高等数学引桥

GAODEN SHUXUE YINQIAO

GAODEN SHUXUE YINQIAO

陈永明 著

上海科技教育出版社

SHANGHAI KEJI JIAOYU CHUBANSHE

高等数学引桥

陈永明 著

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

内 容 提 要

不少高中毕业生，在高考中数学考分并不很差，但是进了大学后，学习高等数学时却并不轻松，这是什么原因呢？

原来，大学和中学的数学教学有不少脱节的地方，首先是数学知识上脱节，其次，是逻辑和思维方法上的脱节。中学数学侧重于技巧，而大学数学要求对概念有深刻的理解，推理要严密等等。这样，给处于转折关头的大学一年级学生带来了学习上的困难。本书目的是为大学生铺路架桥，让他们顺利地从中学过渡到大学数学的学习。

本书分成代数、几何、逻辑和思维方法三篇。前两篇补充一些数学知识，后一篇则是介绍逻辑知识及思维方法。

本书的对象是刚入大学还未适应大学数学学习的大学生和有志于深造的高中学生。本书还可作大、中学数学教师的教学参考书，对研究教材改革的同志也具有一定的参考价值。

高等数学引桥

陈永明 著

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路 393 号）

各地新华书店经销　江苏溧阳印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张6.25 字数140000

1992 年 3 月第 1 版　1992 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—3600

ISBN7-5428-0528-2

G・529

定价：2.20元

前　言

笔者长期从事中学数学和教师进修班的数学教学工作，在给一些参加进修的中学数学教师上高等数学课时，发现总有一部分学员学习有困难，甚至产生畏难情绪。分析产生困难的原因，其中之一是大学数学教学与中学数学教学之间衔接得不十分理想。大学数学中有一部分内容涉及了某些初等数学的知识，这些初等数学知识理应在中学里教授，或者可以由大学教师补授。但事实上中学课本里没讲到，或没讲透，或讲授的角度、侧重点与大学的要求不相符合；而大学教师却认为中学生大概已掌握，从而未予重视，或一带而过，结果造成某些知识点的两不管状态。这种两不管状态，导致学生在高等数学的学习上产生了困难。

譬如，在中学里，学生们曾经做过许许多多的不等式的题目，但是却没有学过"放大法"，而在极限等内容中，老是要用到放大法；中学里讲过各种曲线，但是却没有讲区域，然而，到了学重积分时，积分必须在一个区域上进行……这样，学生在学习高等数学时，当然会遇到不少困难。

除了数学内容上的脱节外，中学生在逻辑和思维方式上也有不少缺陷，一下子遇到高等数学里的复杂的逻辑结构，就束手无策。

譬如，为什么不少大学生难过极限概念关呢？其重要原因是极限概念中已经重叠使用量词（任给 $\varepsilon>0$，存在N……），而中学里根本没有提到过量词，是不是初等数学的定理、定

义都不涉及量词呢？并不是！譬如：

所谓锐角三角形，是每一个内角都是锐角的三角形；

所谓直角三角形，是有一个内角是直角的三角形.

其中，已经用到了全称量词“每一个”，和特称量词“有一个”. 难怪笔者在对一些已经有大专以上学历的教师上了“继续教育”（上海叫做“职务培训”）课程“数学教学逻辑学”之后，有些学员说：“蛮好早点给我们讲点量词知识，这样，当年学微积分时，就不会给极限概念搞得晕头转向了！”

此外，在学习方法上脱节更是十分严重. 中学生基本上是老师“喂”给学生吃的，到了大学，老师一下子彻底放手让学生主动学习，这对大学一年级的学生来说难以适应. 中学里对解题技巧十分重视，大学里却要求对概念、法则理解得深刻、清晰，这也是不容易转过弯来的.

笔者认为，研究大中学数学教学间的衔接问题已刻不容缓. 本书就是研究衔接问题的一个尝试.

本书的对象，首先是大学生，特别是数量众多的工科大学的一年级学生. 笔者希望能为他们架起一座“引桥”，使他们能顺利地进入高等数学的自由王国. 有志于深造的高中学生当然也可以一读.

本书对大、中学数学教师也是一本教学参考书. 中学数学教师可以从中了解到中学数学教学的一部分薄弱环节. 希望中学数学教育界的朋友们在可能的情况下，能适当地讲一点这些“两不管”的内容. 大学数学教师可以从中了解到自己的学生在基础知识和思想方法方面的缺陷，为了使教学效果更好些，尽量想办法挤时间运用适当的方式加以弥补.

本书对研究中学数学教材的同志可能也会有一定的启发.

