

〔美〕 H. 克拉斯 J. 奥立格 著

依赖时间问题的近似解法

朱本仁 译

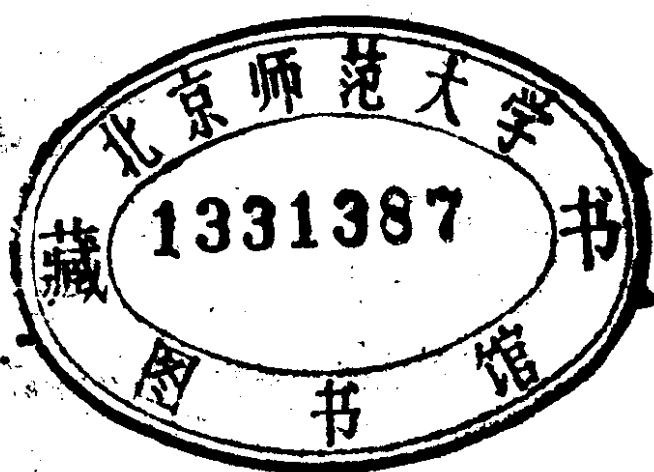
高等教育出版社

依赖时间问题的近似解法

〔美〕H. 克拉斯 J. 奥立格 著

朱本仁 译

341116/27



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据 H. Kreiss 和 J. Oliger 著《Methods for the Approximate Solution of time dependent problems》译出的。介绍了初值问题的差分逼近,特别是耗散格式,以及有关相容性、稳定性、收敛性等基本概念。还讨论了初-边值问题及边界条件的处理,以及在实际应用中常出现的非线性不稳定性。本书侧重于方法及应用,富有启发性。

本书可作为计算数学、应用数学及有关专业高年级学生的参考书或选修课教材,也可供计算数学及科技工作者参考。

依赖时间问题的近似解法

〔美〕H. 克拉斯 J. 奥立格 著

朱本仁 译

科学出版社出版

新华书店北京发行所发行

顺义小店印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 4.25 字数 101,000

1985 年 7 月第 1 版 1985 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,300

书号 13010·0948 定价 1.10 元

概 述

在全球大气研究计划(GARP)中,数值实验和模拟一直受重视并占据着核心的位置.这本专著讨论动力气象学和海洋学问题的近似方法.由于在这些领域里所用的许多方程组本质上具有双曲型的特点,所以我们将着重论述双曲型偏微分方程的近似解.

前六章讨论常微分方程的初值问题,引进稳定性和收敛性的概念,同时验证和分析了一些方法的计算效率.

第七章至第十四章讨论了偏微分方程的哥西问题,即初值问题.并行地论述了微分方程和它们的逼近方程的性质.分析了一些方法的计算效率.

第十五章至第十八章讨论了初-边值问题,概括论述了微分方程及其逼近的理论,同时给出一些应用实例.

在第十九章中,利用前几章所阐述的概念讨论了浅水方程.

第二十章讨论了有限差分网格和网格细分问题.

间断解问题在第二十一章中加以讨论.此处用到了在初-边值问题中阐述的理论.

引 言

在此专著中, 我们讨论求解依赖时间的微分方程近似解的各种方法, 注意力集中在气象动力学和海洋学中见到的依赖时间方程的常用方法, 所以我们讨论的重点是双曲型偏微分方程. 这些方法的发展一直与气象学和海洋学紧密相关. 探索这些问题的有效方法仍然是一个极为重要的问题. 这类研究课题在规模和复杂性方面在不断扩大和提高, 同时, 近年来数值模拟已经成为许多预报部门日常工作的工具. 因此处理更大规模的问题, 并且更经济、更迅速地解决这类问题的必要性是空前迫切了.

从研究模型方程入手, 我们引入了许多概念, 进行了一系列分析, 发现大多数计算上的困难是线性效应(linear effects), 但这些困难可以置于简单而有可能进行详细分析的情况下研究. 我们强调这种技巧的重要性. 对于大规模的非线性模型来说, 实际上, 通常不可能有一个充分而严密的分析. 计算上的困难易被错误地解释, 因而容易产生一种影响很大的误解, 这种误解能使未来的研究走向歧途. 这在过去确有许多先例. 这并不是说此种技巧没有固有的缺陷. 在选择模型方程和将结论推广到更复杂的情况时必须十分小心. 无论如何, 对于孤立并分析现象来说, 这是一种非常有价值的工具.

