

画法几何学

(第二版)

陈英梁 主编

国防工业出版社

画 法 几 何 学

(第 二 版)

陈英梁 主编

國 防 工 業 出 版 社

内 容 简 介

本书是在第一版基础上,根据课程教学指导委员会制订的高等工业学校《画法几何及机械制图课程教学基本要求》(机械类)修订而成的。

本书内容包括正投影图基础,直线,平面,直线、平面的相对位置,投影变换,曲线、曲面,曲面立体的相交,轴测投影,表面展开,透视投影,透视仿射变换等十一章。书后有附录,介绍了第三角投影等。与本书配套的有北京理工大学陈英梁主编的《画法几何学习题集》(第二版)一本,同时出版,可供选用。

本书可作为高等工业学校机械制造类各专业的教材,也可供其他类型学校有关师生参考。

画 法 几 何 学 (第二版)

陈英梁 主编

责任编辑 张仁杰

*

国防工业出版社出版、发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张14¹/₂ 330千字

1990年9月第一版 1990年9月第一次印刷 印数: 0,001—4,000册

ISBN 7-118-00608-4/0·50 定价: 7.45元

第二版序

本书第一版于1982年出版。

这次修订主要是依据课程教学指导委员会制订、于一九八七年秋季起试行的高等工业学校《画法几何及机械制图课程教学基本要求》(机械类)进行的。此外还考虑到使本教材有更大的适应范围,以及与本教材(第二版)配套的《机械制图》(蒋知民、张洪德主编)也将同时出版等情况,在修订时对第一版作了较大的变动。

与第一版相比,保留并加强了能力的培养,加强了基本内容及与机械制图的结合,在体系上作了较大的调整。主要的修订情况如下:

1. 第一章至第八章为基本要求的内容,但适当留有余地。
2. 撤消了原书“图解与计算”一章,部分内容并入其它章节。
3. “投影变换”一章精简了重合法等内容,保留了一次换面提前介绍。
4. “轴测投影”一章着重在基本概念和基本作图方法的论述,而将轴测图的剖视图画法划归机械制图介绍。
5. 将选学内容及扩展思路和提高性的内容集中安排在本书的后面。这些内容包括“表面展开”和“透视仿射变换”两章,此外还增加了“透视投影”一章,介绍了透视投影的基本概念。
6. 加强了典型题的分析,特别是增加了“点线面综合题及其解法”一节。并引入了“框图”用以总结概念、描述解题思路及过程。

书中带星号的章节为选学内容。

参加本版修订工作的有陈英梁(主编)、叶玉驹(主审)、齐信民。

由于我们水平有限,缺点和错误在所难免,欢迎广大读者批评指正。

编 者

一九八九年一月

目 录

绪论	1
第一章 正投影图基础	2
§ 1-1 投影法	2
§ 1-2 平行投影的基本性质	3
§ 1-3 工程上常用的几种投影图	5
§ 1-4 物体的正投影图	7
§ 1-5 点的投影	10
本章小结	17
第二章 直线	19
§ 2-1 各种位置直线	19
§ 2-2 求线段的实长和倾角	22
§ 2-3 直线上的点	25
§ 2-4 两直线的相对位置	29
§ 2-5 直角的投影	31
本章小结	34
第三章 平面	35
§ 3-1 平面的表示法	35
§ 3-2 各种位置平面	37
§ 3-3 平面上的点和直线	40
§ 3-4 平面上的特殊位置直线	42
§ 3-5 平面的一次换面	44
本章小结	47
第四章 直线、平面的相对位置	48
§ 4-1 平行关系	48
§ 4-2 相交关系	51
§ 4-3 平面立体的截交线	57
§ 4-4 平面立体的贯穿点	59
§ 4-5 垂直关系	60
§ 4-6 点线面综合题及其解法	64
本章小结	70
第五章 投影变换	71
§ 5-1 概述	71
§ 5-2 换面法	72
§ 5-3 旋转法	77
§ 5-4★ 辅助斜投影法	85
§ 5-5★ 图解与计算	87
本章小结	91

