现代化工数学

习题解答

陈 宁 馨编著

化 学 工 业 出 版 社

现代化工数学

习题解答

陈宁馨 编著

黄椿鉴　马国瑜 译

化学工业出版社

内 容 简 介

本书是美国麻省洛厄尔大学陈宁馨教授编著的、由化工出版社 1982 年出版的《现代化工数学》一书习题的解答。全书共分九章，包括向量代数、微积分、场论、常微分方程、偏微分方程、变分法、积分变换、有限差分、数值方法、最优化方法等方面的习题。

本书是学习《现代化工数学》一书的辅助读物，也可单独使用。可作为大专院校化工系教学参考书，亦可供其他工科院校师生及工程技术人员、科研人员阅读。

现代化工数学

习 题 解 答

陈宁馨 编著

黄椿鉴　马国瑜　译

责任编辑：任文斗

封面设计：任　辉

*

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本850×1168 1/32印张9 7/8字数263千字印数1—11,170

1985年10月北京第1版1985年10月北京第1次印刷

统一书号15063·3725定价2.30元

前　　言

近三十年来，化学工程已发展到需要用数学来解答问题的阶段，为此，我编著了《现代化工数学》一书。如果要充分了解和掌握该书的内容，计算每章后的习题是十分必要的。为了使读者易于阅读，特编著了这本习题解答。本书承蒙北京化工学院黄椿鉴、马国瑜两位教师进行整理和翻译，特此鸣谢。

陈宁馨
于美国洛厄尔大学

译 序

随着我国化学工业的迅速发展和电子计算机等工具的广泛使用，化学工业部门的广大工程技术人员及研究人员，迫切需要越来越多的数学理论和方法，同时也希望有一类既讲清基本概念、介绍先进方法，又结合化工实践的数学教材。为了适应这个要求，我们已经整理出版了美国麻省洛厄尔大学陈宁馨教授编著的《现代化工数学》。

为了帮助读者学习和使用《现代化工数学》一书，我们又将陈教授为此书所编著的习题解答英文手稿进行翻译，并在翻译过程中作了一些整理和修改。译稿完成后，承蒙宋衍龄老师提了许多宝贵意见，最后由陈宁馨教授作了进一步的审核。

该书系根据《现代化工数学》一书所列的习题进行解答，可以说，它是学习《现代化工数学》一书必不可少的辅助读物。由于习题解答内容详细，因此也可单独使用，帮助读者掌握解决化学工程实际问题的各种基本数学方法。

由于水平的限制，在翻译和整理中会有错误和不足之处，诚恳希望读者批评指正。

译者 1984年

目　　录

第一章　向 量 分 析

1. 求向量$\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$在向量$\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$上的投影。

解　令向量$\overline{A}=\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$，$\overline{B}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$在向量$\overline{B}$方向上的单位向量为

$$\bar{b}=\frac{\overline{B}}{B}=\frac{\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ (\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k})$$

因此向量$\overline{A}$在向量$\overline{B}$上的投影为

$$\overline{A}\cdot\bar{b}=(\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\ (\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}(1+2+5)=3.266$$

2. 若 $\overline{A}=4\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$，$\overline{B}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$，求与$\overline{A}$、$\overline{B}$垂直的单位向量。

解　设所求的向量为$\overline{C}=c_1\bar{i}+c_2\bar{j}+c_3\bar{k}$，由题意有

$$\overline{C}\cdot\overline{A}=4c_1+c_2-3c_3=0$$
$$\overline{C}\cdot\overline{B}=2c_1-c_2+2c_3=0$$

可解出

$$c_1=\frac{1}{6}c_3,\quad c_2=\frac{7}{3}c_3$$

因此

$$\overline{C}=\frac{1}{6}c_3\bar{i}+\frac{7}{3}c_3\bar{j}+c_3\bar{k}=c_3\left(\frac{1}{6}\bar{i}+\frac{7}{3}\bar{j}+\bar{k}\right)$$

单位向量为

$$\overline{C}=\frac{\frac{1}{6}\,\overline{i}+\frac{7}{3}\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{49}{9}+1}}=0.0655\overline{i}+0.9171\overline{j}+0.393\overline{k}$$

3．求平行$\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$与$\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$向量和的单位向量。

解 令

$$\overline{A}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k},\overline{B}=\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$$

则

$$\overline{R}=\overline{A}+\overline{B}=2\overline{i}+5\overline{j}-5\overline{k}$$