我们一直是并行地阐述微分方程及其逼近的理论. 这对发展逼近方程的有应用价值的理论是十分重要的. 不幸的是, 许多需要从微分方程理论方面引用的结论至今仍很难论证, 并且这种并行地发展这两方面理论的必要性常被人们所忽视.

第一章至第六章我们通过研究常微分方程的差分逼近引进了

稳定性和收敛性的概念。从计算效率的角度分析一些差分逼近。前六章是本书的观点、方法和概念的一个导论。当我们从较容易的问题推进到较困难的问题时，这类论述也一再地重复。

第七章至第十四章讨论哥西问题，即初值问题，这是与全球天气预报或气象问题有关的理论。线性方程哥西问题的理论基本上是完善了，且各种各样的逼近也比较容易分析、比较。在这些章节里我们从常系数线性微分方程进至变系数方程，最后进至非线性问题。我们的目标总是尽可能将复杂方程的分析化简至较简单方程的情况，从而使这种分析成为可能。

第十五章至第十八章讨论初-边值问题。这是与地球上有限局部区域海洋环流问题和天气预报有关的理论，这比前面的理论困难得多，并且只在近几年中趋于完善。同样，我们的研究也是从简单的问题到更复杂的问题。

在第十九章中，我们用以前各章中阐述的概念去讨论浅水方程。希望本章能对书中的原则在气象和海洋学方面的应用提供一些有益的例子。

第二十章讨论有限差分网格和网格细分问题。前面的章节讨论了解题要求，因而很自然地会想到在解不太光滑的区域中用较密网格的问题。我们讨论了一些情况，在这些情况下这个办法是可取的，并且用初-边值问题的理论来分析了它。

间断解的问题放在第二十一章中处理。这也出自于初-边值问题的理论。

对于大部分结果我们已经给出证明或证明的概要，但也放弃了一些结果的证明，因为它们需要冗长而复杂的论证。为此，我们提及有关的文献，同时给出许多例子，希望通过它们使理论及其应用更清楚。

我们的文献目录包括了各章节的一般参考著作和有关材料的

原始著作。在总的文献目录前我们还列出针对各章的文献清单。我们不追求文献目录的完备性，特别，想查阅有关的更完全的目录请注意里却特梅尔和莫登 (Richtmyer 和 Morton, 1967) 及索米 (Thomée, 1969) 的文章。

目 录

概述	1
引言	2
第一章 常微分方程的差分逼近	1
第二章 常微分方程的一些简单的差分逼近	5
第三章 截断误差和稳定性定义对误差估计的重要性	10
第四章 关于差分方法及其步长选择的若干注记	12
第五章 蛙跃格式	15
第六章 记号和基本定理	17
第七章 适定的哥西问题	21
第八章 哥西问题的稳定的差分逼近	31
第九章 双曲型方程组的差分逼近	38
第十章 关于差分格式的选择	44
第十一章 三角插值	49
第十二章 富里哀方法	54
第十三章 隐式差分方法	63
第十四章 非线性不稳定性	70
第十五章 双曲型方程的初-边值问题	76
第十六章 抛物型方程的初-边值问题	85
第十七章 初-边值问题的差分逼近和稳定性定义	87
第十八章 初-边值问题的差分逼近和一些稳定的方法	95
第十九章 浅水方程	98
第二十章 网格	103
第二十一章 间断	115
参考文献	120
文献目录	122

第一章 常微分方程的差分逼近

解偏微分方程初值问题的差分方法, 可以看作用差分方法求常微分方程组的数值解问题. 这种方程的许多有关性质可以用下列常系数纯量方程表现出来:

$$L_y \equiv dy/dt - \lambda y = ae^{\alpha t}, \quad y(0) = y_0. \quad (1.1)$$

为简明起见, 我们只考虑非共振的情况 $\alpha \neq \lambda$. 于是(1.1)的解为

$$y(t) = y_I(t) + y_H(t), \quad (1.2)$$

其中 $y_H(t) = [y_0 - \alpha(\alpha - \lambda)^{-1}]e^{\lambda t}$, $y_I(t) = \alpha(\alpha - \lambda)^{-1}e^{\alpha t}$.

