

结构力学教学参考丛书

结构稳定理论

夏志斌 潘有昌 编



高等教育出版社

后各章分别介绍刚架平面内的弹性稳定、压弯杆件在弯矩作用平面内的三个稳定准则、压杆弹性弯扭屈曲、梁的侧扭屈曲、拱的弹性稳定及薄板的弹性屈曲和屈曲后强度等内容。

开口薄壁杆件的扭转理论是研究弯扭屈曲的基础知识，限于篇幅，仅作简略介绍。

本书可作为土建类专业本科生和研究生的必修课和选修课教材，也可供有关工程技术人员参考。讲授全书约需54学时，若为36学时，建议重点讲授前四章，并介绍第五、六章的基本概念，内容可根据具体情况取舍。

书中绪论、第一、二、三、七、八章由夏志斌编写，第四、五、六章由潘有昌编写。

本书承清华大学龙驭球教授审阅了第八章、南京工学院单炳梓教授和郑州工学院寿楠椿教授审阅了第一章~第七章，并提出许多宝贵意见，我们表示衷心感谢。浙江大学姚谏同志抄写了本书原稿及绘制了插图的底图，一并在此致谢。

限于编者的水平，书中肯定会存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

夏志斌 潘有昌

1987年6月于浙江大学

内 容 提 要

本书主要介绍杆件结构和薄板的稳定问题,包括稳定的基本概念和临界荷载的常用计算方法。全书除绪论外共八章,内容包括轴压杆的稳定、稳定的计算方法、刚架的弹性稳定、压弯杆件、压杆的弯扭屈曲、梁的侧扭屈曲、拱的稳定和薄板的屈曲等。

本书可作为高等学校土建、水利类等各专业大学本科学生和研究生必修课及选修课教材,也可供有关工程技术人员参考用。

本书责任编辑 余美茵

结构稳定理论

夏志斌 潘有昌 编

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 233,000

1988年7月第1版 1989年2月第1次印刷

印数 00,001—1,600

ISBN 7-04-000819-X/TB·45

定价 3.10 元

前 言

本书是在浙江大学建筑结构工程专业大学本科生和研究生“结构稳定理论”课程的讲义基础上经修改而成。自1980年开始,本课程已先后作为研究生的学位课和选修课、本科生的必修课和选修课讲授过九次。

随着建筑材料强度的不断提高和有关学科的发展,土建类专业研究生和本科生的结构稳定知识需进一步提高,许多高等院校土建类专业已相继开设了有关结构稳定的课程,本书的出版希望能为本课程提供一本大体适用的教材。

本书的意图是使学生在学习材料力学和结构力学的基础上,加深对一些基本构件和结构的稳定性能的认识,进一步介绍稳定计算的基本原理和方法,要求不仅会计算构件及某些结构的临界荷载,而且还应知道影响结构稳定性能的各种主要因素,从而了解各种结构设计中有关稳定计算的基本要求,以及提出为增强结构稳定性可能采取的措施。本书内容仅限于研究在静荷载作用下的结构稳定问题。

本书内容除绪论外共八章。绪论主要借助于单自由度的刚性链杆系说明静力平衡的稳定性及稳定的基本概念。第一章为轴压杆的稳定。轴压杆的稳定是最基本的稳定问题,该章在归纳已学知识的基础上,进一步介绍了大挠度理论、初始缺陷的影响、非线性屈曲理论和压杆稳定理论在工程设计中的应用等内容,使读者对压杆稳定问题有一个较完整的认识。第二章介绍稳定计算的方法,指出各种计算方法的异同和应用场合,便于以后各章应用。以

目 录

绪 论

- § 0-1 平衡的稳定性准则及平衡稳定性的基本概念 1
- § 0-2 强度问题与稳定问题 11

第一章 轴压杆的稳定

- § 1-1 理想轴压杆的弹性稳定 17
- § 1-2 轴压杆弹性稳定的大挠度理论 25
- § 1-3 初弯曲和初偏心对压杆稳定的影响 31
- § 1-4 轴压杆的非弹性屈曲 36
- § 1-5 残余应力对压杆稳定的影响 48
- § 1-6 压杆稳定理论在工程设计中的应用 56