因此$\overline{R}$的单位向量为

$$\overline{r}=\frac{2\overline{i}+5\overline{j}-5\overline{k}}{\sqrt{4+25+25}}=0.2722\overline{i}+0.6804\overline{j}-0.6804\overline{k}$$

4．求起点为Q_1（$a_1b_1c_1$），终点为$Q_2=(a_2b_2c_2)$的向量及其大小。

解 点Q的位置向量为

$$\overline{r}_1=a_1\overline{i}+b_1\overline{j}+c_1\overline{k}$$

点Q_2的位置向量为

$$\overline{r}_2=a_2\overline{i}+b_2\overline{j}+c_2\overline{k}$$

因此

$$\overline{Q_1Q_2}=\overline{r}_1-\overline{r}_2=(a_2-a_1)\overline{i}+(b_2-b_1)\overline{j}+(c_2-c_1)\overline{k}$$

它的模为

$$|\overline{Q_1Q_2}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

5．求通过向量$\overline{B}=2\overline{i}+3\overline{j}-3\overline{k}$的终点且垂直于向量$\overline{A}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$的平面。

解 设平面上任意点为$Q(x,y,z)$，记其位置向量为$\overline{r}$，向量$\overline{B}$的终点为P，则

$$\overline{PQ}=\overline{B}-\overline{r}$$

由（$\overline{B}-\overline{r}$）$\cdot\overline{A}=0$，得

$$\overline{r}\cdot\overline{A}=\overline{B}\cdot\overline{A}$$

即

$$(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})=(2\bar{i}+3\bar{j}-3\bar{k})(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})$$

化简得平面方程

$$x+2y+3z=-1$$

6．求通过$Q_0(1,1,2)$ 且平行$\bar{A}=2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$ 的直线方程，并指出A $(0,1,-1)$、B$\left(\frac{1}{2},2,1\right)$、C$(2,1,0)$ 三点是否在此直线上。

解 设所求直线上的任意一点为 (x, y, z)，由题意得

$$(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})-(\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})=m(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})$$

因此直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-3}$$

因A、B、C三点皆不满足上述方程，故此三点不在这条直线上。

7．求平面方程：

a．通过$Q(3,2,1)$且平行于$2x+y+2z-3=0$。

解 所求平面的法向量为

$$\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$$

设$\bar{r}$为所求平面上任意一点的矢径，$\bar{r}_0$为点Q的位置向量，因此所要求的平面方程为

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{a}=0$$

即

$$2(x-3)+(y-2)+(z-1)=0$$

$$2x+y+2z=0$$

b．通过$Q(3,2,1)$、$R(1,2,3)$ 且垂直于$2x+y-z-3=0$。

解 设$\bar{r}_0$、$\bar{r}_1$为点Q、P的位置向量，$\bar{a}$ 为已知平面的法向量，则

$$\bar{r}_1-\bar{r}_0=(1-3)\bar{i}+(2-2)\bar{j}+(3+1)\bar{k}=-2\bar{i}+2\bar{k}$$

$$\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$$

两向量都与所要求的平面平行，因此要求的平面的法向量为

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\times\bar{a}$$

设$\bar{r}$为所求平面的矢径，则所求的平面方程为

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\cdot[(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\times\bar{a}]=0$$

即

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=[(x-3)\bar{i}+(y-2)\bar{j}+(z-1)\bar{k}]$$

$$\cdot(-2\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k})=-2(x-3)$$
$$+2(y-2)-2(z-1)=0$$

化简得

$$x-y+z=2$$

c. 通过点Q(3,2,1)、R(1,2,3)、S(0,3,2)。

解 设$\bar{r}_0$、$\bar{r}_1$、$\bar{r}_2$分别为点Q、R S的位置向量，则

$$\bar{r}_1-\bar{r}_0=(1-3)\bar{i}+(2-2)\bar{j}+(3-1)\bar{k}=-2\bar{i}+2\bar{k}$$
$$\bar{r}_2-\bar{r}_0=(0-3)\bar{i}+(3-2)\bar{j}+(2-1)\bar{k}=-3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$$

因此平面的法向量为

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_0)\times(\bar{r}_2-\bar{r}_0)$$