通常, 我们称 $y_I(t)$ 为强迫解(forced solution), $y_H(t)$ 为暂态解(transient solution). 在我们所考虑的许多实际应用中, (1.1)的解关于时间始终是一致有界的. 所以, 我们假设

$$\text{Real } \lambda \leq 0 \quad \text{和} \quad \text{Real } \alpha \leq 0. \quad (1.3)$$

我们打算用多步法解上述问题. 为此, 引进一个时间步长 $k > 0$ 并且定义格点 t_ν 和格点函数 v_ν :

$$t_\nu = \nu k, \quad v_\nu = v(t_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

然后用下列方程逼近(1.1):

$$L_k v_\nu = \sum_{j=-1}^p \gamma_j v_{\nu-j} - \lambda k \sum_{j=-1}^p \beta_j v_{\nu-j} = k g_\nu, \quad (1.5)$$

此处 γ_j 是常数, $\beta_j = \beta_j(k)$ 可以与 k 有关, g_ν 是 $ae^{\alpha t_\nu}$ 的一种近似. 假定 $\gamma_{-1} \neq 0$, 所以对充分小的 k (1.5) 可以写成下列形式:

$$v_{\nu+1} = -(\gamma_{-1} - \lambda k \beta_{-1})^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^p \gamma_j v_{\nu-j} - \lambda k \sum_{j=0}^p \beta_j v_{\nu-j} - k g_\nu \right\},$$

这样, 如果 $p+1$ 个初值

$$v_0, \quad v_1, \quad \dots, \quad v_p \quad (1.6)$$

已经给定, 我们就能计算所有的 v_n , $n \geq p+1$. 微分方程的初值 $y(0) = y_0$ 给了我们一个值, 我们需要用特殊方法确定 $p > 0$ 的其余的值. 对此大体上有两种办法:

(1) 利用一种特殊的单步方法($p=0$ 的方法), 从 $v_0 = y(0)$ 出发计算 $v_1, v_2, \dots, v_p$. 此时必需注意不要破坏精确度. 我们将在以后讨论这一点.

(2) 从微分方程可知

$$dy/dt|_{t=0} = \lambda y(0) + a, \quad d^2y/dt^2|_{t=0} = \lambda^2 y(0) + \lambda a + a\alpha, \dots,$$

于是用泰勒展开式

$$\begin{aligned} y(\delta) &= y(0) + \delta y_{(0)}^{(1)} + \frac{\delta^2}{2!} y_{(0)}^{(2)} + \dots + \frac{\delta^r}{r!} y_{(0)}^{(r)} + O(\delta^{r+1}) \\ &= y(0) + \delta(\lambda y(0) + a) + \frac{\delta^2}{2!} (\lambda^2 y(0) + \lambda a + a\alpha) + \dots \\ &\quad + O(\delta^{r+1}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

只要选择 $\delta = jk$, $j=0, 1, 2, \dots, p$, 以 v_j 代替 $y(\delta)$, 并忽略 $O(\delta^{r+1})$ 项之后, 我们就能计算 v_j . 当然我们亦能从(1.7)出发构造一个特殊的单步法用以决定 $v_1, \dots, v_p$. 为此我们只需以 k 代替 δ , 以 v_{n+1} 代替 $y(\delta)$, 以 v_n 代替 $y(0)$, 以 $ae^{\alpha vk}$ 代替 a 并忽略 $O(\delta^{r+1}) = O(k^{r+1})$ 项. 这样我们就有

$$v_{n+1} = v_n + k(\lambda v_n + ae^{\alpha vk}) + \frac{k^2}{2} [\lambda^2 v_n + (\lambda + \alpha a) e^{\alpha vk}] + \dots \quad (1.8)$$

方程(1.7)和(1.8)具有同阶精度. 对这两种情况均有

$$|y(vk) - v_n| \leq ck^r \max_{0 < t < vk} |d^{r+1}y/dt^{r+1}| + O(k^{r+1}),$$

但对方法(1.8)最佳常数 c 通常要小些.

现在我们要给出差分逼近的稳定性定义. 为此考虑齐次差分方程(1.5):

$$L_k v = \sum_{j=-1}^p \gamma_j v_{n-j} - \lambda k \sum_{j=-1}^p \beta_j v_{n-j} = 0, \quad (1.9)$$

以及任何初值 $v_0, v_1, \dots, v_p$.