第六章 曲线、曲面	93
§ 6-1 曲线概述	93
§ 6-2 圆的投影	95
§ 6-3 曲面概述	97
§ 6-4 直线面	99
§ 6-5 回转曲面	104
§ 6-6★ 曲线面	108
§ 6-7 螺旋线和螺旋面	109
§ 6-8 曲面的切平面	112
本章小结	116
第七章 曲面立体的相交	117
§ 7-1 曲面立体的截交线	117
§ 7-2 曲面立体的贯穿点	127
§ 7-3 曲面立体的相贯线	131
本章小结	146
第八章 轴测投影	147
§ 8-1 基本知识	147
§ 8-2 正轴测投影的轴向变形系数和轴间角	149
§ 8-3 正轴测投影中平行坐标面的圆的投影	152
§ 8-4 正轴测投影图的画法	157
§ 8-5 斜轴测投影	162
§ 8-6 三种轴测图的比较与选择	167
本章小结	169
第九章★ 表面展开	170
§ 9-1 平面立体表面的展开	170
§ 9-2 可展曲面的展开	172
§ 9-3 不可展曲面的近似展开	175
§ 9-4 应用举例	178
本章小结	181
第十章★ 透视投影	183
§ 10-1 概述	183
§ 10-2 点的透视	184
§ 10-3 直线的透视	186
§ 10-4 平面的透视	190
§ 10-5 透视图的分类	191
§ 10-6 用视线法作透视图	193
§ 10-7 视点、画面和物体相对位置的选定	199
本章小结	201
第十一章★ 透视仿射变换	202
§ 11-1 两平面间的透视仿射变换	202
§ 11-2 平面到自身的透仿变换(亲似变换)	203
§ 11-3 透仿对应的确定	203

§ 11-4 透仿对应的主方向	205
§ 11-5 圆的透仿变换	206
§ 11-6 平面的正投影与透仿对应	209
§ 11-7 应用举例	211
本章小结	214
附录	216
§ 1 椭圆、抛物线和双曲线的画法	216
§ 2 第三角投影	218

绪 论

一、画法几何学的研究对象

画法几何学是研究投影理论和方法, 并用以解决空间几何问题的学科, 包括图示法和图解法两部分内容。

图示法是研究如何将空间几何元素(点、线、面)与几何形体的有关形状、位置等问题表示在图纸平面上; 如何根据平面上的投影图形确定空间几何元素与几何形体的形状、位置等问题, 亦即研究平面上的投影图形和空间的原形之间的一一对应问题。

图解法是研究如何在平面上用作图的方法解决空间几何问题, 以及用图形表达和解决某些数学关系(如矢量)的理论和方法。图解法具有直观、简便的优点, 对一般工程问题也有一定的精度。但是由于操作和仪器、工具的误差, 作图精度毕竟受到一定的限制。图解与计算的结合, 可以保留图解法的优点, 并克服其作图精度较低的缺点。

二、课程的任务和目的

1. 学习平行投影的基本理论, 着重掌握正投影法的原理和应用; 了解轴测投影的基本知识, 并掌握其基本画法。

2. 培养空间几何问题的图解能力, 能作图解决空间定位问题(平行、相交、从属关系等)和度量问题(距离、角度、实形等)。

3. 培养空间想象能力与空间思维能力。

图样是工程界的技术语言。在现代化的工、农业生产和科学研究中要用到各种工程图样。图样不仅是各项工程、设备、机器和仪器的施工和生产的主要依据, 而且也是进行科学技术交流的一种工具。画法几何学为工程图样提供了图示和图解的理论基础。

三、学 习 方 法

1. 画法几何学是一门有系统理论的学科。它有一个鲜明的特点, 就是必须将对平面图形的投影分析与对几何元素、几何形体的空间想象结合起来, 即空间与平面的紧密结合。在学习过程中应注意空间想象能力与空间思维能力的培养, 两者是缺一不可、相辅相成的。空间想象能力就是指在解题过程中, 能对于解题方案、作图步骤及作图结果等有一个比较清晰的空间形象。空间思维能力就是指对空间几何问题的逻辑思维能力(概念、判断、推理的能力), 即应学会运用综合、分析、演绎、归纳等方法分析问题和解决问题。对于初学者来说, 应当具备初等几何, 特别是立体几何的有关知识, 这是学习本课程的一个必要条件。

2. 画法几何学是一门基础课, 要掌握它, 必须通过大量的实践。因此, 在掌握基本理论的同时, 必须仔细研究每一个图例的分析方法和作图步骤, 并且认真地、独立地完成一整套作业。

3. 知识的积累和能力的提高要靠每个人的艰苦劳动和努力。因此, 应结合自己的具体情况, 不断总结经验, 改进学习方法。

第一章 正投影图基础

§ 1-1 投 影 法

在日常生活中经常可以看到一些投影现象,如物体在光源(日光或灯光)的照射下,就会出现物体的影子(见图 1-1)。投影的方法就是从这些自然现象抽象出来,并随着生产的发展而发展起来的。常用的投影法有两大类:中心投影法和平行投影法。

一、中心投影法

把图 1-1 所示的投影现象抽象为图 1-2 所示情况,光源用点 S 表示,称为投影中心,光线即为投射射线(如 SA 、 SB 、 SC)。桌面即为投影面 H 。自点 S 过 $\triangle ABC$ 的各顶点作投射射线 SA 、 SB 、 SC ,它们的延长线与 H 面分别交于 a 、 b 、 c 三点,该三点分别为空间点 A 、 B 、 C 在 H 面的中心投影。而 $\triangle abc$ 即为 $\triangle ABC$ 在 H 面的中心投影 $\odot$ 。