第二章 稳定的计算方法

- § 2-1 前言 62
- § 2-2 势能驻值原理和最小势能原理 62
- § 2-3 铁摩辛柯法 69
- § 2-4 瑞利-里兹法 75
- § 2-5 迦辽金法 84
- § 2-6 有限单元法 89

第三章 刚架的弹性稳定

- § 3-1 前言 104
- § 3-2 考虑轴压力影响的杆件转角-位移方程及刚架分析 107
- § 3-3 用位移法解刚架的弹性屈曲问题 113
- § 3-4 用有限单元法解刚架的弹性屈曲问题 127
- § 3-5 刚架柱的设计 139

第四章 压弯杆件

| | | |
|-------|-----------|-----|
| § 4-1 | 前言 | 144 |
| § 4-2 | 边缘纤维屈服准则 | 146 |
| § 4-3 | 极限荷载准则 | 155 |
| § 4-4 | 压弯杆件的相关公式 | 168 |

第五章 压杆的弯扭屈曲

| | | |
|-------|------------------|-----|
| § 5-1 | 开口薄壁杆件的扭转 | 171 |
| § 5-2 | 轴心受压时开口薄壁杆件的弯扭屈曲 | 192 |
| § 5-3 | 偏心受压时开口薄壁杆件的弯扭屈曲 | 202 |

第六章 梁的侧扭屈曲

| | | |
|-------|------------------|-----|
| § 6-1 | 前言 | 212 |
| § 6-2 | 纯弯曲时梁的侧扭屈曲 | 214 |
| § 6-3 | 横向荷载作用时梁侧扭屈曲的总势能 | 223 |
| § 6-4 | 跨间有横向荷载作用时梁的侧扭屈曲 | 228 |
| § 6-5 | 梁的非弹性侧扭屈曲 | 237 |

第七章 拱的稳定

| | | |
|-------|-------------------------|-----|
| § 7-1 | 前言 | 244 |
| § 7-2 | 圆形轴线曲杆的平面内弯曲 | 245 |
| § 7-3 | 圆拱在均布法向荷载(静水压力)下的平面内稳定性 | 246 |
| § 7-4 | 非圆形拱的平面内稳定性 | 251 |
| § 7-5 | 拱在平面内的计算长度 | 254 |
| § 7-6 | 扁拱的平面内稳定性 | 257 |

第八章 薄板的屈曲

| | | |
|-------|------------------------|-----|
| § 8-1 | 前言 | 262 |
| § 8-2 | 薄板屈曲的微分方程式——线性理论 | 265 |
| § 8-3 | 单向均匀受压时薄板的临界荷载 | 273 |
| § 8-4 | 四边固定正方形板单向均匀受压时的临界荷载—— | |

| | |
|--------------------------------------|-----|
| 瑞利-里兹法 | 277 |
| § 8-5 四边简支正方形板均匀受剪时的临界荷载——迦辽金法 | 282 |
| § 8-6 四边简支矩形板在非均布压力下的屈曲 | 285 |
| § 8-7 板的有限变形理论 | 289 |
| § 8-8 单向受压板的屈曲后性能 | 296 |
| 主要参考书目 | 303 |

绪 论

房屋和桥梁等建筑结构及其组成构件,在荷载作用下,外力和内力必须保持平衡。但平衡状态有稳定和不稳定之分,当为不稳定平衡状态时,轻微扰动将使结构或其组成构件产生很大的变形而最后丧失承载能力,这种现象就称为失去稳定性或简称失稳。建筑结构因失稳而造成倒塌的事故在工程历史上并不是个别的。近几十年来由于结构型式的不断发展和高强度建筑材料的应用,使结构趋向轻型薄壁,更容易出现失稳现象,因而对结构稳定性的研究及对结构稳定知识的加深和掌握也更有必要。本书主要为高等院校土建类专业学生在学习材料力学和结构力学等课程后进一步加深有关结构稳定的基本知识而编写。

§ 0-1 平衡的稳定性准则及 平衡稳定性的基本概念

为了分析结构在已知荷载作用下是否处于稳定平衡状态,这里将首先介绍判断平衡稳定性最常用的两个准则——静力准则和能量准则。对于能量准则,在第二章内还要作详细介绍,这里只介绍基本概念。