定义 1.1 如果存在与 k 和初值 $v_0, v_1, \dots, v_p$ 无关的常数 σ 和 K , 使得对 (1.9) 的解的估计

$$\|v_\nu\| \leq K e^{\sigma \nu k} \|v_p\|, \quad \|v_\nu\|^2 = \sum_{j=0}^p |v_{\nu-j}|^2, \quad (1.10)$$

对所有 $t = t_\nu \geq p\bar{k}$ 和充分小的 k 成立, 则称差分逼近 (1.5) 是稳定的.

设 $y(t)$ 是微分方程 (1.1) 的解, 将它代入差分方程并考察截断误差 s_ν :

$$L_k y_\nu - k g_\nu = \sum_{j=-1}^p \gamma_j y_{\nu-j} - \lambda k \sum_{j=-1}^p \beta_j y_{\nu-j} - k g_\nu = k s_\nu. \quad (1.11)$$

定义 1.2 如果在任何有限时间区间上存在一个一致有界的函数 $d(t)$ 和常数 c_j , 估计

$$|k s_\nu| = |L_k y_\nu - k g_\nu| \leq d(t_\nu) k^{q+1}, \quad t_\nu = \nu k, \quad (1.12)$$

$$|y_j - v_j| \leq c_j k^q, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p, \quad (1.13)$$

对一切 k 成立, 则称逼近 (1.5) 具有 q 阶精度, 如若 $q > 0$, 则称逼近 (1.5) 是相容的.

现在我们来叙述差分逼近理论中的主要定理 (G. Dahlquist, 1956).

定理 1.1 设 y 是微分方程的解, 对 (1.12) 成立; v 是差分逼近的解, 对 v 不等式 (1.10) 和 (1.13) 成立, 于是对所有 $t = t_\nu$ 有

$$\|y(t) - v(t)\| \leq K k^q \{ c \sqrt{(p+1)} e^{\sigma(t-pk)} + |(\gamma_{-1} - \lambda k \beta_{-1})^{-1}| \max_{0 \leq \tau \leq t} d(\tau) \cdot \psi(t, \sigma) \}, \quad (1.14)$$

其中

$$\psi(t, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{\sigma t}, & \text{当 } \sigma > 0, \\ t, & \text{当 } \sigma = 0, \\ \frac{k}{1 - e^{\sigma k}}, & \text{当 } \sigma < 0, \end{cases}$$

$$c = \max_j |c_j|.$$

由(1.14)即可断言,在任何有限区间 t 上,稳定性和相容性蕴含着收敛性. 注意,估计式(1.14)不仅对 $k \rightarrow 0$,而且对每一固定的 k 均有效. 这是很重要的,因为在实际计算中,人们并不关心渐近的误差估计,而是关心对计算中所用 k 的估计.

现在我们对估计(1.14)进行深入讨论. 一般说来,决定截断误差是不困难的,至少当我们所要求的解是光滑的时候是这样. 为此,将 y_{v-j} 展成泰勒级数

$$y_{v-j} = y_v - jk \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_v} + \frac{(jk)^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=t_v} + \dots,$$

从而(1.11)式的左端便展成 k 的幂级数,如若(1.12)成立,它将以 k^{q+1} 阶的项开头. 在我们所考虑的大部分应用中,微分方程的解及其导数始终保持一致有界,所以能用常数 d 代替(1.14)中的 $d(t)$. 此时只有当 $\sigma < 0$ 时对 $0 \leq t < \infty$ 有一致收敛性,同时若是强的阻尼,即 $|\operatorname{Re} \lambda|$ 很大,则式中的常数是小的. 如果 $\sigma = 0$,那么误差将随时间线性地增长,并经过足够长的时间后精度丧失殆尽. 当 $\sigma > 0$ 时,逼近只在相对小的时间区间上 useful. 并且即使减小 k 也没有多大帮助,除非是 $|\sigma| \leq \text{const} \cdot k$. 如果 $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$,只有 $\sigma \leq 0$ 的那些差分逼近才有效. 初值误差的影响由 $K k^q c \sqrt{(p+1)} e^{\sigma(t-pk)}$ 所决定. 因此,有必要设计一种特殊方法去计算初值,使其精度满足不等式(1.13),更进一步 c 必须与 d 有相同量级. 这里有一种例外,如果我们对暂态解不感兴趣,并且 $\sigma < 0$,于是初始误差的影响在充分长时间后将消失.