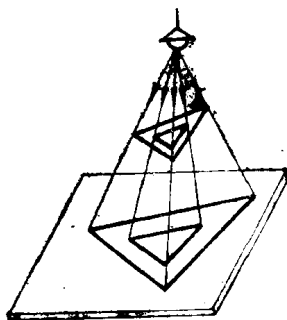


图 1-1

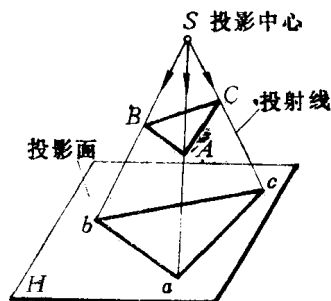


图 1-2

因为空间的直线和平面有唯一的交点(一般情况),所以,由上述的投影过程可见,空间的一个点(如 A),自确定的中心 S 进行投影,在 H 面上只存在唯一的一个投影(如 $SA \cap H = a$)。

二、平行投影法

如果把中心投影的投影中心移至无穷远点(也称非固有点),此时各投射射线就成为相互平行的,在这种特殊条件下,投影中心只能用投射方向 S 来表示,这样的投影就称为平行投影。只要自空间各点分别引与 S 平行的投射射线,在投影面 H 的交点处即可得到空间各点在 H 面上的平行投影(见图 1-3)。

显然,在确定的投射方向下,空间的一个点在 H 面的平行投影也是唯一确定的。

根据投射方向 S 与投影面 H 的倾角不同,平行投影法又可分为(见图 1-4):

(1) 直角投影法——投射方向 S 垂直于投影面;

● 今后规定用大写字母(如 A 、 B 、 C)表示空间的点,用小写字母(如 a 、 b 、 c)表示相应空间点的投影。

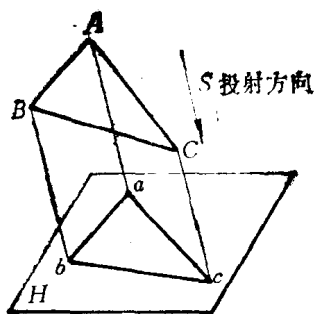


图 1-3

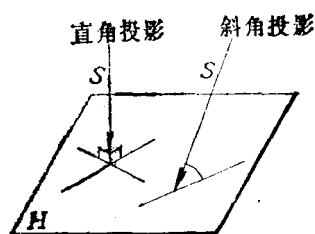


图 1-4

(2) 斜角投影法——投射方向 S 倾斜于投影面。

§ 1-2 平行投影的基本性质

平行投影有如下的基本性质：

(1) 直线的投影一般还是直线，如图 1-5。因为组成直线 AB 的每一个点都投影为点，而投影各点的所有投射射线形成一投射平面 $ABba$ ，该投射平面与 H 面的交线 ab 即为直线 AB 的投影。因此，一般情况下直线的投影还是直线。

点的投影是点，直线的投影是直线，投影所具有的这一性质称为同素性。

(2) 点在直线上，则该点的投影一定在该直线的投影上，即点和直线的从属性是平行投影的不变性。如图 1-6， $C \in AB$ ，则 $c \in ab$ 。

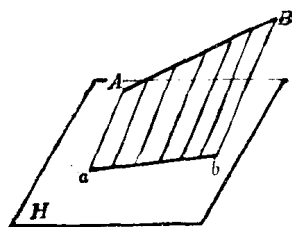


图 1-5

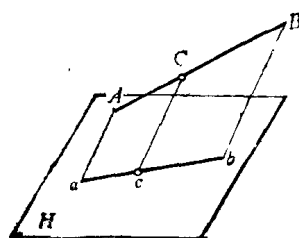


图 1-6

(3) 在一条直线上任意三个点的简单比是平行投影的不变量。

如图 1-6，点 A 、 B 、 C 为一条直线上的三个点，其中点 A 、 B 为基础点，点 C 为分点。则这三个点的简单比定义为：

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}$$

由初等几何的平行截割定理很容易证明：

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$$

或

$$(ABC) = (abc)$$

即一直线上三个点的简单比等于其投影相应的三个点的简单比。

(4) 在一般情况下，线段的长度投影后要改变。投影长与原长的比称为变形系数

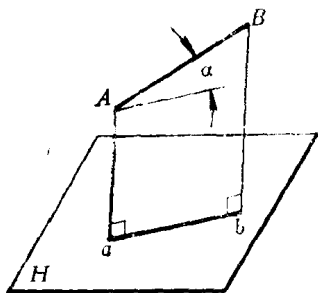
k 。如图 1-6, $\frac{ab}{AB} = k$ 。

一般情况下 (斜角投影时) 可能有 $k < 1$ 或 $k > 1$ 。

但有如下特殊情况:

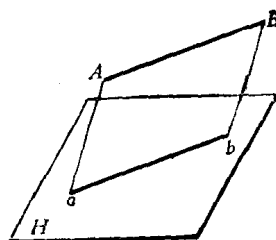
1) 当投射方向 S 垂直于投影面 (直角投影), 且当线段对 H 面的倾角为 α 时, $ab = AB \cos \alpha$, 所以 $k = \cos \alpha \leq 1$ (图 1-7), 即线段的投影长度一般要缩短。

2) 当线段平行投影面时, 其投影反映线段实长 (如图 1-8)。



直角投影时, $ab = AB \cos \alpha$

图 1-7

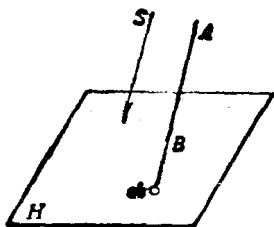


$AB // H, k = 1$

图 1-8

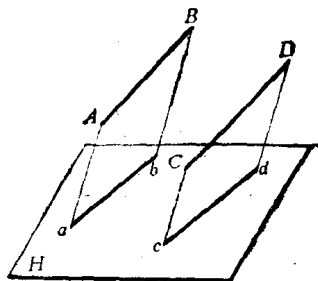
3) 当直线与投射方向 S 平行时 (对直角投影来说, 此时直线垂直投影面), 直线的投影成为点, 如图 1-9。这种投影性质称为积聚性。

(5) 平行两直线的投影仍平行。如图 1-10, $AB // CD$, 所以两投射平面 $ABba // CDdc$, 所以 $ab // cd$ 。



$AB // S$, 有积聚性, $k = 0$

图 1-9



$AB // CD$, 则 $ab // cd$

图 1-10

而且很容易证明, 平行两线段 AB 和 CD 的比值是平行投影的不变量, 即 $AB // CD$, 则 $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$ 。

(6) 平面形的投影可由投影其轮廓线得到。一般情况下, 平面形的投影都要发生变形, 但投影形状总与原形相仿。如图 1-11, $\triangle abc \approx \triangle ABC$, 八边形 $abcdefgh \approx ABCDEFGH$ 。但三角形的投影仍为三角形, 八边形的投影边数不变, 而且凹形的投影仍为凹形。

但有如下的特殊情况,

1) 当平面形平行于投影面时, 其投影反映实形 (图 1-12)。

2) 当平面形平行于投射方向 S 时, 其投影为直线 (图 1-13)。平面形投影的这种

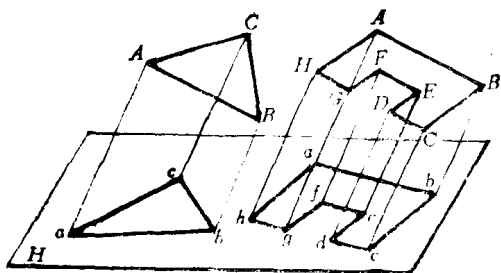


图 1-11

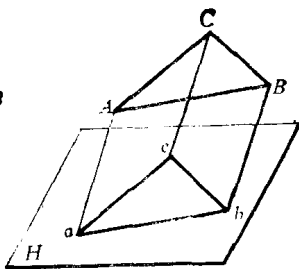


图 1-12

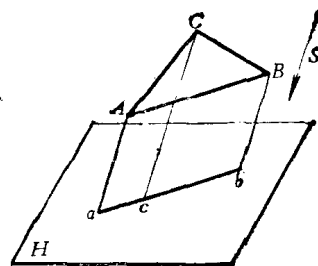


图 1-13

性质也称为积聚性。

在上述的平行投影基本性质中,要特别注意那些平行投影下的不变性(如同素性,点和线的从属性,两直线的平行性等),以及不变量(如简单比、两平行线段的长度比等)。这些不变性和不变量,对图示、图解空间几何的各种问题时都将起重要作用。

§ 1-3 工程上常用的几种投影图

图作为一种工具,对于解决工程及一些科学技术问题起着重要的作用,因此对图的要求也就很严格,一般说来这些要求是:

- (1) 根据图形应当能完全确定空间形体的真实形状和大小;
- (2) 图形应当便于阅读;
- (3) 绘制图形的方法和过程应当简便。

但是由前述的中心投影法和平行投影法可以看出,不论用那种投影法,仅仅根据一个投影是确定不了空间形体的形状和位置的。如图1-14,只凭点的一个投影 a 并不能确定该点的空间位置,因为在同一条投射线上的任何点(如 A_1, A_2, A_3)都投影为 a 。又如图1-15 a 和 b ,两个不同形状的物体在 H 面上的投影形状是相同的。因此,为了使投影图达到上述所提出的要求,就必须对这个投影面附加某些条件,根据投影法和附加条件的不同,工程上采用以下四种投影图:正投影图、轴测投影图、标高投影图和透视投影图。

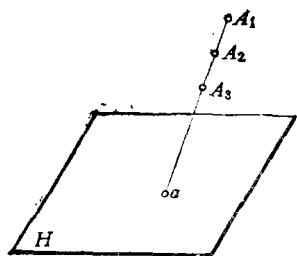


图 1-14

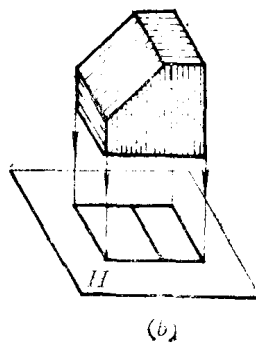
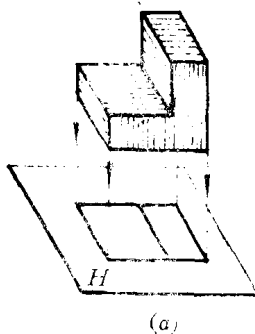
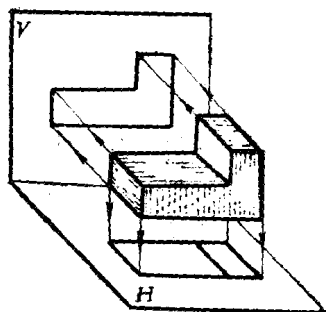


图 1-15

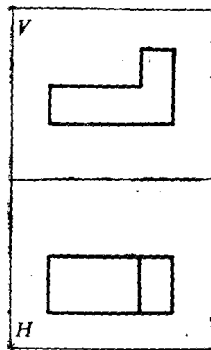
下面分别介绍这四种投影图的主要特点和应用范围。

一、正投影图

利用平行直角投影, 把形体投射到两个或两个以上互相垂直的投影面上 (图 1-16a), 再按一定规律把这些投影面展开成一平面, 便得到正投影图 (图 b)。根据正投影图很容易确定物体的形状和大小, 其缺点是直观性较差, 但经过一定训练以后就能看懂。所以工程上用得最广, 也是今后学习的重点。



(a) 投影情况

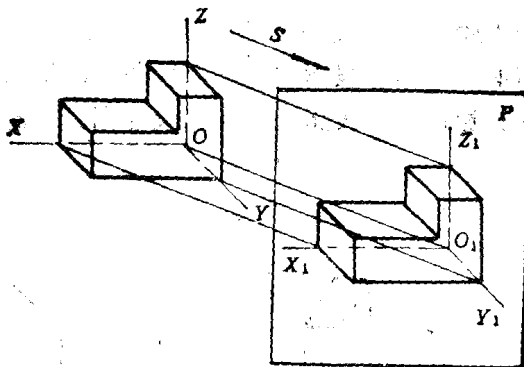


(b) 正投影图

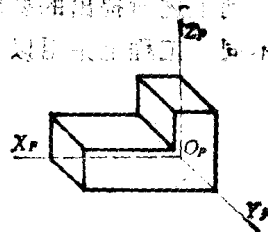
图 1-16

二、轴测投影图

利用平行投影法, 把物体连同确定它的坐标系一起投影到一个投影面上, 便得到轴测投影图 (图 1-17), 俗称立体图。这种图有一定的立体感, 容易看懂, 但画起来较麻烦, 并且对复杂机件也难以表示清楚, 所以在工程上只作为辅助性的图来运用。



