模糊数学原理及应用

区奕勤　张先迪　编著

成都电讯工程学院出版社

· 1988 ·

内 容 提 要

本书由浅入深，从集合开始一直谈到模糊数学的若干最新发展，内容分八章，前七章分别讨论集合的布尔代数、模糊集合、模糊关系、模糊关系方程、扩展原则与模糊实数、模糊推理、模糊逻辑，末章介绍基本方法的几项实际应用。

本书层次分明，叙述清楚，面向有关专业的工程技术人员、大学生、研究生和教师，既可选作教材，也是一本有价值的参考书。

模糊数学原理及应用

欧奕勤　张先迪　编著

*

成都电讯工程学院出版社出版

成都电讯工程学院出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/32　印张 15　字数 345千字

版次 1988年8月第一版　印次 1988年8月第一次印刷

印数 1-3500

中国标准书号：ISBN 7-81016-079-6/O·3

（13452·4）　　定价：3.80元

目　录

第七章　模糊逻辑

第八章　几项实际应用

第一章　集合的布尔代数

§1.1　集合及其运算

当人们在大脑里逐步形成某个概念的时候，有两个方面是离不开的。一方面，从本质属性掌握该概念的内在涵义，这叫做该概念的内涵；另一方面，说明该概念究竟由哪些事物体现，这叫做该概念的外延。

集合实际上是体现概念的外延，它是现代数学的基础。

无论我们讨论什么具体问题，总是把所考虑的对象限制在一定范围内，这个范围叫做论域。论域中的每个对象叫做元素。论域的每一部分叫做论域上的普通集合，简称集合或集。通常以英文字母表末后的大写字母U，V，W，…等表示论域，以开头的大写字母A，B，C，…等表示集合，以小写字母a，b，c，…等表示元素。论域也叫做全集，元素简称为元。

在论域U中任意指定一个元素u以及任意指定一个集合A。当元素u属于集合A时，记作$u\in A$或$A\ni u$；当元素u不属于集合A时，记作$u\notin A$或$A\not\ni u$。普通集合论要求，在u与A之间的联系只有两种可能，要么$u\in A$，要么$u\notin A$，非此即彼。

没有元素的集合叫做空集，记作ϕ。空集看起来很不自然，但缺之不可。

由有限个元素a_1，a_2，…，a_n构成的集合，叫做有限集，记作

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

值得特别提到的是单元素集，它是仅有一个元素 a 的集合，记作 $\{a\}$。元素 a 与集合 $\{a\}$ 是两个不同概念，不能混为一谈。我们有 $a\in\{a\}$。具有无限多个元素的集合叫无限集。

集合 A 叫做集合 B 的子集，或者说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，意思都是指 A 的每个元也是 B 的元。如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A，B 相等，记作 $A=B$。A，B不相等记作 $A\neq B$。非空集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，意思是指 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$。ϕ 及B叫做B的平凡子集。

对于论域U 上的每个集合 A 来说，永远有 $\phi\subseteq A$ 并且 $A\subseteq U$。

为简便计，将引进一些符号：

$\forall x\in A$表示集合 A 中的每个元素 x；

$\exists x\in A$ 表示集合 A 中存在一个元素 x；

$P\Longrightarrow Q$表示若性质 P 成立，则性质 Q 成立；

$P\Longleftrightarrow Q$ 表示当且仅当性质 P 成立时，性质 Q 成立；

$P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P；

$A=\{x\mid P(x)\}$表示 A 是由论域中具有性质 P 的那些元素 x 构成的集合。

设 U 是论域。记

$$\mathscr{P}(U)=\{A\mid A\subseteq U\},$$

$\mathscr{P}(U)$叫做 U 上的幂集。如果 U 具有 n 个元素，则 $\mathscr{P}(U)$具有 2^n 个元素。

定义1 设 U 为论域，又A，$B\in\mathscr{P}(U)$

(i) 由 A，B的元素共同构成的集合叫做A，B的**并集**，

记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{u\,|\,u\in A\text{ 或 }u\in B\}$$