即得平面方程

$$(\bar{r}-\bar{r}_0)\begin{vmatrix}\bar{i}, & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=[(x-3)\bar{i}+(y-2)\bar{j}+(z-1)\bar{k}]$$

$$\cdot[2\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}]=0$$

化简得

$$x-2y-z+2=0$$

8. 求以Q(3,2,1)、R(1,2,3)、S(0,3,2)为顶点的三角形面积。

解 $\overline{QR}=(1-3)\bar{i}+(2-2)\bar{j}+(3-1)\bar{k}=-2\bar{i}+2\bar{k}$

$\overline{QS}=(0-3)\bar{i}+(3-2)\bar{j}+(2-1)\bar{k}=-3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

因此三角形面积为

$$\frac{1}{2}|\overline{QR}\times\overline{QS}|=\frac{1}{2}|(-2\bar{i}+2\bar{k})\times(-3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})|$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}|-2\bar{i}-4\bar{j}-2\bar{k}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\sqrt{6}$$

9．一物体沿曲线 $x=2t^2$、$y=2t^2-3t$，$z=2t^2$ 移动，t 表示时间，试求：

a．当 $t=1$ 时，物体的速度与加速度。

解　设移动物体的矢径为 $\bar{r}$，速度向量为 $\bar{v}$，加速度向量为 $\bar{a}$，则

$$\bar{r}=(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})=2t^2\bar{i}+(2t^2-3t)\bar{j}+2t^3\bar{k}$$

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=4t\bar{i}+(4t-3)\bar{j}+6t^2\bar{k}$$

$$|\bar{v}|_{t=1}=\sqrt{16+1+36}=\sqrt{53}$$

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=4\bar{i}+4\bar{j}+12t\bar{k}$$

$$|\bar{a}|_{t=1}=\sqrt{16+16+144}=\sqrt{176}$$

b．当 $t=1$ 时，物体的速度与加速度在 $\overline{A}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ 方向的分量。

解　$\overline{A}$ 方向的单位向量为

$$\overline{A_0}=\frac{2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}}{\sqrt{14}}$$

速度在给定方向的分量为

$$v_A = [4t\bar{i} + (4t-3)\bar{j} + 6t^2\bar{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}[8t + 3(4t-3) - 6t^2]$$

所以

$$v_{A\,t=1} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

加速度在给定方向的分量为

$$a_A = (4\bar{i} + 4\bar{j} + 12t\bar{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(20 - 12t)$$

所以

$$a_A|_{t=1} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

10．求曲面 $2x^3y + 3xz^2 - 3y^3z^2 = 9$ 在点 (2,1,3) 的单位法向量。

解 在曲面上一点 (x,y,z) 的法向量为

$$(6x^2y + 3z^2)\bar{i} + (2x^3 - 9y^2z^2)\bar{j} + (6xz - 6y^3z)\bar{k}$$

在点 (2,1,3) 的法向量为

$$51\bar{i} - 65\bar{j} + 18\bar{k}$$

因此，在点 (2,1,3)的单位法向量为

$$\bar{n} = \frac{51\bar{i} - 65\bar{j} + 18\bar{k}}{\sqrt{51^2 + 65^2 + 18^2}}$$

11．若$\phi = 2xy + 3yz + 4zx$，$\bar{A} = xy^2\bar{i} + yz^3\bar{j} + zx^2\bar{k}$，求$\bar{A}\cdot\nabla\phi$，$(\nabla\phi)\times\bar{A}$，$\phi(\nabla\cdot\bar{A})$ 在点 (3,2,1) 的值。

解 $\nabla\phi = (2y + 4z)\bar{i} + (2x + 3z)\bar{j} + (3y + 4x)\bar{k}$

$$\bar{A}\cdot\nabla\phi = xy^2(2y + 4z) + yz^3(2x + 3z) + zx^2(3y + 4x)$$

则

$$\bar{A}\cdot\nabla\phi|_{(3,2,1)} = 276$$

由于

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\,\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{k}\right)(xy^2\overline{i}+yz^3\overline{j}+zx^2\overline{k})$$
$$=y^2+z^2+x^2$$

则

$$\phi(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})=(2xy+3yz+4zx)(y^2+z^3+x^2)$$
$$\phi(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})\big|_{(3,2,1)}=420$$

由于

$$\nabla\phi\times\overline{A}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2y+4z & 2x+3z & 3y+4x\\ xy^2 & yz^3 & zx^2\end{vmatrix}$$
$$=[(2x+3z)zx^2-(3y+4x)yz^3]\overline{i}$$
$$-[(2y+4z)zx^2-(3y+4x)xy^2]\overline{j}$$
$$+[(2y+4z)yz^3-(2x+3z)xy^2]\overline{k}$$