(a) 投影情况

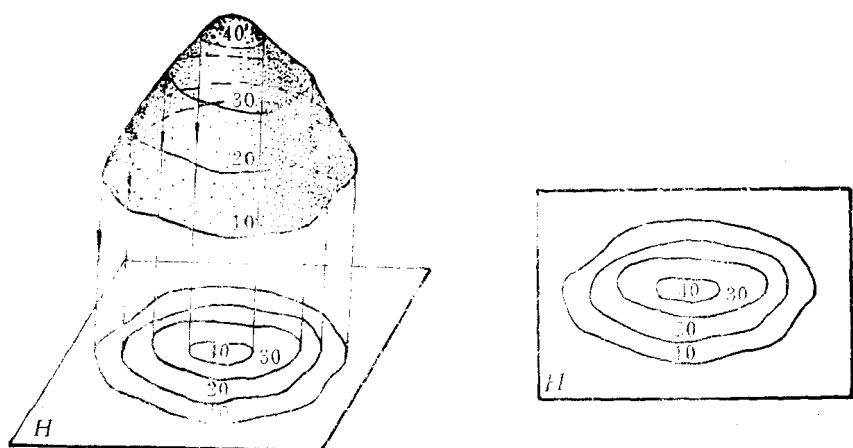


(b) 轴测投影图

图 1-17

三、标高投影图

标高投影图是利用平行直角投影法, 将物体投影在一个水平投影面上得到的 (图 1-18)。为了解决物体高度方向的度量问题, 在投影图上画出一系列的等高线, 在等高线上标出高度尺寸 (标高)。这种图在地图以及土建工程图中表示土工结构或地形。



(a) 投影情况

(b) 标高投影图

图 1-18

四、透视投影图

透视投影图是根据中心投影法绘制的，这种图和用眼睛看到的形象一样，所以看起来比较自然，尤其是表示庞大的物体时更为优越。但是由于不能很明显地把真实形状和度量关系表示出来，同时由于作图很复杂，所以目前主要在建筑工程上作辅助性的图使用(图1-19)。

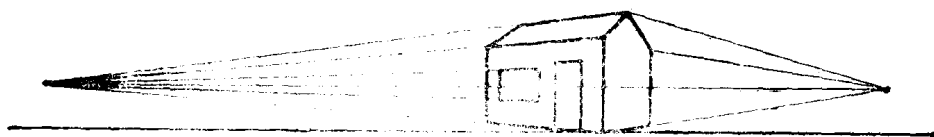


图 1-19

§ 1-4 物体的正投影图

一、物体的正投影图

由前节可知，用正投影图表示物体至少需要从不同方向画出物体的两个投影。而通常则需要画出三个投影，这就需要三个投影面。现采用三个互相垂直的投影面，如图1-20。其中 V 面称为正面投影面， H 面称为水平投影面， W 面称为侧面投影面。两投影面的交线称为投影轴，如图上的 OX 轴、 OY 轴、 OZ 轴。

在图1-21中，图 a 表示一物体向三投影面进行投影的情况。其中 V 面上的投影称为正面投影， H 面上的投影称为水平投影， W 面上的投影称为侧面投影。

由于物体是由一些表面围成的，所以投影物体时，主要是作出组成物体的各表面的投影。画图时尽可能使物体的主要表面平行于投影面，其它表面垂直于投影面(如图 a ，物体的表面1、2和背面平行于 V 面，其它表面都与 V 面垂直)，这样才能使一些表面的投影反映实形，而另一些表面投影为直线(有积聚性)，有助于读图和画图。

