

數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Pansystems Theory and Mathematical Methods

泛系 理論與數學方法

吳學謀 著



数学方法论丛书

泛系理论与数学方法

吴学谋 著

江苏教育出版社

1990 · 南京

(苏)新:

数学方法论丛书
泛系理论与数学方法
吴学谋 著

出版发行: 江苏教育出版社
(南京中央路165号, 邮政编码: 210009)
经 销: 江苏省新华书店
印 刷: 江苏新华印刷厂
(南京中央路145号, 邮政编码: 210009)

开本 850×1168 毫米 1/28 印张 4.125 字数 88,800
1990 年 7 月第 1 版 1992 年 3 月第 2 次印刷
印数 1,501—5,530 册

ISBN 7—5343—1052—0

G · 923

定价: 1.65 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误, 可向承印厂调换

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主 编：徐利治

副主编：朱梧櫨 萧文强

编 委：(按姓氏笔划为序)

王兴华 王鸿钧 朱梧櫨 刘凤璞

吴学谋 吴望名 欧阳绛 郑毓信

赵振威 徐利治 唐复苏 萧文强

出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练

在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究和数学方法论课程的开设，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称《丛书》)，并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

本丛书共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

前 言

本书概括地介绍泛系理论、逼近转化论与电磁介质动力学等价论，并结合论及数学方法与数学思想。我们着重介绍背景、思路、方法、概念与一部分结果，而省掉了纯属技术性的证明细节。自然，一旦明晰了思路与背景，大部分结果是可以作为一般性数学习作来证明的。

书中列述了数百个定性定量的结果，它们对多种专题有用，也可能作为引玉之砖，激发一些新的研究。

我们侧重从宏观扩形角度或泛系观来看待事物与数学方法，许多内容来自多种学科专题的概括，属一家之言，求教于读者，愿共同探讨。

目
录

一 泛系理论与泛系数学观

1.1	从泛系方法观说起	1
1.2	PM3456, 三对象、四侧重、五背景、 六发展	3
1.3	广义系统, 泛语与泛网	7
1.4	两大关系及其衍生	11
1.5	典型二元关系, 泛序关系与异同关系及 其衍生	13
1.6	对单值化的泛系数学观	26
1.7	动静关系与泛导, 泛对称与简化法, 电 磁介质动力学等价理论	34
1.8	泛系BC ² S分析	47
1.9	观控关系与相对律	51
1.10	因果分析与数学方法	57
1.11	生克关系与观控性(续), 相容法	61
1.12	泛权聚类与识别	66
1.13	泛系经与数学和数学方法	70
二	逼近转化论的泛系方法分析	
2.1	概论	88
2.2	从逼近概念的抽象与分化说起	93
2.3	对等价定理的泛系反思	96
2.4	变分、驻值与泛环分析中的泛系观	101
2.5	变分转化的进一步研究.....	107
2.6	转化原则的形成与泛系方法.....	117
	参考资料	120

一 泛系理论与泛系数学观

1.1 从泛系方法观说起

局整形影二根本，生成系统泛对称，
兼及关系千万类，千万方法三显生。
两大关系三显生，十五(十八)泛系倍相乘，
自转多变看世界，万事万物互传神。

泛系理论是宏微兼顾多层网络型的跨学科研究。更详细地说，泛系研究是侧重于泛五类(广义的系统、关系、对称、转化、优化)的联系与应用的理论、数学、方法、技术与哲学的专题群，是一种关于真善美、理工文哲医且宏微兼顾网络型的跨学科研究。它的一种观点与框架就是我们前引的所谓泛系观56字诀(个别用词我们以后介绍)。人类所发展或创用的方法，从泛系观来看，大多数属三显生之法，也即泛三类(广义的系统、关系、对称)显生(广义的、相对的或近似的优显、优选、优设、优创、优观、优控、优拟……)之法。千千万万的数学方法也几乎概莫能外。

泛系理论与多种学科专题有所交缘，可能作为它们的广义的缩影、显微、鸟瞰、合照与网联的工具、手段或方法，但不取代各门学科专题或方法的具体研究。各门学科专题或方法的具体研究，一般不属泛系理论的筹建目标。相反，泛系理论与泛系方法的很多工作是来源于具体学科专题(特别是数学与数学方法)的一种概括或泛化探索，汇百家之流，探一家之言。