(ii) 由 A，B 的公共元素构成的集合叫做 A，B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{u\,|\,u\in A\text{ 且 }u\in B\}.$$

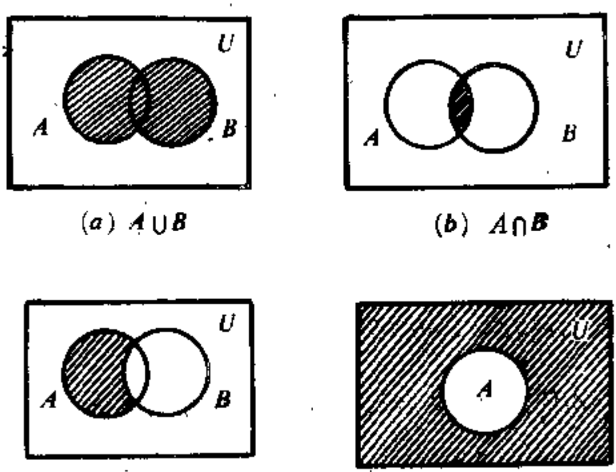
(iii) 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合叫做 A，B 的**差集**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{u\,|\,u\in A\text{ 且 }u\notin B\}.$$

(iv) U，A 的差集叫做 A 在 U 中的补集，简称 A 的**补集**，记作 A^c，即

$$A^c=U\backslash A$$

集合的并、交、差、补运算直观地示于图1。



(a) $A\cup B$　(b) $A\cap B$

(c) $A\backslash B$　(d) A^c

图 1

设 A，B，$C\in\mathscr{P}(U)$。易证并、交、补运算满足如下算律。

(1) 幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(2) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) 吸收律　$A\cap(A\cup B)=A$，

$A\cup(A\cap B)=A$；

(5) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(6) 幺元律　$\phi\cup A=A$，$\phi\cap A=\phi$，

$U\cup A=U$，$U\cap A=A$；

(7) 补元律　$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\phi$；

(8) 复原律　$(A^c)^c=A$；

(9) 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合上去。

定义2　给定义域 U 上的集合 A_t，$t\in T$。记

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{u\mid u\in U,\ \exists t\in T\text{使 }u\in A_t\},$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{u\mid u\in U,\ \forall t\in T\text{使 }u\in A_t\}.$$

$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$，$\bigcap\limits_{t\in T}A_t$依次叫做集合族$\{A_t\mid t\in T\}$的并集与交集。

若$T=\{1,2\}$，则$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$与$\bigcap\limits_{t\in T}A_t$分别就是两个集合的并集与交集。若$T=\{1,2,\cdots,n\}$，则$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$与$\bigcap\limits_{t\in T}A_t$分别表示$n$个

集合的并集与交集。若 $T=\{1, 2\cdots, n, \cdots\}$则$\bigcup_{t\in T}A_t$与$\bigcap_{t\in T}A_t$分别表示可数个集合的并集与交集，这里的集合$T$叫做指标集；除非另有声明，平常都假设指标集非空。$t$叫数指标。易证

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t),$$

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t),$$

$$(\bigcup_{t\in T}A_t)^c=\bigcap_{t\in T}A_t^c,$$

$$(\bigcap_{t\in T}A_t)^c=\bigcup_{t\in T}A_t^c.$$

集合序列 $A_1, A_2, \cdots$，叫做单调递增，意思是指

$$A_n\subseteq A_{n+1}, \qquad n=1, 2, \cdots,$$

此时，记

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n \text{或} A_n\uparrow\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

这两个记号都表示$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$是这个单调递增集合序列的极限。

完全类似，集合序列$A_1, A_2, \cdots$，叫做单调递减，意思是指

$$A_n\supseteq A_{n+1}, \qquad n=1, 2, \cdots$$

这个单调递减集合序列的极限记作

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n \text{或} A_n\downarrow\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