为了得到物体的正投影图，需将三投影面展开成一平面。展开的规定如下：

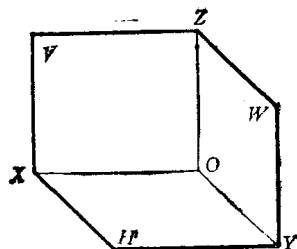


图 1-20

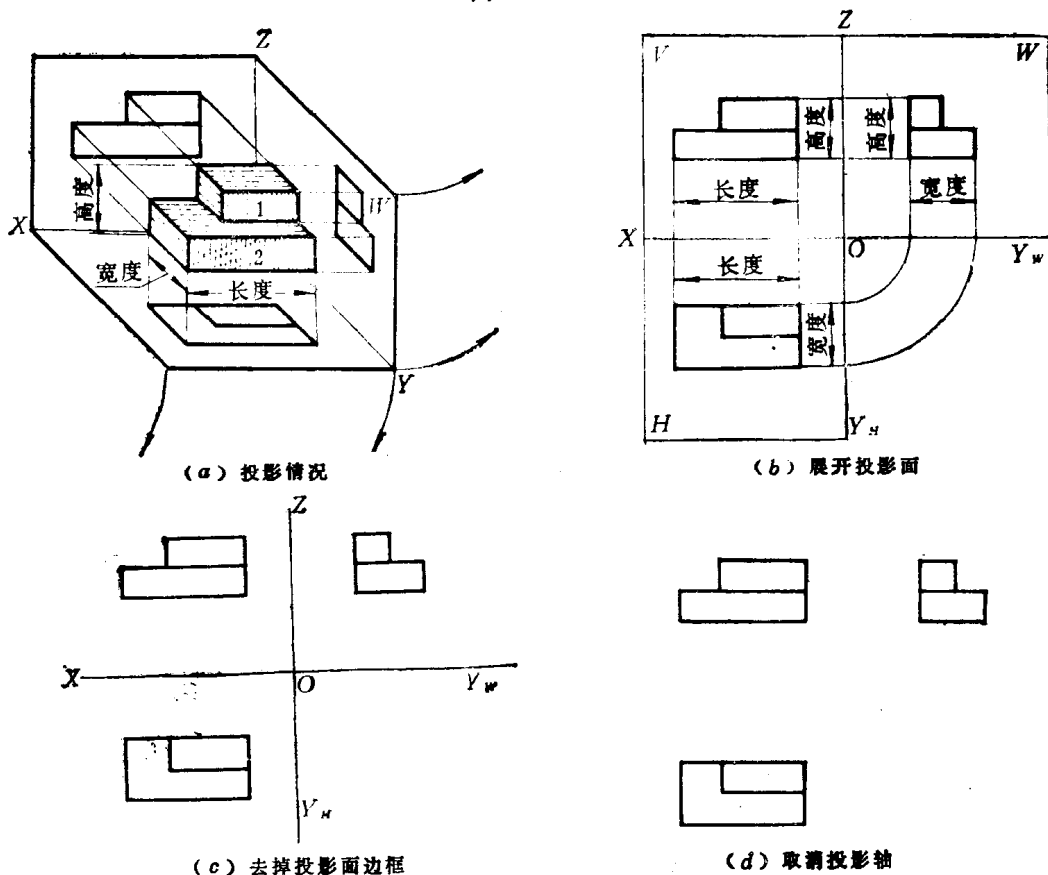


图 1-21

- 1) V 面不动;
- 2) H 面绕 OX 轴向下旋转 90° ;
- 3) W 面绕 OZ 轴向后方旋转 90° (如图 a 中箭头所示)。

在展开时, OY 轴被拆为两半—— OY_H 和 OY_W 。图 b 为展开后得到的正投影图。因为进行投影时投影面的大小不加任何限制, 所以不必画出投影面的边框, 如图 c 。

二、物体三投影间的关系

三个投影是从物体的三个方向投影得到的, 三个投影之间是密切相关的, 它们的关系主要表现在它们的度量和相互位置上的联系。

每个物体都有三个方向的尺寸: 长度、宽度和高度。但每个投影只能反映两个方向的尺寸 (图 1-21)。 V 投影反映长度 (X 方向尺寸) 和高度 (Z 方向尺寸); H 投影反映长度和宽度 (Y 方向尺寸); W 投影反映高度和宽度。 V 投影和 H 投影都反映同一物

体的长度，因此它们的长度应相等； V 投影和 W 投影都反映物体的高度，它们的高度应相等； W 投影和 H 投影都反映物体的宽度，它们的宽度应相等（但要注意应转 90° 去找关系）。

考虑到物体正投影图的形成过程，它的三个投影之间的相对位置也是有要求的。综合起来，物体三投影间的关系如下：

V 、 H 两投影：长对正；

V 、 W 两投影：高平齐；

W 、 H 两投影：宽相等。

物体的三投影主要是用来表示它的形状和大小，投影轴只能说明物体相对于各投影面的距离，没有投影轴一样能使三投影保持上述投影关系，因此通常不画出投影轴，如图 1-21 d 即为常见的物体正投影图的形式。

三、基本立体的正投影图

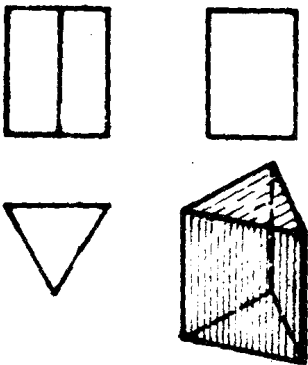
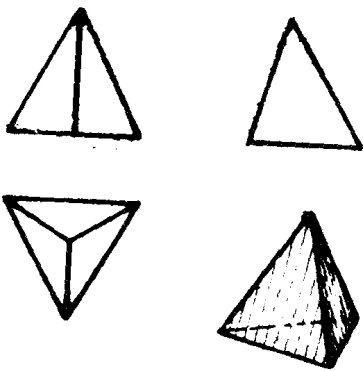
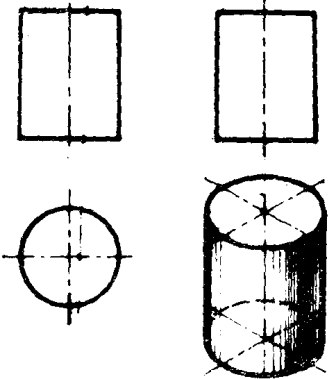
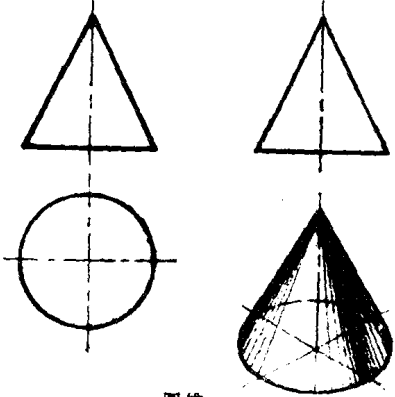
一般的物体都可以分析为由一些基本立体组合而成。基本立体有如下两类：