因为方程(1.9)的解可以明显地表示为 $v_v = \sum_j \lambda_j x_j^v$,其中 x_j 是下列特征方程的根:

$$\sum_{v=-1}^p (\gamma_v - \lambda k \beta_v) x^{p-v} = 0.$$

所以容易确定方程(1.9)的稳定性性质. 在下一章我们将给出这一过程的一些实例.

第二章 常微分方程的一些简单的差分逼近

本章要讨论四种求解微分方程(1.1)的简单的差分逼近, 即

$$v_{\nu+1} = (1 + \lambda k) v_{\nu} + k a e^{\alpha \nu k}, \quad (\text{欧拉法}) \quad (2.1)$$

$$(1 - \lambda k) v_{\nu+1} = v_{\nu} + k a e^{\alpha \nu(k+1)}, \quad (\text{后差法}) \quad (2.2)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \lambda k\right) v_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{2} \lambda k\right) v_{\nu} + k a e^{\alpha \left(\nu + \frac{1}{2}\right) k}, \quad (\text{中点法}) \quad (2.3)$$

$$v_{\nu+1} = v_{\nu-1} + 2 \lambda k v_{\nu} + 2 k a e^{\alpha \nu k}, \quad (\text{蛙跃法}) \quad (2.4)$$

(2.1) — (2.3) 的解由初值

$$v_0 = y_0 \quad (2.5)$$

唯一地确定. 对(2.4)我们还需给出 v_1 . 可以用泰勒展式获得

$$v_1 = y_0 + k dy/dt|_{t=0} = (1 + \lambda k) y_0 + \alpha k. \quad (2.6)$$

假定 $|\alpha k| \ll 1$, 即强迫解是光滑的. 现在来分析几种常见情况:

(1) 设 $|\lambda k| \ll 1$ 以及小积分区间的情况. 由定理 1.1 知这种情况是平凡的.

(2) 设 $|\lambda k| \ll 1$ 以及大积分区间的情况. 此时阻尼 ($|\operatorname{Re} \lambda|$) 的大小是十分重要的.

(3) 设 $|\lambda k| \sim O(1)$, 此时必须考虑两种情况:

(a) 设 $-\operatorname{Re} \lambda \gg 1$, 此时暂态解很快地衰减, 而强迫解是我们所关心的. 这是典型的控制问题.

(b) 设 $|\operatorname{Re} \lambda k| \ll 1$ (如 $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $|\operatorname{Im} \lambda k| \sim O(1)$), 此时暂态解 $y_H(t)$ 振动很剧烈. 而且, 人们也不注意 $y_H(t)$, 只要去计算强迫解.

现在从作用力函数为零 (即 $\alpha = 0$) 的情况开始来直接求解差分方程. 齐次方程(2.1) — (2.4) 的一般解是

$$v^{(1)} = \tau_1 \kappa_1'', \quad \kappa_1 = 1 + \lambda k = e^{\lambda k - \frac{1}{2} \lambda^2 k^2 + \dots}, \quad (2.1a)$$

$$v^{(2)} = \tau_2 \kappa_2'', \quad \kappa_2 = (1 - \lambda k)^{-1} = e^{\lambda k + \frac{1}{2} \lambda^2 k^2 + \dots}, \quad (2.2a)$$

$$v^{(3)} = \tau_3 \kappa_3'', \quad \kappa_3 = \left(1 + \frac{1}{2} \lambda k\right) \left(1 - \frac{1}{2} \lambda k\right)^{-1} = e^{\lambda k + \frac{1}{12} \lambda^3 k^3 + \dots}. \quad (2.3a)$$

方程(2.4)是一个两步方法, 因此其一般解可记为

$$v^{(4)} = \tau_4 \kappa_4'' + \tau_{41} \kappa_{41}'', \quad (2.4a)$$

其中 κ_4 和 κ_{41} 是特征方程

$$\kappa^2 - 1 - 2\lambda k \kappa = 0$$

的根, 即

$$\kappa_4 = \lambda k + \sqrt{1 + \lambda^2 k^2} = e^{\lambda k - \frac{1}{6} \lambda^3 k^3 + \dots},$$

$$\kappa_{41} = \lambda k - \sqrt{1 + \lambda^2 k^2} = -e^{-\lambda k + \frac{1}{6} \lambda^3 k^3 + \dots}.$$