§1.2　集合的特征函数

给定非空集合 X 与非空集合 Y。我们把记号

$$f: X\to Y,\qquad x\longmapsto f(x)$$

叫做从 X 到 Y 的映射。所谓映射，实质上是函数概念的推广。它的意思是指，对每个 $x\in X$，都存在着唯一确定的元素 $y=f(x)\in Y$ 与之对应。为方便计，允许单独使用上述记号的前半部分 $f: X\to Y$ 表示从 X 到 Y 的映射 f。不过前半部分并未指明具体的对应规则。后半部分 $x\longmapsto f(x)$ 正是为了补充说明对应规则而设。我们形象地把元素 x 叫做元素 y 在映射 f 下的源点，反过来，元素 y 叫做元素 x 在映射 f 下的像点。X 叫做映射 f 的始集，Y 叫做映射 f 的终集。记

$$f(X)=\{y\mid y\in Y,\ \exists x\in X 使 y=f(x)\},$$

$f(X)$ 叫做映射 f 的射程。

定义1　给定映射 $f: X\to Y$。

(i) 映射 f 叫做**单射**，意思是指由 $f(x_1)=f(x_2)$ 必能推出 $x_1=x_2$。

(ii) 映射 f 叫做**满射**，意思是指 $f(X)=Y$。

(iii) 映射 f 叫做**双射**，意思是指 f 既是单射又是满射。

定义2　集合 X 与集合 Y 叫做基数相同，简称**同基**，记作 $|X|=|Y|$，意思是指，存在着从 X 到 Y 的双射。

定义3　映射 $f: X\to X$，$x\longmapsto x$ 叫做集合 X 上的**恒等映射**，记作 I_X，即 $I_X: X\to X$，$I_X(x)=x$。

定义4　给定 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$。映射 $h: X\to Z$ 叫做 f，g 的**复合映射**，记作 $h=g\circ f$，意思是指，对任何 $x\in X$，永远

成立着等式

$$h(x)=g(f(x)).$$

容易推出复合映射的下列性质.

(1) 给定 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$.那么 $h\circ(g\circ f)$ 及 $(h\circ g)\circ f$ 都是从 X 到 W 的映射，并且

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f).$$

换言之，映射的复合运算满足结合律.

(2) 给定 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$. 如果 f, g 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射.

(3) 给定 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$. 如果 f,g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射.

定理1 映射 $f:X\to Y$ 具备单满性的充分必要条件是存在着映射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$.

证 充分性 已知存在着映射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$. 任取 $x_1,x_2\in X$，设 $f(x_1)=f(x_2)$. 由于

$$x_i=I_X(x_i)=(g\circ f)(x_i)=g(f(x_i)),\quad i=1,2$$

因此 $x_1=x_2$. 可见 f 是单射.

另外，对任何 $y\in Y$. 令 $x=g(y)$，于是

$$f(x)=f(g(y))=(f\circ g)(y)=I_Y(y)=y$$

由此可见，$f(X)=Y$. 即 f 是满射.

必要性 设 f 是单满射. 对任何 $y\in Y$，存在着唯一的 $x_y\in X$ 使 $y=f(x_y)$. 引进映射

$$g:Y\to X,\qquad g(y)=x_y.$$

于是对每个 $x\in X$ 均得出

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x=I_X(x)$$

因此 $g\circ f=I_X$.

不仅如此，还有

$$(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x_y)=y=I_Y(y)$$

因此 $f\circ g=I_Y$。 □

推论 给定双射 $f:X\to Y$。则必唯一地存在着映射$g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$。不仅如此，这个映射 g 也具有单满性。

证 已知映射 $f:X\to Y$ 具备单满性。

由定理 1 的必要性得知，适合条件

$$g\circ f=I_X,\qquad f\circ g=I_Y$$

的映射 $g:Y\to X$ 是存在的。现在假设映射 $h:Y\to X$ 也适合同样的条件

$$h\circ f=I_X,\qquad f\circ h=I_Y\ .$$

于是利用复合映射的结合律得出

$$\begin{aligned}h&=h\circ I_Y=h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g\\&=I_X\circ g=g\end{aligned}$$