满足静力平衡条件的某结构体系,当受到微小的扰动使其偏离原来的平衡位置时:若因此在该体系上产生一指向原来平衡位置的力(正恢复力),因而当此扰动去除后能使该体系迅速回复到原来位置时,则原来的平衡状态是稳定的,或称稳定平衡;若产生背向原来平衡位置的力(负恢复力),因而使偏离愈来愈大,则原来

的平衡状态是不稳定的,或称不稳定平衡;若受扰动后不产生任何作用于该体系的力,因而当扰动去除后,既不能恢复原来的平衡位置又不继续增大偏离时,则为中性平衡。这就是稳定的静力准则。中性平衡状态是从稳定平衡状态过渡到不稳定平衡状态的临界状态。使结构处于中性平衡状态的荷载称为临界荷载。利用静力准则可以确定该临界荷载的大小。

结构体系的平衡稳定性还可用体系的总势能 Π 来判别。总势能 Π 是结构体系内的应变能 U 和外荷载势能 V 两者的和。如果体系受到微小扰动而变形,体系的总势能 Π 是增加的,则原来的平衡状态是稳定的;假如总势能 Π 是减少的,则原来的平衡状态是不稳定的;假如总势能 Π 保持不变,则为中性平衡。也就是说,当体系最初的总势能 Π 是极小值时,为稳定平衡,是极大值时,为不稳定平衡。这就是稳定的能量准则。

在结构力学中,我们已知道弹性体系的应变能 U 是体系在外力作用下储藏在体系内的一种能量,它标志着外力去除后恢复变形的能力。变形后应变能增加,因而始终为正值;而外荷载的势能 V 在变形后则往往是减小的,因而始终为负值。由此我们可以看到上述两稳定准则在物理意义上的联系。当为稳定平衡时,由能量准则可知:微小扰动必须使总势能 Π 增加,这就要求微小扰动后应变能的改变大于外荷载势能的改变,因而扰动去除后,体系内有一恢复力,这与静力准则中规定稳定平衡在微小扰动后体系内产生正恢复力是完全一致的。

现以一个小刚球在光滑面上的三种不同位置,来说明平衡的稳定性。图 0-1 示一个小刚球分别支承在凹面(图 0-1a)、凸面(图 0-1b)和平面上(图 0-1c),图中小刚球的初始位置用球心 A 表示,三种情况下刚球的重力 P 与支承反力 R 都使刚球处在静力平衡状态。今给以微小扰动使刚球偏离原来的平衡位置,球心由 A