老子的《道德经》第一章说：

道，可道，非常道；名，可名，非常名。无名，天地之始；有名，万物之母。故常无，欲以观其妙，常有，欲以观其微。此两者同出而异名。同谓之玄，玄之又玄，众妙之门。

从任继愈的译述，即是：

“道”，说得出的，它就不是永恒的“道”；名，叫得出的，它就不是永恒的名。“无名”是天地的原始；“有名”是万物的根本。所以经常从无形象处认识“道”（无名）的微妙，经常从有形象处来认识万物（有名）的终极。这两者（有形和无形）是同一个来源而有不同的名称。它们都可以说是深远的，极远极深，它是一切微妙的总门。

事物的终极本源只能是物质及其规律。可道可名有常之道，只是一种经某种广义主体显化观控的道。泛三类或泛五类及其显生则是经某种广义主体认识、抽象、概括、缩影、扩形或显生了的道，是一种特化的可道可名有常的道或其缩影与变型，是经过泛系观扬弃的道。

从泛系观来看，数学是研究道或泛系化的道的形式与量的横断科学或网络型科学。它通过特化的数学研究使道更充分可观控建模，它与内容或质相对独立解耦而去研究泛三类、泛五类及其显生的某些形式与量的方面。数学建模形式上是一种由广义局整关系、形影关系复合的泛模拟过程，典型的是泛积（直积的商缩影）过程，后者也是数系发展与扬弃的基本手段。另一研究重点与建模手段是泛对称及其转化的显生，是泛导（广义的变变关系、广义的微分积分）显生以及形式、量、泛五类的形式基因基砖的显生（泛系经级变法与公因法）。数学结果也大都表现为泛对称与因果显生的形式。数学概念的推广与引申大都根据外延与内涵反比律而纯化某些概念的必要类征来升华，它是一种特化的关系显生法。推广定理最

机械的方法是在广义因果网显生基础上的泛导法。绝大部分的数学模型是以泛五类及其显生的泛系关系形式出现的，而典型的则是各类泛导方程。泛系经的许多方法，诸如解题法、五转法、简化法、相容法、六七法、七化法、再现法、创新法、六合法、目标法、宏五法、网五法、泛环法、因果法、活治法、扩变法、观控法、树索法、异同法、单值法等20多种方法都可直接、间接、或宏或微地用于数学的教学与研究。

泛系理论与数学分别从不同的角度来追求三兼顾：相对的普适性，相对的确切性，形式的相对具体性。它们的另一种表现是现代科学美的追求：明晰性、简单性与统一性的三结合。由于几千年几百代数学家的努力以及人类的实践，数学在三兼顾与三结合方面有了独特的发展，是泛系理论筹创的楷模。在还没有提出泛系研究以前，人们早已泛系化地思维了。泛系理论只不过是人们已有认识或实践的一种概括或显生尝试与探索，它仍在草创之中，它本身的发展有待于其数学理论的建立与支持，这些均属发展中的研究，不论从哪一个方面讲，它都无法与发展了几千年的成熟的数学相比。但是它也不简单地全化归于数学之内。泛系理论的一些原理、方法与模式如何具体地运用到数学与数学方法的研究中去，这是需要在科学研究的实践过程中逐步解决的。

1.2 PM3456：三对象、四侧重、 五背景、六发展

泛系理论或泛系方法论的一个较全面的简明框架是PM 3456，它包括泛系理论研究对象的三个方面，侧重面的四个方面，历史背景或动因的五个方面与总体发展构思的所谓六发展。PM 3456也是探索中的泛系数学与有关的数学方法论

