高等学校教材

非线性振动

王海期 编

FEIXIANXING ZHENDONG

高等教育出版社

高等学校教材

非线性振动

王海期　编

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是经过国家教育委员会工科理论力学教学指导小组公开征稿、严格评选和审定出来的工科硕士研究生通用教材，书中全面和系统地论述了非线性振动的基本特征、基本概念和基本方法。本书在内容上兼顾了传统的基本内容和本学科的最新发展，在体系上兼顾了振动类型和研究方法两种系统性的要求。全书分为自治系统和非自治系统两部分，各自包括其振动现象和方法的论述，内容包括：绪论、几何法、解析法、各种振动类型的定性和定量分析、多自由度系统。

本书具备了较多的习题，类型全面，不仅便于教学，也可供工程技术人员参考。

高等学校教材

非 线 性 振 动

王海期 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.875 字数 280 000

1992 年 5 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001— 1 124

ISBN7-04-003790-4/TB·196

定价4.50元

序

本书是作为工科硕士研究生非线性振动课程的教材而编写的，也可作为某些对力学要求较高专业的本科高年级选修课教材。适用的教学时数为40学时左右。

工程中提出的非线性振动方面的问题在不久以前还只是零星的，孤立的。随着生产和科技的发展，对动力计算的要求愈来愈高，也愈来愈有可能实现。作为动力计算的一个方面，非线性振动的理论和应用近年来也就受到工程界愈来愈广泛的关注。其理论研究和应用研究已出现在许多工程技术学术刊物、学术会议以及有关书籍中，它也应该反映到工科院校的力学课程教学中。但在目前，适合于教学的非线性振动书籍还比较缺乏，希望本书能弥补这一不足，成为全面和系统讲述非线性振动的基本概念、基本物理特征、基本方法的教材。

非线性振动课程内容的组织体系是一个比较难处理的问题。这是因为这门课程除须分门别类地介绍各种振动型态之外，还须分门别类地介绍各种方法；两种系统性的要求不易兼顾。本书尝试兼顾这两种要求，作法是把内容分为自治系统和非自治系统两部分，每一部分包括各自的方法和振动现象的论述。因为这门课程所应研究的各种振动现象和各种方法都有独立意义。后者已形成数学方法，但工科学生在本课程范围之外却不大有机会接触；前者是课程的主体，更要着重讲授。其次，除几何法在本书中只应用于自治系统振动外，各种解析法在自治系统和非自治系统的应用上都有区别，有些方法的这种区别还很明显和重要。再之，从体

系上看这样安排能够兼顾两种系统的要求，使两种系统都得到清晰和全面的论述。因为系统性对一门课程来说虽不是最重要的，但对于帮助学生掌握内容无疑有很大的好处。

在自治系统部分，第二章介绍几何法和用几何法所得到的关于自由振动的研究成果，包括相平面和几种作图法，奇点附近和大范围运动，以及稳定性问题。第三章讨论各种方法，介绍小参数法、多尺度法、KBM法、谐波平衡法等基本解析方法。第四章的内容是保守系统和耗散系统的自由振动，第五章的内容是自激振动。这两章应用前面的方法研究自治系统的振动现象，突出非线性振动的特点，如自由振动的频率与振幅的关系，自激振动的周期运动在一定范围内与初始条件无关以及能量消长的规律，还有振动的多谐性等等。第六章以后属非自治系统。第六章主要讨论研究方法，该章论述了各解析法应用于非自治系统时须进行的变形。第七、八章分别应用这些方法研究强迫振动和参数振动的现象，突出振幅的多值现象、跳跃现象、频率俘获和同步现象、异频振动、周期性参数激励引起的失稳和响应等非线性振动的特殊现象。最后第九章研究多自由度非线性系统的振动，涉及以上各种现象在多自由度系统中相应的表现形式，以及多自由度非线性振动所特有的具有丰富物理特征的一些现象。在讨论振动现象时，各章附有一些较大型的工程实例，以便集中反映这些现象，同时说明各种方法的综合应用。

在本书编写过程中，华中理工大学教材科和教学实践科对本书的资料收集工作和计算机绘图工作给予了资助，邹庆丽同志为本书作了大量的技术性工作，谨表示衷心的感谢。

作者水平有限，本书难免有疏漏和错误，敬希指正。

编者

1991年

目　录

第一章　绪　　论

1.1　研究的内容

振动系统作为动力系统，描述其运动状态的变量及变量对时间的第一、第二阶导数出现于同一个微分方程内。如果出现的形式是非线性的，系统就是非线性振动系统。严格地说，一切振动系统都是非线性的。由于线性微分方程理论已发展得如此完善，更由于在许多场合下，线性化所给出的线性系统能够足够准确地代替真实系统，因而线性振动的理论和工程应用得到很大的发展。然而非线性振动的研究现在愈来愈显得重要和不可缺少了。这是因为，首先，在一些场合下，线性化的结果相当不准确。例如在转子动力学中，轴承阻尼和叶片在流体中的阻尼都是非线性的。如果把它们看作线性的，则在估计事故中的大幅度振动时，会过于不准确。更重要的是，有的系统如果线性化就失去了本来面目，失去了最本质的运动现象。例如在日常生活中很普遍遇到的自激振动，它的运动规律就是线性化所无法描述的。这种系统运动的机理是其振动能量不断消耗和来自常能源的不断补充，线性方程不可能描述这种消长的关系。