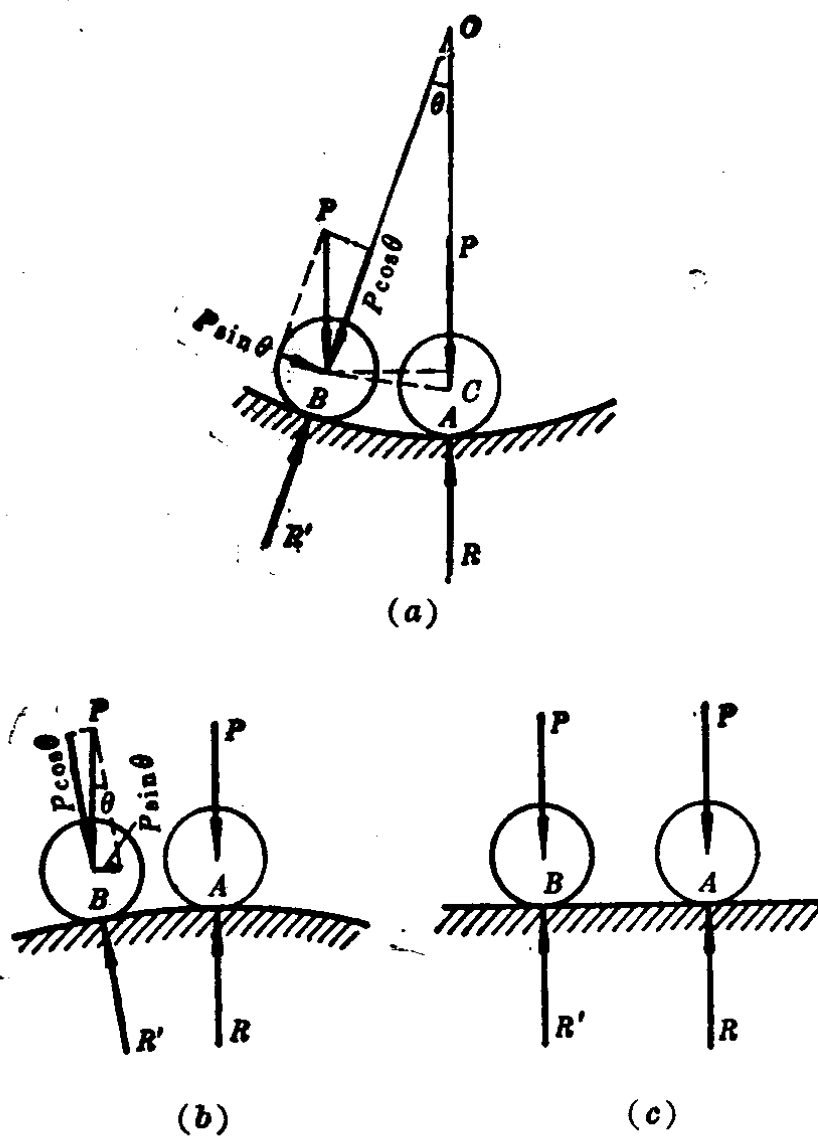


图 0-1 小刚球平衡位置的稳定性
(a) 稳定平衡, (b) 不稳定平衡, (c) 中性平衡

点移到 B 点。当刚球支承在凹面上时, 微小扰动后产生指向原来平衡位置的分力 $P \sin \theta$; 当在凸面上时, 则产生背向原来平衡位置的分力 $P \sin \theta$; 当在平面上时, 不产生任何分力。由静力准则可知, 它们分别为稳定平衡、不稳定平衡和中性平衡。

如设刚球在凹面底部时的总势能为 Π_0 , 当球心由 A 移到 B 点时, 由于球心位置的提高, 总势能将由 Π_0 增大为

$$\Pi = \Pi_0 + P \overline{AC} = \Pi_0 + P \overline{OA}(1 - \cos \theta)$$

总势能 Π 对位移 θ 的一阶和二阶导数分别为

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = P \cdot \overline{OA} \sin \theta, \quad \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = P \cdot \overline{OA} \cos \theta$$

可见当 $\theta = 0$ 时, $d\Pi/d\theta = 0$, $d^2\Pi/d\theta^2 = P \cdot \overline{OA} =$ 正值, 说明 Π_0 为极小值, 因而是稳定平衡。

同样, 不难证明刚球在凸面上时, 当 $\theta = 0$ 时, $d\Pi/d\theta = 0$, $d^2\Pi/d\theta^2 =$ 负值, 此时 Π_0 为极大值, 因而是稳定平衡。当刚球在平面上时, 势能为一常量, $d\Pi/d\theta = d^2\Pi/d\theta^2 = 0$, 此时为中性平衡。

在应用上述能量准则中, 要注意 $d\Pi/d\theta = 0$ 仅说明小球处在平衡状态, 由 $d^2\Pi/d\theta^2$ 为正、负或零才能分别说明该平衡状态是稳定的、不稳定的或中性的。

图 0-1 所示刚球平衡的稳定性, 仅取决于支承面的形状, 与刚球的重量无关。结构体系的平衡稳定性当然没有这样简单, 除与支承条件有关外, 还取决于荷载大小及形式等其他因素。以小刚球举例仅为了便于从直观上理解平衡的稳定性。在研究各种杆件的稳定性以前, 下面以具有一个自由度的弹性连接刚性链杆系在轴压力 P 作用下(不计链杆自重)的稳定问题为例, 进一步说明稳定准则的应用及有关平衡稳定性的一些基本概念。这些概念对理解以后各章内容是有益的。