本书讲的知识，不少是初等数学方面的，但这是学习高等数学所需要的，同时又是被中学所忽视的．本书对待每一个知识点，不但介绍有关知识，而且还介绍这些知识在高等数学中的作用，有时干脆结合高等数学的知识点来叙述．同时，还举出一定量的例题，附上一定量的练习题，使所讲的知识能够得到巩固．

衔接问题是一个复杂、艰深的课题，笔者才疏学浅，难以担当起这一重大任务，书中一定会有不少错误、疏漏之处，希望专家、同行、大中学生能对本书提出宝贵意见，并共同努力把这一个课题完成好．

著　者

于上海市徐汇区教育学院

一九九〇年八月

目　　录

一、代 数 篇

§1. 求和记号Σ

在线性代数和微积分的级数中广泛地运用求和记号(或称连加号)Σ,不少同学由于抽象能力较差,对带"Σ"的式子反应很慢,以至影响了学习.

下列和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \tag{i}$$

可以表为$\sum_{i=1}^{n} a_i$. a_i表示通项,连加号上下的字母和式子表示i的取值由1到n. i称为求和指标,它只起辅助作用. 把和的简式$\sum_{i=1}^{n} a_i$还原为繁式(i)时,i是不出现的,因而把i改成其他字母是无所谓的,例如(i)式还可写成$\sum_{j=1}^{n} a_j$. 但是求和指标不能与其他字母相混淆. 例如

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$$

可以表为$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$,也可表为$\sum_{s=1}^{n} a_{is}$等等,但是不能表为$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
因为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

采用双重连加号的和式$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$表示

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}&=\sum_{i=1}^{m} (a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})\\&=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})\end{aligned}$$

$$+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}).$$

连加号 $\sum$ 满足下列性质:

(1) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$;

(2) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(3) $\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i$;

(4) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

以上所述的是连加号的常规用法，有时还会遇到一些带其他限制条件的连加号. 例如:

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i<j} a_{ij} = {} & a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n}\\ & +a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{2n}\\ & +\cdots\cdots\\ & +a_{n-1,n},\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\in N}} a_{ij} = a_{1,k-1}+a_{2,k-2}+\cdots+a_{k-1,1}.$$

在级数部分中，还会遇到 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 这样的式子，它表示

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

它的求和指标 i 从 1 到 ∞. 上面说到的几点性质不能轻率地搬到这类“无穷和”那儿来.

有穷和和无穷和虽然都可以用 $\sum$ 来简记，但是从本质上说，两者有根本区别. $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 不但是一种形式，而且我们可以

将和求出来，所以还是一个数值． 而 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 仅仅是一种形式，只是在收敛的情况下，它才表示一个数值．所谓收敛，是指 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，这在微积分的级数一章中会学到，这里不予赘述．

正因为 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 不一定是一个数，所以，我们可以设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = A,$$

而不能轻率地设

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A.$$

我们有性质

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

而不能轻率地认为

$$\sum_{i=1}^{\infty} ka_i = k \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

关于求和记号 Σ，从知识上说，并不难接受，但往往运用不熟练，所以进行适当的练习是必要的．

例 1 将下列式子写成繁式：

(1) $\sum_{i=0}^{100} x^i$；

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$；

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$；

(4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$．

解 (1) $\sum_{i=0}^{100} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$.

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$.

(3) 原方程即

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = c.$$

(4) 原方程组即为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n = c_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

即
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

例 2 将下列式子用 Σ 表示:

(1) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n$;

(2) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_m x_m = c$;

(3) $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$;

(4) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases}$

解 (1)
$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n = \sum_{i=1}^{n} i x^i.$$

(2) 原方程可记为

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = c.$$

(3)
$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 原方程组可记为

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = c_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

例 3 将 $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}a_{ij}x^j$ 表为繁式.

解 $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x^j=\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}x^1+a_{i2}x^2+a_{i3}x^3+a_{i4}x^4)$$
$$\begin{aligned}&=a_{11}x^1+a_{12}x^2+a_{13}x^3+a_{14}x^4\\&\quad+a_{21}x^1+a_{22}x^2+a_{23}x^3+a_{24}x^4\\&\quad+a_{31}x^1+a_{32}x^2+a_{33}x^3+a_{34}x^4\end{aligned}$$

例 4 就上例验证性质 4.

