个子集，称为 A 和 B 的一个二元关系．当 $A=B$ 时，A 和 B 的二元关系称为 A 上的二元关系．

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$\begin{aligned}A\&A=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),\\&(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}\end{aligned}$$

无序积 $A\&A$ 的一个子集

$$\begin{aligned}\{&(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),\\&(2,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}\end{aligned}$$

是 A 上的一个二元关系．

1.1.3 图的定义

定义 1.1.3 一个图 G 定义为一个偶对 (V,E)，记作

$G=(V,E)$，其中

(1) V 是一个集合，它的元素称为顶点；

(2) E 是无序积 $V\&V$ 的一个子集合，其元素称为边。集合 $V\&V$ 中的元素可在 E 中出现不止一次。

我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集合与边集合。如果 $V(G)$ 和 $E(G)$ 都是有限集合，则 G 称为有限图；否则称为无限图。在本书中只限于研究有限图。

沒有任何边的图称为空图(empty graph)，记作 ϕ。只有一个顶点的图称为平凡图(trivial graph)。

图中顶点的个数叫做图的阶(Order)，连接两个相同顶点的边的条数，叫做边的重数(multiplicity)。

在本书中如无特殊说明，总是用 p 表示图的阶，用 q 表示图的边数。

在1.1.1节讨论图的概念时曾指出，一个图可以用一个几何图形来描述。在保持图的顶点和边的关系不变的情况下，图形的位置、大小、形状都是无关紧要的。因此，在图的讨论中，我们常常画出图的一个几何图形，并且就把它作为这个图的本身。图论中大多数定义和概念是根据图的表示形式提出的。一条边的端点称为与这条边关联(incident)，反之，一条边称为与它的端点关联。与同一条边关联的两个端点称为邻接(adjacent)。如果两条边有一个公共的顶点，则称这两条边邻接。图 $G=(V,E)$ 中形如 (v,v) 的边，$v\in V$，也就是端点重合为一点的边叫做环(Loop)。

沒有环以及沒有重数大于1的边的图称为简单图(simple graph)。

从上一节的讨论和图的定义可知，一个集合 V 和 V 上的

一个二元关系就是一个图. 因此图的最本质的内容实际上就是一个二元关系，也就是顶点和边的关联关系. 一个系统或一个结构若具有二元关系便可用图作为数学模型，并且图具有直观性和艺术性，这就是图所以被广泛的应用于许多科学领域的原因.

1.2 完全图 二分图 补图

定义 1.2.1 每一对不同的顶点均有一条边相连的简单图称为完全图(complete graph)。n 阶完全图记作 K_n.

图 1.2-1 所示的图是一个 5 阶完全图.

下面的命题是显然的.

命题 1.2.1 n 阶完全图有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边.

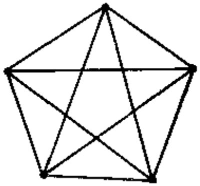


图 1.2-1

定义 1.2.2 设 V_1 和 V_2 是图 G 的顶点子集，使 $V_1\cup V_2=V(G)$，$V_1\cap V_2=\phi$ 且 G 的每一条边的一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中，则称 G 为二分图 (bipartite graph)，记作 $G=(V_1,V_2;\ E)$.

如果 V_1 中的顶点与 V_2 的每个顶点都相联，则称为完全二分图. 若 $|V_1|=m$，$|V_2|=n$（符号 $|V|$ 表示集合 V 中元素的个数），则完全二分图记作 $K_{m,n}$.

图 1.2-2 的(a)，(b)分别是 $K_{3,2}$ 和 $K_{3,3}$ 的图形.