现在我们必须决定常数 τ_j , $j=1, 2, 3, 4$ 和 τ_{41} 使 $v^{(j)}$ 满足初始条件(2.5)和(2.6) (当 $j \neq 4$). 从(2.5)式我们有

$$\tau_j = y_0, \quad j=1, 2, 3,$$

$$\tau_4 \text{ 和 } \tau_{41} \text{ 由 } y_0 = \tau_4 + \tau_{41}, \quad (1 + \lambda k) y_0 = \tau_4 \kappa_4 + \tau_{41} \kappa_{41}$$

所决定, 即是

$$\tau_4 = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 k^2 + \dots \quad \text{和} \quad \tau_{41} = 1/4 \lambda^2 k^2 + \dots.$$

求出这些差分方程的解后, 我们要将它们与微分方程的解 $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ 进行比较.

情况 1. 对 $t = t_n$ 有

$$|\tau_j \kappa_j'' - y_0 e^{\lambda t}| = |y_0| \cdot |e^{\lambda t}| \cdot \begin{cases} |1 - e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 k^2 t + O(k^3)t}|, & j=1, \\ |1 - e^{\frac{1}{2} \lambda^2 k^2 t + O(k^3)t}|, & j=2, \\ |1 - e^{-\frac{1}{12} \lambda^3 k^3 t + O(k^4)t}|, & j=3, \\ |1 - \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 k^2 + O(k^4)\right) e^{-\frac{1}{6} \lambda^3 k^3 t + O(k^4)t}|, & j=4. \end{cases} \quad (2.7)$$

此外

$$|\tau_{41} x_{41}^v| = \left| -\frac{1}{2} \lambda^2 k^2 + O(k^4) \right| \cdot \left| e^{-\lambda t + O(k^2)t} \right|. \quad (2.8)$$

所有的方法都是收敛的。对充分小的 k , 用中点法得到的解收敛最快, 其次是蛙跃法和改进的欧拉法。这些是二阶方法, 而其余的只是一阶方法。

情况 2. 微分方程的解是一致有界的, 所以一个有用的方法决不能有指数增长的解。(2.8)式意味着 $|x_{41}^v| \sim e^{|\operatorname{Re} \lambda| t_v}$, 于是, 如果 $\operatorname{Re} \lambda < 0$, 就不能用蛙跃格式, 参看达尔奎斯特(G. Dahlquist, 1956)的文章。后面我们还要说明如何改造这个方法, 使其解不增长。设 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, λ_j 是实数, $\lambda_1 \leq 0$ 。对欧拉法我们有

$$|x_1|^2 = 1 - 2|\lambda_1|k + k^2\lambda_1^2 + k^2\lambda_2^2,$$

所以 $|x_1| \leq 1$ 当且仅当 $k \leq 2|\lambda_1| / (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)$,

而且当 $\lambda_1 = 0$ 或 $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|^2$ 时此法是无用的。对后差法和中点法都有

$$|x_j| \leq 1, \quad j=2, 3. \quad (2.9)$$

当 $t=t_v$ 时我们由(2.7)式得到

$$|\tau_2 x_2^v - y_0 e^{\lambda t}| \sim |y_0| e^{-|\lambda_1|t} \left| 1 - e^{\frac{1}{2} \lambda_1 k t} \right|,$$

$$|\tau_3 x_3^v - y_0 e^{\lambda t}| \sim |y_0| e^{-|\lambda_1|t} \left| 1 - e^{-\frac{1}{12} \lambda_1 k^2 t} \right|.$$

若 $\lambda_1 = 0$, 则误差起始时线性地增长并且达到其极大值

$$|\tau_2 x_2^v - y_0 e^{\lambda t}| = |y_0|, \quad |\tau_3 x_3^v - y_0 e^{\lambda t}| = 2|y_0|.$$

情况 3. 对 $k\lambda_1 < -2$ 或 $|k\lambda_2| > 1$ 欧拉法肯定不能用, 因为 $|x_1| > 1$ 。同样道理, 对 $|k\lambda| > 1$ 蛙跃法无用。对后差法我们总有

$$|x_2| < 1 \quad \text{且} \quad \lim_{|k\lambda| \rightarrow \infty} |x_2| = 0. \quad (2.10)$$