非线性振动研究的基本内容之一是建立对真实振动系统的计算方法及其精度的改进，以及探索某些特殊现象的规律性。后者往往显得比前者还要重要些，而且这些众多的特有现象本身都是很有趣味的问题。例如，线性保守系统振动中最重要的概念是固有频率，“固有”的意义就在于它与初始条件无关，也就与振幅无

关。对非线性系统来说，这个概念不存在；系统自由振动的频率明显与振幅有关，固有频率这个概念本身就没有意义。线性系统强迫振动的频率必然与激励的频率相同，但非线性系统强迫振动的频率相当复杂，有时异于激励频率的振动成分很突出。强迫振动问题中最重要的频响关系在线性系统和在非线性系统也不大相同,前者是单值的，后者一个频率可能对应几个振幅值。另外,线性振动作为稳定平衡附近的运动总是稳定的，而非线性振动牵涉的问题广泛得多，呈现出多种稳定和不稳定运动。稳定的运动使得相近的其他运动向自己靠拢，而不稳定运动在数学上或近似解中虽然存在，却无法在物理上实现。因此运动的求解和运动稳定性的判断常是分不开的。这样众多的现象伴随着工程实践不断提出的问题构成非线性振动丰富的内容。

另一个基本内容是非线性振动理论中的方法。研究线性振动的有力工具线性微分方程现在不够用了，必须发展新的方法。除了个别问题之外，非线性振动是无法精确求解的。在它发展的历史上，在它与其它学科的相互渗透中，已经形成了一系列行之有效的近似求解的方法。它们不断充实完善非线性振动理论，共同发展。

非线性振动的理论分析方法沿着两个方向发展：第一是定性方法，本书着重介绍几何法，第二是定量方法，或称解析法。定性方法根据微分方程本身的性质对其在相平面或相空间内的积分曲线积分曲面作出定性分析，并据此判明系统的运动规律。解析法通过算式计算近似解。在本书中,对方法的讨论集中在第二章、第三章和第六章。方法的运用则贯穿全书。

随着计算机的广泛应用，也由于上述两大类方法都有其局限性，数值计算愈来愈多地引入非线性振动的研究中来。数值计算当然有明显的长处，例如在精确性和适应性等方面。但数值计算

不能完全取代非线性振动的理论分析方法。这首先是因为纯粹的数值计算不便对运动作规律性的描述，更不便表达系统各参数对运动规律的影响。其次，从经济上说，对某些复杂的计算问题，计算机的费用还是相当昂贵的。因此，对于比较复杂的问题，应该提倡理论分析与数值计算并用的方法，即首先用非线性振动理论分析运动的性质、轮廓、稳定性等，或是给出求解的算式，然后对于不能求解的部分作数值计算，也就是进行分析指导下的数值计算。这种作法在本书的多处得到体现。本书作为非线性振动理论分析的教程只讨论理论分析的方法，而把数值计算作为辅助性的手段。

1.2 方法概述

1. 三种研究方式

和许多在物理或技术科学中数学上无法精确求解的问题一样，非线性振动的研究有实验分析、理论分析、数值分析三种方式，或者说三种途径。

理论分析是非线性振动学科最基本的研究方式。它提出一系列切合实际需要的解算方法，揭示非线性振动的基本规律和现象。这是本书的主要内容。

由于理论分析使用的近似方法与问题的物理本质没有内在的联系，它的结果就不会完善无缺，有局限性，有时其可靠性还值得怀疑。因此实验分析和数值分析也是必不可少的研究手段。当然，实验分析的意义远不止作为理论分析的补充和验证。有时要研究的问题很复杂，或是系统本身结构复杂，机理复杂，或是所处的环境复杂，理论分析要经过抽象、模型化等处理，这时实验就成为检验这些处理过程的标准。有时问题过于复杂，理论分析无从着手，实验可以成为研究的主要手段。对于重大的工程项目，没有实验数据是难以令人接受的。由于近代科学技术不断发展，实验方法