则

$$\nabla\phi\times\overline{A}\big|_{(3,2,1)}=45\overline{i}+144\overline{j}-56\overline{k}$$

12. 若$\overline{A}=(2y+3)\overline{i}+xz\overline{j}-(yz+x)\overline{k}$，求$\int\overline{A}\cdot d\overline{r}$沿下列路径之值：

a. $x=3t^2$，$y=2t$，$z=4t^3$，从$t=0$到$t=1$。

解
$$\overline{A}\cdot d\overline{r}=[(2y+3)\overline{i}+xz\overline{j}-(yz+x)\overline{k}]\cdot[\overline{i}dx+\overline{j}dy+\overline{k}dz]$$
$$=(2y+3)dx+xzdy-(yz+x)dz$$
$$=(4t+3)6tdt+(3t^2)(4t^3)2dt-[(2t)(4t^3)+3t^2](12t^2)dt$$
$$=(24t^2+18t+24t^5-96t^6-36t^4)dt$$

因此沿路径 $c(0\leqslant t\leqslant 1)$，$\int\overline{A}\cdot d\overline{r}$的值为

$$\int_0^1(24t^2+18t+24t^5-96t^6-36t^4)dt$$

$$=\left[8t^3+9t^2+4t^6-\frac{96}{7}t^7-\frac{36}{5}t^5\right]_0^1=0.1$$

b. 从 (0,0,0) 至 (0,0,2)，再至 (0,2,2)，最后到(1,2,2)的折线。

解 由 (0,0,0) 至 (0,0,2)：

$$x=y=0,\ dx=dy=0,\ 0\leqslant z\leqslant 2$$

因为

$$\bar{A}=3\bar{i},\ d\bar{r}=\bar{k}dz$$

所以

$$\bar{A}\cdot d\bar{r}=0$$

由 (0,0,2) 至 (0,2,2)：

$$x=0,\ z=2,\ dx=0,\ dz=0,\ 0\leqslant y\leqslant 2$$

因为

$$\bar{A}=(2y+3)\bar{i}-2y\bar{k},\ dr=\bar{j}dy$$

所以

$$\bar{A}\cdot d\bar{r}=0$$

由 (0,2,2) 至 (1,2,2)：

$$z=2,\ dy=dz=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

因为

$$\bar{A}=7\bar{i}+2x\bar{j}-(4+x)\bar{k},d\bar{r}=\bar{i}dx$$

所以

$$\bar{A}\cdot d\bar{r}=7dx$$

$$\int_0^1 7dx=7$$

最后结果为 7 。

c. 从 (0,0,0) 至 (1,2,2) 的直线。

解 直线的参数表达式为

$$x=t,\ y=2t,\ z=2t,\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

则

$$\overline{A}d\overline{r}=(2y+3)dx+xzdy-(yz+x)dz$$
$$=(4t+3)dt+2t^2(2dt)-(4t^2+t)(2dt)$$
$$=(3+2t-4t^2)dt$$

由此得

$$\int_0^1(3+2t-4t^2)dt=\left(3t+t^2-\frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}$$

13．若$\overline{A}=4z\overline{i}-(2x-y)\overline{j}+x\overline{k}$，求$\iint_S\overline{A}\cdot\overline{n}dS$，S 为圆柱$x^2+z^2=4$与$x=0$，$z=0$，$y=6$各平面所围区域的表面。

解 如图 1-1 所示。由高斯定理得

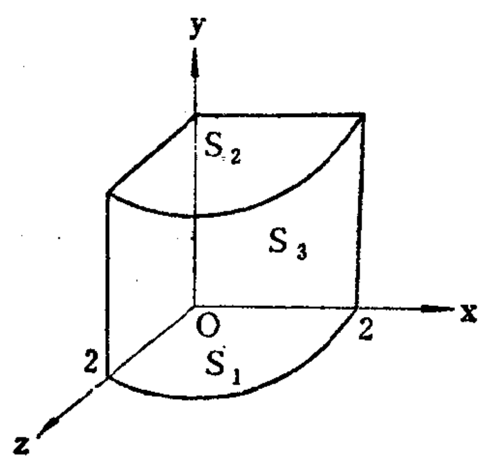

图 1-1

$$\int_S\overline{A}\cdot\overline{n}dS=\int_V\overline{\nabla}\cdot\overline{A}dV$$

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{A}=\left(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\overline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(4z\overline{i}-(2x-y)\overline{j}+x\overline{k})=1$$