所以 $v^{(2)}$ 衰减极快, 此法可用。由于它只是一阶方法, 因此只应用于短时间区间, 此后应转而用(至少)二阶精确的方法。对中点法我们有

$$|\kappa_3| \begin{cases} < 1, & \text{若 } \text{Real } \lambda < 0, \\ = 1, & \text{若 } \text{Real } \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{但} \quad \lim_{|k\lambda| \rightarrow \infty} \kappa_3 = -1, \quad (2.11)$$

于是 $v^{(3)}$ 可能衰减极慢。以后我们将讨论克服这个困难的方法。

这就结束了对齐次方程(2.1)—(2.4)的讨论。设 $a \neq 0$, 首先我们确定下面形式的强迫解:

$$w_\nu^{(j)} = \rho_j e^{\alpha \nu k}; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.12)$$

将(2.12)代入差分方程(2.1)—(2.4)后得

$$\rho_1 = \frac{ka}{e^{\alpha k} - (1 + \lambda k)} = \frac{a}{\alpha - \lambda} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2(\alpha - \lambda)} k + \dots \right), \quad (2.1b)$$

$$\rho_2 = \frac{k a e^{\alpha k}}{(1 - k\lambda) e^{\alpha k} - 1} = \frac{a}{\alpha - \lambda} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2(\alpha - \lambda)} k + \dots \right), \quad (2.2b)$$

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \frac{k a e^{\frac{1}{2} \alpha k}}{\left(1 - \frac{1}{2} k\lambda \right) e^{\alpha k} - \left(1 + \frac{1}{2} k\lambda \right)} \\ &= \frac{a}{\alpha - \lambda} \left[1 - \frac{\alpha^3 k^2}{8} \left(\frac{\frac{1}{3} \alpha - \lambda}{\alpha - \lambda} \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} \rho_4 &= \frac{2 k a e^{\alpha k}}{e^{2\alpha k} - 2\lambda k e^{\alpha k} - 1} = \frac{2 k a}{e^{\alpha k} - 2\lambda k - e^{-\alpha k}} \\ &= \frac{a}{\alpha - \lambda} \left(1 - \frac{\alpha^3}{\alpha - \lambda} \frac{k^2}{6} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.4b)$$

显然对四种情况都有

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sup_{0 \leq \nu < \infty} |y_I(t_\nu) - w_\nu^{(j)}| = \lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{a}{\alpha - \lambda} - \rho_j \right| = 0,$$

因而有关于时间的一致收敛性。如果我们除去共振频率 $\alpha = \lambda$ 的一个邻域 ($|\alpha - \lambda| \geq \delta > 0$), 则其收敛性与 λ 无关而仅依赖于 αk 。正如人们期望的那样, 后两种情况的收敛性 ($O(k^2)$) 要比前两种情况 ($O(k)$) 快得多。

我们的问题对前三种方法的完整解是形式

$$v_j = \tau_j \kappa_j'' + \rho_j e^{\alpha j k}, \quad j=1, 2, 3,$$

而对蛙跃法是

$$v_\nu = \tau_4 \kappa_4'' + \tau_{41} \kappa_{41}'' + \rho_4 e^{\alpha \nu k},$$

系数由 v_ν 所满足的初始条件(2.5)和(2.6)所确定. 这就导致下列方程:

$$\tau_j = y_0 - \rho_j, \quad j=1, 2, 3,$$

$$\tau_4 + \tau_{41} = y_0 - \rho_4, \quad \tau_4 \kappa_4 + \tau_{41} \kappa_{41} = (1 + \lambda k) y_0 + \alpha k - \rho_4 e^{\alpha k}.$$

所以

$$\tau_j = y_0 - \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} + O(k), \quad j=1, 2,$$

$$\tau_j = y_0 - \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} + O(k^2), \quad j=3, 4,$$

$$\tau_{41} = O(k^2).$$

因为 $\lim_{k \rightarrow 0} \rho_j = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda}$ 和当 $|\alpha - \lambda| > \delta$ 时关于 λ 一致的收敛性, 所以以上四种方法的收敛性态为 $\alpha = 0$ 的情况完全地刻划出来了. 从中我们得到最重要的结论是:

- (1) 若 $\text{Real } \lambda < 0$, 则我们有关于时间的一致收敛性.
- (2) 若 $\text{Real } \lambda = 0$, 则暂态解非但关于时间不一致收敛, 而且其精确度将被完全毁掉.
- (3) 强迫解总是一致收敛的.