(1) 平面立体：立体的表面均为平面，如棱柱、棱锥等。

(2) 曲面立体：立体的表面主要由曲面组成。常见的有圆柱、圆锥、圆球、圆环等。

表 1-1 列出了四种基本立体的正投影图，并附有立体图。

表 1-1

平面 立 体	 三棱柱	 三棱锥
曲 面 立 体	 圆柱	 圆锥

§ 1-5 点的投影

为了进一步弄清正投影的规律，我们还需要从构成物体的最基本的几何元素——点谈起。

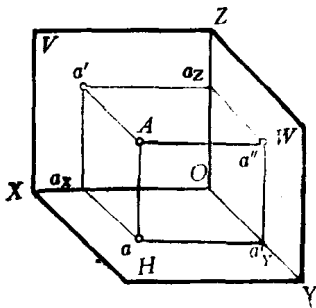
一、点的三个投影

1. 三个投影之间的位置关系

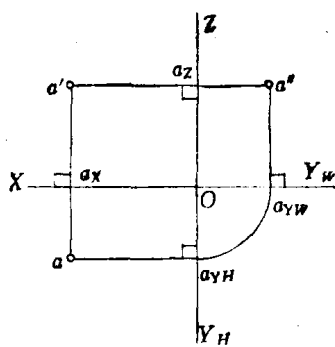
如图 1-22，空间一点 A ，它的 H 投影为 a ， V 投影为 a' ， W 投影为 a'' 。

由图 a 可见， Aa 和 Aa' 组成一平面，该平面与 V 面的交线为 $a'a_x$ ，与 H 面交线为 aa_x ，与 OX 轴交于 a_x 点。不难证明：

$$a'a_x \perp OX, aa_x \perp OX$$



(a) 点的投影



(b) 点的投影关系

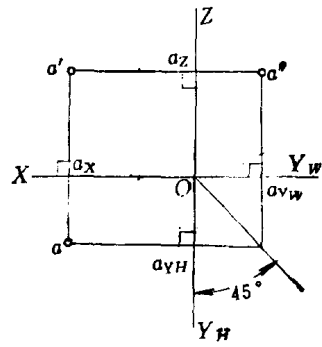
(c) 以45°辅助线联系 a , a''

图 1-22

所以在点 A 的投影图上 (图 b)， $a'a_x$ 和 aa_x 在同一条直线上，且 $a'a \perp OX$ 。亦即点 A 的 V 投影 a' 和 H 投影 a 应在一条垂直于 OX 轴的投影连线上。

同理 $a'a'' \perp OZ$ 。亦即点 A 的 V 投影 a' 和 W 投影 a'' 应在一条垂直于 OZ 轴的投影连线上。

此外，由图 a 还可证明 $aa_y \perp OY$ ， $a''a_y \perp OY$ 。但在投影图 (图 b) 上， Y 轴被拆成 Y_H 和 Y_W 两条线，点 a_y 也被拆成 a_{yH} 和 a_{yW} 两个点 (在空间 a_{yH} 和 a_{yW} 是一个点)。因此点 A 的 H 投影 a 和 W 投影 a'' 应有如下的投影关系： $aa_{yH} \perp OY_H$ ， $a''a_{yW} \perp OY_W$ ， $O_{a_{yH}} = O_{a_{yW}}$ 。为了能更直接地看到 a 和 a'' 之间的关系，经常用以 O 为圆心的圆弧把 a_{yH} 和 a_{yW} 联系起来 (图 b)，也可以自点 O 作 45° 的辅助线来实现 a 和 a'' 的联系 (如图 c)。

2. 点的投影和坐标的关系

确定空间点的位置需要三个坐标。如果以图 1-23 a 所示的三个投影面作为坐标面，三个投影轴作为坐标轴，则点 A 到 W 面的距离 Aa'' 称为横标 (X 标)，到 V 面的距离 Aa' 称为纵标 (Y 标)，到 H 面的距离 Aa 称为高标 (Z 标)。

用三个坐标确定点 A 可记为 $A(X, Y, Z)$ 。如 $A(30, 20, 40)$ 即为点 A 的横标 X 为 30，纵标 Y 为 20，高标 Z 为 40。

在图 1-23 a 中，因 Aaa_xa' 、 $Aa'a_z a''$ 、 $Aaa_y a''$ 均为矩形，所以可得：

● 任一点的三个投影都用同一小写字母表示。其中 H 投影不加撇， V 投影加一撇， W 投影加两撇。