也日趋完善，实验手段的作用也更为显著。另一方面，在非线性振动学科发展的过程中，有些实验现象起了先导的启发性的作用，对该现象进行观测，收集第一性资料，为检验理论分析成果及总结某些基本规律提供充分的依据，其作用更加重要。

数值分析是伴随计算机的广泛使用和各种计算方法的不断完善而兴起的研究方式。由于它适应性强、精度高，在非线性振动的研究中起着越来越重要的作用。它使用的基本方法很多是早已具备的，但由于运用起来计算量太大而令人望而却步。解决这个困难正是计算机的长处，运用计算机使这些老方法获得了新的生命力。当然新的方法也在不断涌现。

从根本上说，用数值计算来求解非线性振动问题就是求出微分方程描述的运动的时间历程，例如对于已知的运动方程及初始条件

$$\{\dot{x}\}=\{f(\{x\},t)\},\quad \{x(0)\}=\{x_0\}$$

求出 $\{x\}$ 随时间 t 变化的值。因此，运用求解初值问题的数值方法，例如 Runge-Kutta 法或有限差分法等等，就可完成任务。但这样运用各数值方法原始形态的场合并不多见，因为实际上振动研究往往注重某些特殊的运动，最注重的当然是周期运动。研究周期运动固然也可以解初值问题，等待解经过过渡过程进入定常的周期解，但这显然不是捷径。研究周期运动的捷径是把初值问题变为两点边值问题[1,2]，即把问题变为

$$\{\dot{x}\}=\{f(\{x\}),t\},\quad \{x(0)\}-\{x(T)\}=0$$

运用打靶法求解，其中 T 是振动周期。打靶法的要领是取定一组初值，按初值问题求解运动方程，描准 $t=T$ 时应符合的上述边值条件打过去。如果不符合，就是没有打准，则按一定的修正方法修正后再描准打过去。很快就可打准。如果 T 是已知的，就是固定边界的边值问题。如果 T 是未知的（例如自由振动），则把 T 包括在

待定的参数中一并求出。这种方法已获得了一系列包括许多自由振动、自激振动、强迫振动、参数振动[3]的结果。从这些问题的形式已可看出数值积分能够完成一些理论分析难以完成的工作。首先，这些方程组中变量$\{x\}$可以是耦合的，这会造成理论分析中很大的困难。其次，方程组中的非线性因素可以是不小的量，这也会造成理论分析求定量解的很大困难。而这些困难对于数值积分来说，不但容易克服，而且其工作量也不会很大。另外，对某些问题，例如目前受到热烈关注的混沌问题，理论分析方法尚无法发挥多大的作用，数值分析即成为其主要的研究手段。

数值分析除这样对常微分方程直接对时间求积分之外，在非线性振动的研究中还有其他的功能。例如对于连续系统可以同时对偏微分方程进行空间坐标和时间坐标的离散而进行数值计算，也可以用某些方法分离变量后，或是对时间坐标[3]或是对空间坐标[4]进行数值积分。更多的应用是作为理论分析的辅助手段。对许多问题，理论分析即使采用一些近似的简化，也不能全部用解析法求得解析解，往往遗留下一些解不出的部分待数值分析来完成。这种作法在本书的章节中多次出现。

2. 理论分析的方法

非线性振动理论的主要数学工具是微分方程。微分方程在发展过程中发现用初等函数表达解的可能性极为有限之后，出现了三个重大的方向[5]。其一是引入新的函数作为解的表达，并研究这些函数的性质和数值。非线性振动中有个别的问题就可以用这种方法来求解，例如摆的大幅振动解用椭圆函数表达。然而这方面的例子是很有限的。起主要作用的是微分方程定性方法和定量方法。二者的奠基人都是法国 Poincaré。

定性理论不通过解的表达式而研究解的性质。例如几何法作出微分方程所定义的积分曲线，运动稳定性理论引入另外的函数，

通过它们去研究解的性质。首先研究的是奇点和极限环。奇点相当于非线性振动中的平衡点，而极限环所对应的孤立周期解在非线性振动中也有自激振动与之相当。把常微分方程定性理论与非线性振动联系起来主要应归功于苏联的 Андронов 等建立起来的学派。他们把定性理论用来解决大量的电学和力学中出现的非线性振动问题[6]。定性理论在发展的过程中，一方面在理论上形成了许多讨论奇点、周期解、极限环的定理、判据等，一方面形成了一些实用的作图方法，例如等倾线法、Liénard 法、点映射等。