这便证明了映射 g 是唯一的。

最后，把定理 1 的充分性用于映射 $g:Y\to X$直接得知 g 具有单满性。

今后，我们把出现在推论中的那个唯一的双射 g 叫做已知双射 $f:X\to Y$ 的逆映射，并记作 $f^{-1}:Y\to X$。于是

$$f^{-1}\circ f=I_X,\qquad f\circ f^{-1}=I_Y.$$

现在以映射的概念为基础，着手引进集合的特征函数。

给定论域U上的集合A。我们可以确定从U到$\{0,1\}$的映射

$$\chi_A:U\to\{0,1\}$$

$$u\longmapsto\chi_A(u)=\begin{cases}1 & 当u\in A\\ 0 & 当u\in U\setminus A\end{cases}$$

映射 χ_A 叫做集合 A 的特征函数。

反过来，任意一个从 U 到$\{0,1\}$的映射 $f:U\to\{0,1\}$都唯一地确定U 上的集合 A 使得 $\chi_A=f$。事实上，

$$A=\{u|u\in U使\ f(u)=1\}。$$

这是很明显的。

集合 A 的特征函数在 u 点处的值 $\chi_A(u)$叫做元素 u 对集合 A 的隶属度。当 $u\in A$ 时，$\chi_A(u)=1$，表示 u 彻底地隶属于 A；当 $u\notin A$ 时，$\chi_A(u)=0$，表示 u 彻底地不隶属于 A。

不难看出，特征函数满足下列运算性质。

$$A=B\Longleftrightarrow \chi_A(u)=\chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \chi_A(u)\leqslant \chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$A\subset B\Longleftrightarrow 0\doteqdot \chi_A(u)\leqslant \chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$且\exists u_0\in U使\ \chi_A(u_0)<\chi_B(u_0)。$$

$$\chi_{A\cup B}(u)=\mathrm{Max}\{\chi_A(u),\chi_B(u)\}\quad(\forall u\in U)$$

$$\chi_{A\cap B}(u)=\mathrm{Min}\{\chi_A(u),\chi_B(u)\}\quad(\forall u\in U)$$

$$\chi_{A^c}(u)=1-\chi_A(u)\qquad(\forall u\in U)$$

§1.3 等价关系

给定集合 A 及集合 B。称

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}$$

为 A，B 的直积，称(a,b)为序偶，称 a 为序偶的第一坐标，b 为序偶的第二坐标。序偶(a,b)与序偶 (a',b') 相等，意思是指 $a=a'$ 且 $b=b'$。因此 $A\times B$ 与 $B\times A$ 不必相等，除非 $A=B$。另外，$A\times A$ 习惯上简写作A^2。

类似地定义 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的直积

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为序组，称 a_i 为序组的第 i 个坐标，$i=1,2,\cdots,n$。

定义1 给定集合 A 及集合 B。直积 $A\times B$ 的每个子集R都叫做从 A 到 B 的**关系**。当 $(a,b)\in\mathrm{R}$ 时，称 a,b 适合关系R，记作 $a\mathrm{R}b$；当 $(a,b)\notin\mathrm{R}$ 时，称 a,b 不适合关系R，记作 $a\overline{\mathrm{R}}b$。

给定映射 $f:X\to Y$。明显地 $\{(x,y)\mid x\in X,\ y=f(x)\}\subseteq X\times Y$。由此可见，如果仍令 f 表示所有序偶 $(x,f(x))$ 构成的集合，即令

$$f=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

则从 X 到 Y 的映射 f 便成为从 X 到 Y 的关系的一种特殊形态。

同样，直积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的子集R叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的关系。