则

$$\int_S\overline{A}\cdot\overline{n}dS=\int_V dV=\int_0^2dz\int_0^6dy\int_0^{\sqrt{4-z^2}}dx$$
$$=6\int_0^2\sqrt{4-z^2}\,dz$$
$$=3\left[z\sqrt{4-z^2}+4\arcsin\left(\frac{z}{2}\right)\right]\Big|_0^2$$
$$=6\pi$$

14．若$\overline{F}=(3x^2-2z)\overline{i}+2xy\overline{j}+4x\overline{k}$，求$\iiint_V\overline{\nabla}\cdot\overline{F}dV$及

$\iiint\limits_V \overline{\nabla} \times \overline{F} dV$，其中V为x=0，y=0，z=0，x+y+2z=3所围的区域。

解 如图 1-2 所示。已知$\overline{\nabla} \cdot \overline{F} = 8x$，

则

$$\int_V \overline{\nabla} \cdot \overline{F} dV = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-x-y)} 8x dz$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} 4x(3-x-y) dy$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (12x - 4x^2 - 4xy) dy$$

$$= \int_0^3 [(12x-4x^2)(3-x) - 2x(3-x)^2] dx$$

$$= \int_0^3 (2x^3 - 12x^2 + 18x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2\right)\Bigg|_0^3 = 13.5$$

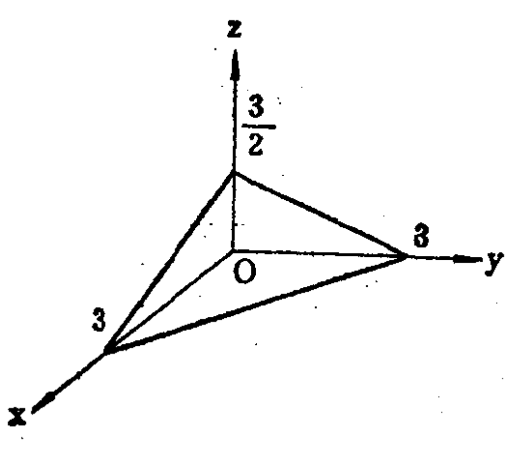

图 1-2

易见

$$\overline{\nabla} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 - 2z & 2xy & 4x \end{vmatrix}$$

$$= -6\bar{j} + 2y\bar{k}$$

$$\int \overline{\nabla} \times \overline{F} dV = -6\bar{j} \int dV + 2\bar{k} \int y dV$$

$$= -6\bar{j} \times \frac{27}{4} + 2\bar{k} \int_0^3 dx$$

$$\times\int_0^{3-x} y\,dy\int_0^{\frac{3}{2}(3-x-y)} dz$$

$$=-\frac{81}{2}\bar{j}+2\bar{k}\int_0^3 dx$$

$$\times\int_0^{3-x}\frac{y}{2}(3-x-y)\,dy$$

$$=-\frac{81}{2}\bar{j}+2\bar{k}\left[-\frac{1}{12}\int_0^3(3-x)^3d(3-x)\right]$$

$$=-\frac{81}{2}\bar{j}+\frac{27}{8}\bar{k}$$

15．试以 $(2x^2+3y^2)dx+(3y+5xy)dy$验证平面上的格林定理。其中C为以下区域的边界：

a． $y=x^{1/2}$，$y=x^2$。

解 如图 1-3 所示，沿 $y=x^2$ 的线积分为

$$\int_{C_1}(2x^2+3y^2)dx+(3y+5xy)dy$$

$$=\int_0^1(2x^2+3x^4)dx+(3x^2+5x^3)2x\,dx$$

$$=4.766$$

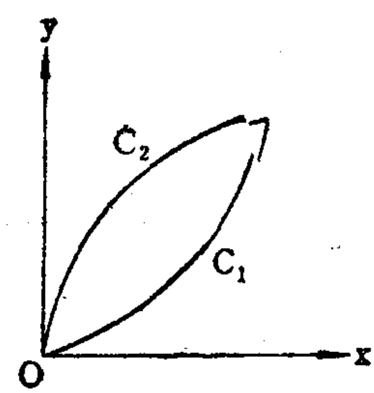

图 1-3

沿$y=x^{1/2}$的线积分为

$$\int_{C_2}(2x^2+3y^2)dx+(3y+5xy)dy$$

$$=\int_1^0(2x^2+3x)\,dx+(3x^{1/2}+5x^{3/2})\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)dx$$

$$=\int_1^0\left(2x^2+5\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=-4.9166$$