解 $$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x^j$$
$$\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{4}(a_{1j}x^j+a_{2j}x^j+a_{3j}x^j)\\&=a_{11}x^1+a_{21}x^1+a_{31}x^1\\&\quad+a_{12}x^2+a_{22}x^2+a_{32}x^2\\&\quad+a_{13}x^3+a_{23}x^3+a_{33}x^3\\&\quad+a_{14}x^4+a_{24}x^4+a_{34}x^4+\end{aligned}$$

与上例结果一致，所以
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x^j=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x^j.$$

例 5 将方程组:
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=c_m\end{cases}$$
的左、右两端相加，将得到的新方程用简式表示出来。

解 新方程是
$$(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})x_1+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})x_2+\cdots$$
$$+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn})x_n=c_1+c_2+\cdots+c_m,$$

即 $$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_1+\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_2+\cdots+\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_n=\sum_{i=1}^{m}c_i,$$

得 $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j=\sum_{i=1}^{m}c_i.$$

与 Σ 相类似，连乘号用 $\prod$ 表示. 如

$$\prod_{i=1}^{n} a_i=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n.$$

这里不予赘述.

练　习

1. 将下列式子表为繁式:

(1) $\sum_{j=1}^{7} b_j$;　　(2) $\sum_{i=0}^{5} c_ix_i=b$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$;　　(4) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$;

(5) $\sum_{\substack{i+j=4\\ i,j\in N}} x^iy^j$;　　(6) $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j=c_i$　$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

2. 将下列式子用 Σ 表示出来:

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}$;

(2) $1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^n$;

(3) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{51}x_1+a_{52}x_2+a_{53}x_3+a_{54}x_4=b_5. \end{cases}$

3. 将二项式定理用 Σ 表示出来.

4. 举例验证性质 2.

5. 将下式表为繁式

$$\prod_{i=1}^{10} p_iq^i.$$

§2. 取整记号 $[x]$

在研究数列的极限时，需要找自然数 N，使 $n>N$ 时有

$|a_n - A| < \varepsilon$ 成立. 找 N, 往往从不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 入手, 求出 n 所应满足的条件. 譬如说, 在利用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 时, 就需要解不等式

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

解得

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

但是, $\frac{1}{\varepsilon}$ 不一定是自然数, 所以, 至此, 还不能令 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 而要令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

例如,

$$[3.1]=3,$$
$$[3]=3,$$
$$[2.9]=2,$$
$$[-1.5]=-2.$$

上面提到的 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 就是不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数.

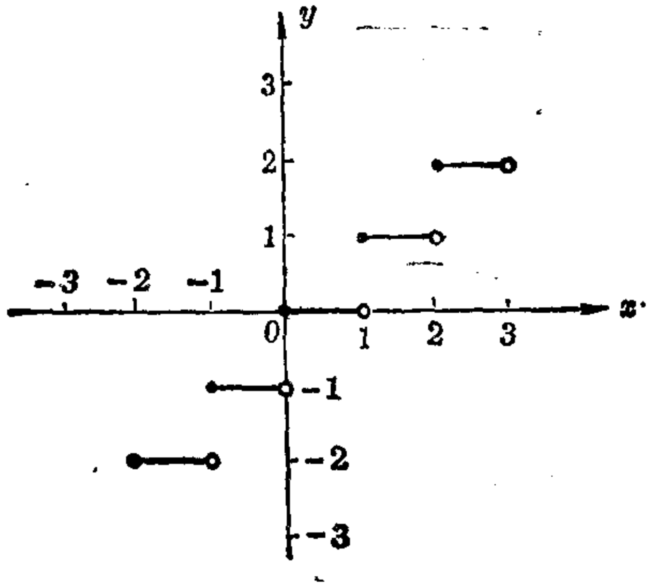

图 1-2-1

中学课本中, 学到过对数的首数这一知识, 显见, 如果某数的对数值为 x, 则它的首数就是 $[x]$. 所以, $[x]$ 并不是一个完全新的知识, 不过大学里与中学里出现这一知识时的讲述角度是有所不同的.

作为特殊情况, 如果 x 为正, 则 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

$y=[x]$ 也可以看作一个函数. 它的图象如图 1-2-1

所示.

$[x]$在研究整数问题时颇有用处，这是因为它有如下性质:

(1) x为任意实数,则

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

(2) x、y为任意实数,则

$$[x]+[y]\leqslant[x+y].$$

练　　习

1. 求$[2]$, $[-\pi]$, $[\cos 180°]$.

2. 若$\log_3\log_2\log_4[x]=\log_3\log_4\log_2[y]=\log_4\log_2\log_3[z]=0$,

求证:
$$41\leqslant x+y+z<44.$$

3. $\left[\dfrac{3m+2}{7}\right]=0$,求正整数$m$.

4. 求解不等式$0<\dfrac{[x]}{x}<1$.

5. 当$\varepsilon=0.1$, 0.001, 0.0015, $\dfrac{2}{3}$, $\sqrt{2}$时,

求$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$的值.

§3. 裂　项　法

在大学课程中,常常要用到裂项法.

如在级数中,为求级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的部分和,要将各项裂为两项:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots$$