图 0-2a 中的 AO 和 BO 是两根弹性连接刚性链杆, 在 O 点相互铰接。铰 C 处有一抗转动的弹簧, 刚度系数为 k , 当 AO 和 BO 在一直线上时弹簧不受力。今研究此杆系在轴压力 P 作用下的稳定性。

设杆系发生如图 0-2b 所示变形, 变形后的形状可用角位移 θ 一个变量来表示, 因此这杆系具有一个自由度。变形后弹簧中的应变能为

$$U = \frac{1}{2} (2\theta) k (2\theta) = 2k\theta^2$$

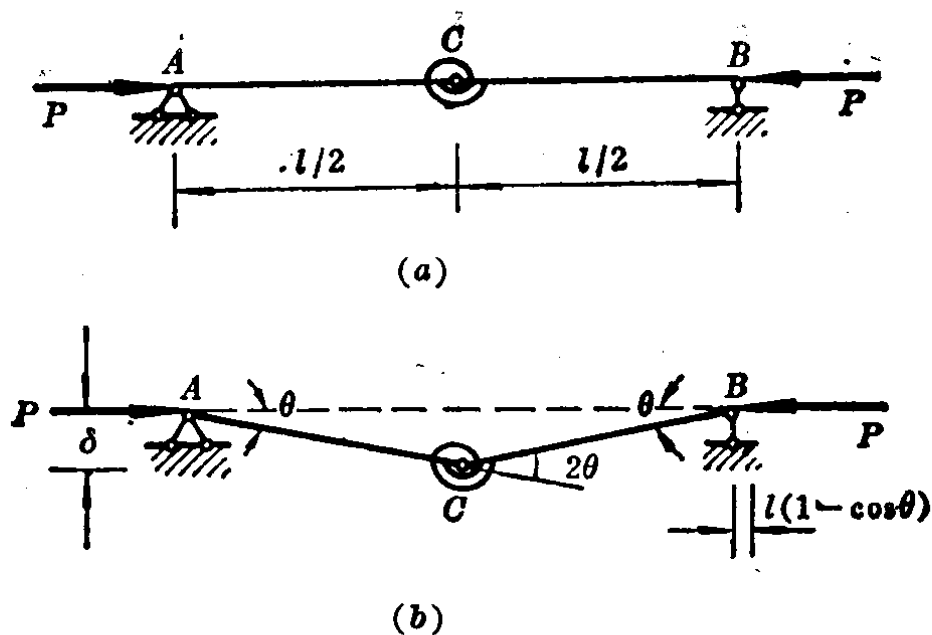


图 0-2 弹性连接刚性链杆系在轴压力作用下的稳定性

式中 2θ 为 C 处两杆的相对转角, $k(2\theta)$ 为弹簧中的抵抗力矩, 由于两者是同时由零逐渐加大的, 故式中取两者乘积的 $1/2$ 。

变形后 B 点向左移动了 $l(1 - \cos\theta)$, 荷载 P 的势能减少了, 其值为

$$V = -Pl(1 - \cos\theta)$$

杆系的总势能为

$$\Pi = U + V = 2k\theta^2 - Pl(1 - \cos\theta)$$

总势能 Π 对角位移 θ 的导数为

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 4k\theta - Pl \sin\theta, \quad \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = 4k - Pl \cos\theta$$

$$\frac{d^3\Pi}{d\theta^3} = Pl \sin\theta, \quad \frac{d^4\Pi}{d\theta^4} = Pl \cos\theta$$

由 $d\Pi/d\theta = 0$, 可得杆系的静力平衡方程式为

$$4k\theta - Pl \sin\theta = 0 \quad (a)$$

这里如改用静力平衡条件, 由外力矩 $\frac{1}{2}Pl \sin\theta$ 等于弹簧中的内力矩 $2k\theta$, 可同样得到 (a) 式。

满足(a)式的解有两个： $\theta = 0$ 和 $Pl/4k = \theta/\sin\theta$ ，分别表示杆系为直线和折线两种形式。下面讨论这两种平衡状态的稳定性。

1. 当 $\theta = 0$ ，即杆系处在直线形式的平衡状态时

$$\text{因 } \left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 4k - Pl = 4k \left(1 - \frac{Pl}{4k} \right) = 4k(1 - p)$$