研究的一种背景性框架。

泛系理论从宏观兼顾、多层网络型的跨学科研究这种角度来探索物理、事理与数理或一般事物机理，这是一种较宏观或较泛概的目标。更具体地说，它研究所谓泛三类(广义的系统、关系与对称)或泛五类(泛三类及广义的转化与优化)。比泛三类或泛五类更具体的是：两大关系三显生，十五泛系倍相乘，自转多变看世界，万事万物互传神。所以，所谓泛系三对象只是一种方便说法，实际上有不同层次的一大类对象。其中两大关系是指广义的局整关系与形影关系，而三显生指泛三类的广义优化——显生：相对的优显、优设、优选、优创、优观、优控等。而15泛系则指泛系理论的15种基本概念或范畴：广义的系统、对称、显生与广义的12种关系：局整、形影、宏微、动静、因果、观控、生克、泛序(广义的次序)、串并、模拟、集散、异同，也简称泛系关系。由15泛系扩展生成30多个概念，包括缩影、扩形、鸟瞰、商化、积化、显微、简化、相容化，以及所谓泛语、泛网、泛积和多种典型的模拟：隐模拟、显模拟、准模拟、协模拟、商模拟、元模拟、泛模拟等。这就是“十五泛系倍相乘”之意。30多个概念的自转多变以及有关数理研究形成一种描述、分析、运筹事物的观点、框架与网络，这就成为泛系理论的努力方向之一。

泛系四侧重对事物一般机理的研究引入了另一种限定，即侧重关系、关系转化、泛对称(广义对称)与充分可观测建模。多变与少变、繁与简、自由与约束、异与同等的联系与转化叫做泛对称，包括广义的、相对的、近似的对称以及变化中广义结构、广义软件、广义关系的相对少变性。泛系理论发现这是事物与学科中既相对普适又相对具体而可以逐步精确化研究的性质与概念，对它的强调有某种新的概括的意

义。泛系理论还发现，现代化的科学技术与过去纯粹思辨比类的潜科学和前科学研究，其重大差别之一是是否充分可控建模，它除开建立数学模型外，也包括其他一些方法，例如受控实验与演习，计算机模拟，公理化逻辑化系统，形式语言或人工语言的应用，图表化与程序化，等等。

泛系理论的提出、研究与发展大致有五方面的背景或动因：(1) 对当代科学技术的一些概念、原理与技术进行方法论总结或跨学科概括泛化，自然也包括我们在五十年代用朴素的泛系观开拓的数学内跨专题的逼近转化论的研究。在逼近转化论研究中，泛系观帮助我们得到数百个新的概念、原理、技巧与结果。后来我们又用泛系观研究了非纯数学的问题以及其他学科领域的专题，都有所收获。根据试点后的概括，提供某种新的引玉之砖，在这方面有点属于先行而后知。(2) 当代科学、技术、文化与社会辩证综合整体化大结合趋势：古今中外结合，东方文化与西方文化结合，定性研究与定量研究结合，纵深分蘖研究与横向联系综合结合，自然科学与社会科学、硬科学与软科学结合，哲学、基础科学、技术科学、工程技术和生产、经济结合，思辨研究与充分可控建模结合，等等。(3) 方法论、认识论以及哲学和社会科学某些专题研究的现代化趋势。(4) 人类对具有伤残信息、模糊因素的超繁生克动态大系统研究的新需要。(5) 荟萃古今中外、扬弃诸子百家而探索一种宏微兼顾、多层网络型的跨学科研究，促进不同事物、不同专题、不同学科、不同领域的联系与整化。

泛系理论及应用研究的长远目标是希望部分拟合六统一：认识论(本体论)、方法论、逻辑学、数学、系统学、价值论(生克论)的有机联系与内在统一性。并且希望发展所谓跨学科的某种六体系：概念、原理、方法、定理、模式、技

术。

泛系研究自1976年正式提出，虽有所得，但仍属草创，很不成熟，更不可能在短期内达到五背景与六发展的要求。但PM 3456的框架有利于律化一种正在发展中而又有些纷杂的研究，它也使泛系研究同一般的哲学研究、数学研究与系统学研究有所区别。