称 A^2 的子集R为 A 上的二元关系简称 A 上的关系；称 A^n 的子集R为 A 上的 n 元关系。

集合 A 上的二元关系具备若干基本属性，在理论以及应用上发挥重要作用。

定义2 设非空的R是集合 A 上的关系。

(i) R叫做具备**自反性**，意思是指对每个 $a\in A$ 都有 $a\mathrm{R}a$；

(ii) R叫做具备**对称性**，意思是指，由 $a\mathrm{R}b$ 必可推出 $b\mathrm{R}a$；

(iii) R叫做具备**反对称性**，意思是指由 $a\mathrm{R}b$ 及 $b\mathrm{R}a$ 必

可推出$a=b$；

(iv) R 叫做具备**传递性**，意思是指，由$a\mathrm{R}b$及$b\mathrm{R}c$必可推出$a\mathrm{R}c$。

例 1　在非空集A的幂集$\mathscr{P}(A)$上给定包含关系R_1，真包含关系R_2以及不相交关系R_3。

$$\mathrm{R}_1=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\subseteq Y\},$$
$$\mathrm{R}_2=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\subset Y\},$$
$$\mathrm{R}_3=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\cap Y=\phi\}.$$

易知R_1具备自反性、反对称性及传递性，但不具备对称性；R_2具备反对称性及传递性，但不具备自反性，也不具备对称性；R_3具备对称性，但不具备自反性、反对称性及传递性。

例 2　设p是正整数。在所有整数的集合$\mathbf{Z}$上给定关系R，

$$\mathrm{R}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{Z},\ p\text{ 整除 }m-n\}.$$

易知R具备自反性、对称性及传递性，但不具备反对称性。

定义3　具备自反性、对称性及传递性的关系叫做**等价关系**。集A上的等价关系常记作$\sim\subseteq A\times A$或$\mathrm{E}\subseteq A\times A$。

定义4　给定集合A上的等价关系E。

(i)　设$a\in A$。A的子集$[a]_{\mathrm{E}}=\{x\mid x\in A,a\mathrm{E}x\}$叫做元素$a$所属的、由等价关系E诱导的、集$A$的等价类，简称元素$a$的**等价类**。

(ii)　由集A的所有等价类构成的集合叫做A的**等价商集**，记作A/E，即

$$A/\mathrm{E}=\{[a]_{\mathrm{E}}\mid a\in A\}.$$

如果只考虑集合A上的等价关系E而不牵涉集合A上的其它等价关系，那么无妨将等价类$[a]_{\mathrm{E}}$简写为$[a]$，并将

$[a]$的每个元叫做这个等价类的**代表**。

定义5 由集合A的某些非空子集构成的集合$\Pi=\{A_t | t\in T\}$叫做A的一个**分割**，意思是指，集合A的每个元素都必在而且只在其中之一A_t中，也就是说

(1) 当$t\neq t'$时，$A_t\cap A_{t'}=\phi$；

(2) $\bigcup\limits_{t\in T} A_t=A$。

每个A_t叫做分割Π的一个分割块。

现在来看看A的等价类的一些性质。

(1) 对于A的每个元素a有$a\mathrm{E}a$，因此$a\in[a]$。从而A的每个元素a的等价类非空。

(2) 若$a\mathrm{E}b$，则$[a]=[b]$。换言之，如果元素a与元素b适合等价关系E，那么它们的等价类相同。这是因为，对每个$x\in[a]$有$a\mathrm{E}x$，加之以$a\mathrm{E}b$，于是$b\mathrm{E}x$，从而$x\in[b]$。由此得知$[a]\subseteq[b]$。类似地知$[b]\subseteq[a]$。故$[a]=[b]$。

(3) 若$a\bar{\mathrm{E}}b$，则$[a]\cap[b]=\phi$。换言之，如果元素a与元素b不适合等价关系E，那么它们的等价类不能有公共元素。事实上，假如存在$x\in[a]\cap[b]$的话，那么$x\in[a]$且$x\in[b]$。于是$a\mathrm{E}x$且$b\mathrm{E}x$，从而$a\mathrm{E}b$。这与已知条件$a\bar{\mathrm{E}}b$矛盾。

根据等价类的这些性质，我们得到

定理1 给定集合A上的等价关系E。则等价商集A/E是A的一个分割。

证 刚才已指出每个等价类均非空。另外，易知任何两个不相同的等价类不能有公共元素。剩下来只要证明等式$\bigcup\limits_{a\in A}[a]$