故当 $p = Pl/4k < 1$ 时， $d^2\Pi/d\theta^2 > 0$ ，说明平衡是稳定的，式中 p 是无量纲化了的外加力。当 $p > 1$ 时， $d^2\Pi/d\theta^2 < 0$ ，说明平衡是不稳定的。当 $p = 1$ 时， $d^2\Pi/d\theta^2 = 0$ ，还应由 Π 的更高阶导数来判定。因 $d^3\Pi/d\theta^3|_{\theta=0} = 0$ ， $d^4\Pi/d\theta^4|_{\theta=0} = Pl > 0$ ，说明 $p = 1$ 时平衡也是稳定的。

2. 当 $p = Pl/4k = \theta/\sin\theta$ ，即杆系处在折线形式的平衡状态时

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{p=\theta/\sin\theta} = 4k(1 - \theta/\text{tg } \theta)$$

如规定杆系变形的范围是 $|\theta| \leq \pi/2$ ，在此范围内因 $\theta < \text{tg } \theta$ ，得 $d^2\Pi/d\theta^2 > 0$ ，说明平衡是稳定的。

综上所述，对图 0-2a 所示杆系的稳定性可归纳为：

1. 当 $p = Pl/4k \leq 1$ 即 $P \leq 4k/l$ 时，杆系的直线形式平衡状态是稳定的。

2. 当 $p > 1$ 即 $P > 4k/l$ 时，直线形式的平衡状态是不稳定的，如有偶然的微小扰动就会促使产生角位移 θ ，使杆系呈折线形式，而折线形式的平衡状态则是稳定的。

图 0-3 绘出了此杆系的荷载-位移曲线。在曲线 OAB （或 OAB' ）上的任何点都代表稳定平衡状态， AD 线上任何点（不包括 A 点）都是不稳定平衡。由此曲线，可见当 $p > 1$ 时，荷载微小的增加，即可产生可观的变形 δ 。例如设 $\delta = 0.1l$ ，则 $\sin\theta = 0.2$ ， $\theta = 0.20136$ 弧度，于是从 $p = Pl/4k = \theta/\sin\theta = 1.0068$ ，可得 $P =$

1.0068 ($4k/l$), 说明 P 超过 $4k/l$ 仅 0.68%, 挠度 δ 即由零增大到 $0.1l$ 。

图 0-3 的 A 点是一个有重要意义的点, 它标志着直线形式的平衡位置由稳定状态到不稳定状态的临界点, 因此 $p = 1$ 或 $P = 4k/l$ 就称为临界荷载或临界力, 记作 p_{cr} 或 P_{cr} 。当荷载略微超过临界荷载时, 变形即大量增大, 这现象称为屈曲, 所以临界荷载