研究领域或学科的分类有多种准则与模型。钱学森提出了一种四九模型：（哲学，基础科学，技术科学，工程技术） $\times$ （自然科学，社会科学，系统科学，思维科学，人体科学，军事科学，数学科学，行为科学，文学艺术）。四九三十六，四九模型把人类的科学、技术、文化与某些生产经济活动分成36个层块或36个群落。泛系理论和应用研究与每个层块都或多或少有所联系，但也显生它们之间的某些汇网。从某种意义上讲，泛系研究既不全属某个层块，也不取代或统帅某个层块，它像一种广义的近乎无所不在的交通网，在各个群落之内、之外、之间起一种辅助性的、技术性的、参证性的与汇通性的作用。泛系或泛系理论框架本身似乎有一种全息重演性，同时也是一种观点、一组概念与一系列原理与方法的总称。

泛系理论重视数学化与数学建模的工作，自己有属于数学成分的研究，但是又像理论物理一样，也重视背景哲理与定性分析，只不过比理论物理研究得更广一些，更注意跨专题跨领域的研究，更注意哲理与方法论性的概括与总结，它不只限于研究物理，更注意研究数理、事理与哲理。泛系理论与传统哲学也不相同，它更注意当代具体科学与新技术，以及与具体科学技术的具体联系，同时也做一定下层次的具体研究，希望概念、原理与形式兼顾相对普适性、确切性与具体性，尽可能少作不具体的无所不包的追求。另外，从框架

到具体结果，泛系理论与当代流行的各种系统科学研究也有诸多不同，虽然泛系理论也发展了自己的广义系统理论。

1.3 广义系统，泛语与泛网

我们用冒号兼括号作为定义符，括号内的分号作为析取符，表示或者的意思。这样，我们就可以有一种简明的递归定义方式，它可以相对精确地但又相当灵活地扩大概念的外延。为了便于理解，我们往往放弃对析取项相互独立的要求。

广义系统：((广义硬件，广义软件))。广义硬件：(任何给定的事物集合；任何给定的另一种广义系统集合；任何给定的某广义系统的广义软件集合)。广义软件：(某一给定的广义硬件的泛权关系集；广义软件的泛权关系集)。

设 A 为任何给定的集合， W 为一作为广义权值域的所谓泛权集， I 为指数集， A 的指数幂或 A 的 I 次方定义为 $A^I = A \uparrow I = \{f | f: I \rightarrow A\}$ ，当 $I = N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 时， $A \uparrow N_n$ 往往也记为 A^n ，它相当于 A 自我直积 n 次： $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (直积 n 次)。对于集合 B ，其幂集记为 $P(B) = \{D | D \subset B\}$ ，即 B 的所有子集作为元素形成的集合。用 $B_2 = \{0, 1\}$ 表布尔代数的二值论域，对 B 的子集 $D \subset B$ 定义其特征函数 $C_D: B \rightarrow B_2$ ， $C_D(x) = 1 (x \in D)$ ， $C_D(x) = 0 (x \notin D)$ ，这样 D 与 C_D 一一对应，而 $\{C_D\} = B_2 \uparrow B$ ，因而，从某种意义上讲， $P(B)$ 与 $B_2 \uparrow B$ 或 $2 \uparrow B$ 等价对应。定义 $P((A \uparrow I) \times W)$ 的元素为 A 的 I 元泛权关系。设 $\{I_k\}$ 为给定集合族，则定义以 A 为字母表的语言空间 $A^* = \bigcup A \uparrow I_k$ 。常用的语言空间是 $I_k = N_k$ 生成的： $A^* = \bigcup A^n$ ，有时补充 A^0 为任何给定的辅助集。这时 $P(A^* \times W)$ 的元素即叫做泛权关系或 A 的泛权关系，也称以 A 为广义硬件、以 W 为泛权集(或泛权空间)的泛权关系。为了方便，有时我们省用定