定量方法中摄动法来源于天体力学 [7,8]。天体所受诸力在大小上区别甚为明显，便于用小参数的不同幂次来表达。而较高幂次项就称为摄动。这促使 Poisson 寻找小参数的幂级数形式的解。Poincaré 研究了这种问题的周期解。由于求周期解过程中出现永年项问题使解不能一致有效，出现了 Lindstedt-Poincaré 法，对方程自变量作微小的变形而消除永年项。它是奇异摄动法的重要组成部分。第二个方法是 KBM 法。提出这一方法的 Боголюбов 和 Митропольский 称此法为渐近法[9]。它借用二阶线性系统简谐解的形式，把振幅、相位的导数和解本身都用小参数的幂级数来表示。对于多种不同的情况只要把解的形式略作改变就可以适用，因此在非线性振动的研究中应用很广，起了巨大的作用。第三个方法是多尺度法，出现于 50 年代[11]。引入多尺度的自变量，即把常微分方程原来的自变量用多个尺度不同的自变量来代替。尺度不同的自变量由原自变量(或其某些函数)和小参数的不同幂次(或序列)组合的乘积组成。原来的常微分方程问题也就变成偏微分方程问题。这类方法也由于适用性广而起着越来越重要的作用。第四个方法是谐波平衡法，适用于找周期解。把周期解设为 Fourier 级数的形式，代入原方程之后，比较诸谐波的系数可以得到与所需 Fourier 系数个数相当的代数方程，从

而确定周期解。此外，迭代法在非线性振动问题求解中也很有用。

1.3 非线性因素

机械振动中的非线性因素来自物理和几何两方面。

线性振动中假定弹性力为线性是基于材料应力应变关系符合Hooke定律。当材料的这种关系明显偏离Hooke定律时,弹性力就是非线性的，而形成物理的非线性因素。例如工业中用以防止振动、冲击的传递或起缓冲作用的橡胶,其简单拉伸压缩的应力应变关系在静态即是非线性的[12]，而动态的应力应变关系更因为材料内摩擦大而呈明显的非线性。固体燃料火箭的药柱由粘弹材料构成,其本构关系也呈明显的非线性[13,14]，它形成火箭结构动力计算中的非线性因素。金属材料变形过大进入非线性弹性或塑性状态后,应力应变关系也成为非线性的。

线性振动中遇到的粘滞阻尼实际上只存在于特定的情况下。一般情况下阻尼呈非线性特性，这也是一种非线性因素。例如流体对简单的圆柱体的阻尼就是与速度的平方成正比的。最常见的干摩擦的特性却是很复杂的。Coulomb阻尼是常数，当然已属于非线性。滑动摩擦力随接触面相对速度而变化,在某些情况下可以形成负阻尼(作正功的阻尼)而产生自激振动。此外,材料恢复力的滞后现象由于耗散能量,也体现为一种重要的阻尼作用,其本质也是非线性的。

物理非线性不一定来自材料本身，它还可以来自结构各部分的连接。例如[15],如果说一个焊接结构是线性结构的话,一个铆接结构势必有相当强的非线性成分，而一个组装了电子器件和其它装置的板架就远不是线性的了。现代航天技术的发展要求在轨道上组装大型空间结构[16]，各部分之间的联结由于所产生的

阻尼和撞击会形成明显的非线性因素，使结构的动力计算和试验复杂化。

几何非线性来源于大幅度振动或振动系统构造上的原因。它在实际问题中出现的形式是多种多样的，[17]中列举了许多情况。

第二章　几何法和单自由度系统自由振动的定性分析

对单自由度系统来说，几何法是在相平面上作出积分曲线以表明解的性质的方法。这一章在列举几个单自由度自由振动的实例后，介绍几何法和这个方法对这种系统的应用，讨论其稳定性和某些一般性质。

线性保守系统的自由振动由于只研究系统势能极小值附近的运动，平衡点总是稳定的，而微幅振动总是简谐的。非线性振动牵涉的条件比较广泛，运动状态也就比较复杂多样。另外，线性保守系统振动问题中最重要的固有频率这一概念在非线性振动问题中由于振动频率与振幅有关而失去意义，这是非线性振动的重要特点之一。

2.1　几个实例

第一个例子考虑单摆。摆长为 l，质点质量为 m，如图 2.1所示。对悬挂点写出力矩和动量矩变化的关系式得

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\sin\theta=0 \tag{1-1}$$

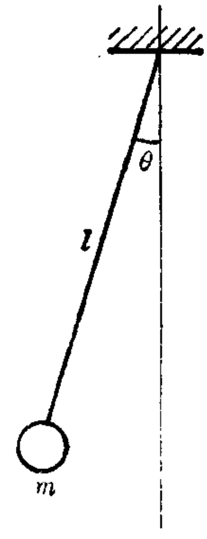

图　2.1

其中 θ 是角位移如图所示。这个描述运动的变量现在就是以非线性的形式出现的。在线性系统振动理论中研究的单摆考虑的只是微幅振动即 $\sin\theta\approx\theta$ 的情况。当这个近似关系因 θ 大而不成