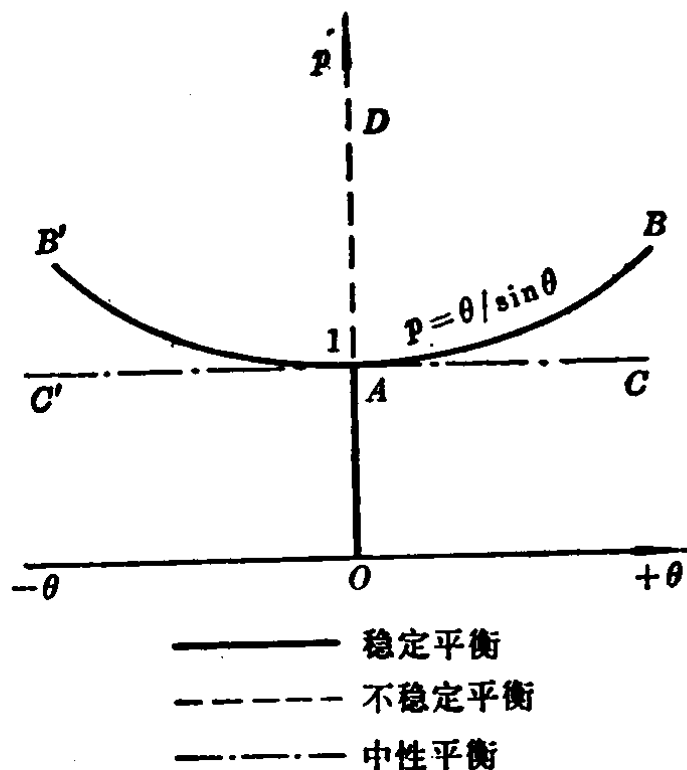


图 0-3 弹性连接刚性链杆系在轴压力作用下的荷载-位移曲线

又可称为屈曲荷载, 临界荷载以后的荷载称为屈曲后荷载。荷载-位移曲线到达 A 点以后, 杆系即出现平衡途径的分枝, 平衡途径由 OA 线转向 AB 或 AB' , 故 A 点又名平衡的分枝点。因此, 临界荷载又可称为分枝荷载。

上述结果在 $|\theta| \leq \pi/2$ 范围内适用于任意较大变形情况下。实际工程结构的变形都是较小的。下面分析如假定是小变形时, 将出现什么结果。如假定变形是微小的, 则可得 $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ ①, 代入总势能表达式得

$$\Pi = \frac{1}{2}\theta^2(4k - Pl)$$

于是
$$d\Pi/d\theta = \theta(4k - Pl), \quad d^2\Pi/d\theta^2 = 4k - Pl$$

① 假设 θ 与 1 相比是微小值, 因而在下列三角函数的展开级数中可仅取两项

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

由 $d\Pi/d\theta = 0$ 得到两个独立的平衡条件: $\theta = 0$ 和 $P = 4k/l$ 。当 $\theta = 0$ 时,由二阶导数可见,如果满足 $P < 4k/l$ (即 $p = Pl/4k < 1$) 则是稳定的, $P > 4k/l$ 时则是不稳定的。当 $P = 4k/l$ 时,二阶导数及更高阶的导数都等于零,此时属中性平衡。当为中性平衡时,扰动使直线状态的杆系变成折线状态,当扰动去除后,将仍然保留此折线状态而不能恢复原来的直线状态,因而当 $P = 4k/l$ 时,角位移 θ 为包括零在内的任意微小值。中性平衡时杆系具有直线和微小弯折两种平衡形式。小变形理论所得上述结果在图 0-3 上可用 OAC (OAC') 表示,它与大变形理论得出的曲线 $B'AB$ 在 A 点相切。到达中性平衡时的荷载即为临界荷载,因而同样得到临界荷载 $P_{cr} = 4k/l$, 但小变形理论不能得到屈曲后的曲线 $B'AB$ 。此外,当 $P = P_{cr}$ 时,小变形理论认为是中性平衡而大变形理论则认为是稳定平衡。由于在大变形理论中,我们已证明荷载略微超过临界荷载,即将引起较大的挠度,因此在一定变形范围内,图 0-3 上的曲线 AB 与 AC 是很接近的。为了简化,采用小变形假设计算杆系的屈曲问题是完全可以满足稳定计算要求的。

为了熟悉两个准则,下面拟改用稳定的静力准则进而讨论图 0-2 所示杆系有一初始变形时的稳定问题。设在荷载 P 施加以前,杆系已具有初始变形 θ_0 或 δ_0 , 如图 0-4a 所示,假设在初始变形时弹簧未受力,当施加荷载 P 后,杆系发生变形,如图 0-4b 所示。由静力平衡条件得平衡方程式为

$$\frac{1}{2}Pl \sin \theta = 2k(\theta - \theta_0) \quad (b)$$

与前述平衡方程式(a)不同,此式只有一个解,即

$$p = \frac{Pl}{4k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sin \theta} \quad (c)$$