语“广义”二字，这时系统、硬件、软件诸词与直观意义是不尽相同的。

典型的广义系统 $S = (A, B)$ 有：

(1) n 元泛权关系： $B \subset A^n \times W$ ；(2) 泛权关系族： $B \subset P(A^* \times W)$ ；(3) 泛权场： $B = \{f, g\}$, $g \in P(A^* \times W)$, $f: A \rightarrow F$, 不失一般性，场值域 F 可取为泛权空间 W ；(4) 泛权网： $B = \{f, g\}$, $g \in P(A^* \times W)$, $f \subset A^2 \times W$ ；(5) 简化泛权场网： $B = \{f, g\}$, $f: A \rightarrow F$, $g \subset A^2 \times G$, F, G 为泛权空间；(6) 抽象自动机： $B = \{f, g\}$, $f: U \times A \rightarrow A$, $g: A \rightarrow V$, 这里 U, V 分别为输入空间和输出空间，是两类特殊的泛权空间。抽象自动机也是一类特殊简化的泛权场网；(7) 代数系统： $B = \{f_k\}$, $f_k: A \uparrow n_k \rightarrow A$, n_k 为某些正整数；传统数学的群、环、体(域)、格等均属代数系统，泛代数的研究对象即为代数系统；(8) 拓扑空间： $B \subset P(A)$, 其中 B 满足所谓拓扑公理： $\emptyset, A \in B$ ；若 $b \in B$, 则其补 $\bar{b} \in B$ ；对有限个 $b_k \in B$, 有 $\bigcap b_k \in B$, 对任何有限或无限个 $b_k \in B$, 有 $\bigcup b_k \in B$ ；(9) 向量空间(或线性空间)，指成分或系数域为域的一种群，要求满足一定的分配律与结合律；(10) 模，当向量空间的系数域推广为环时的一种数学结构；(11) 代数，一种特殊的环，要求它同时又是某域的有限维向量空间，当满足结合律时叫做结合代数或超复系(超复数)；李代数是满足运算规则 $ab + ba = 0$, $a \cdot bc + b \cdot ca + c \cdot ab = 0$ 的非结合代数，李群的无穷小生成元适合这些规则；(12) 各种数系及其推广：实数系，复数系，非标准数系，多复数系，区间数系，模糊数系和张量等；(13) 模糊集，模糊关系， $B: A^* \rightarrow [0, 1]$, $B \subset P(A^* \times [0, 1])$, 属于一些特殊的泛权关系；(14) 流形，实际上是一种特殊的拓扑空间，要求满足所谓 Hausdorff 分离公理，并且局部同胚(或拟化)有限维欧氏空间，是欧氏空间的推广；(15) 含参数的变换群，连续

变换群, 李群; (16) 各种泛函空间: 距离空间, 赋范空间, Frechet空间, Banach空间, Banach代数, 赋范环, Hilbert空间, 半群, Riesz空间与半序空间等; (17) 纤维丛; (18) 范畴; (19) 函子; (20) 公理系统与形式语言。

现在还很难说, 有什么数学对象与结构不能用广义系统或广义软件来直接或间接表示。国际上流行许多关于系统的定义, 但也都可用我们介绍的广义系统概念来描述、拟化或再定义。

有时用广义软件来表征广义系统。广义软件的一个更宽而又并非全数学化的定义是, 广义软件: (广义硬件与参量的泛权关系; 广义硬件与参量的泛系关系族; 广义软件 * 广义软件)。这里星号表示一种有序的形式结合与复合, 而泛系关系则由一些典型的数学模型来定义, 有时也可按直观理解, 同时它们又大都可推广于某些广义系统而从直观意义中升华出来成为跨学科的概念。对于前面形式相对限定的广义软件, 泛系理论也称它为泛语, 也即泛语: (泛权关系族; 泛语的泛权关系族)。因此, 也可以说, 泛系关系及其复合、泛语是最典型的广义软件或广义系统, 具有极大的相对普适性, 而且这两种典型又是相对互通的, 泛语可由广义的两大关系生成, 侧重于形式结构, 而泛系关系则是当代科学技术的一种概括, 有具体的内容作为背景, 在哲理性思维时便于参考。

另外一种可能有多层结构的广义系统或广义软件是所谓泛网: (广义系统网; 泛网的泛语; 泛网的泛网)。

以循环为元素形成循环的循环, 这叫做超循环。超循环是一种特殊的泛网。

广义系统或广义软件的相对普适性使它成为跨学科泛化的交通工具。泛系理论或泛系数学的一种工作是研究广义系统的一些性质, 并且把不同专题、不同领域的一些概念、原理