如给定 θ_0 值,即可绘制荷载-位移曲线如图 0-5 示。

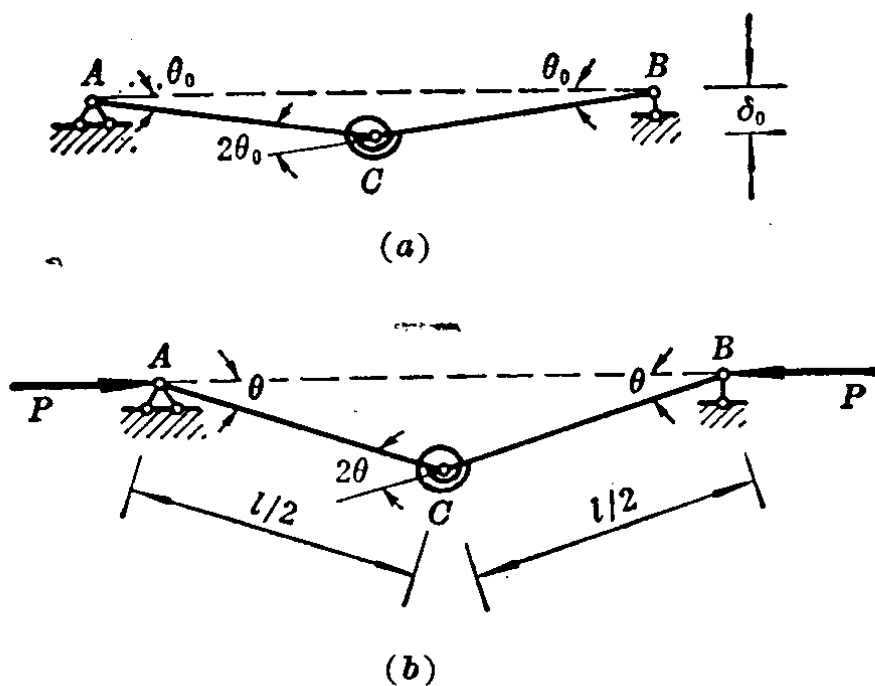


图0-4 有初始变形时弹性连接刚性链杆系在轴压力作用下的稳定性

与图0-3相比,可见有了初始变形后,两者的荷载-位移曲线就有显著不同。主要是:

1. 不再出现平衡的分枝点 A;
2. 一开始加荷载,即出现侧向变形。荷载较小时,变形增加较慢;荷载愈大,变形增加的速度愈快;但不同 θ_0 的各条曲线在变形较大时都渐接近于 θ_0 等于零的 AB 线;
3. 初始变形 θ_0 愈大,曲线与 θ_0 等于零的 OAB 线偏离也愈大。

上述方程(c)只表示

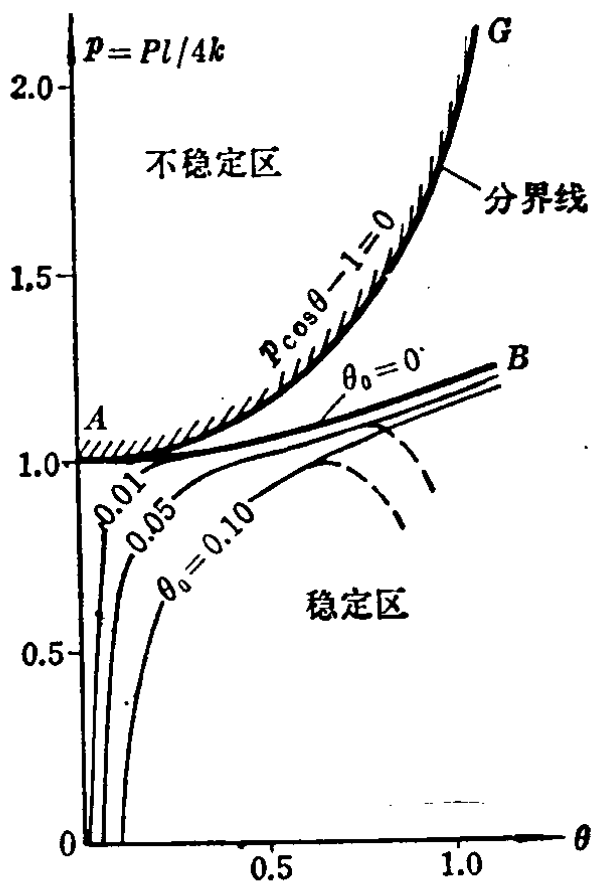


图0-5 有初始变形时的荷载-位移曲线