

工程测试技术

刘金环 编著

兵器工业出版社

ND34/03

工程测试技术

刘金环 编著



397761

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书比较系统、全面地介绍工程测试技术中的三大部分内容。基础理论部分包括:信号分析,测试系统的基本特性,测量误差与数据处理;测试系统部分包括:传感器,中间变换电路,记录仪器和数据处理装置;参数测试部分包括:位移、速度、加速度、压力、和扭矩,温度、振动等参数的测试。

本书可作为机电工程专业测试技术教材,也可作参加机电一体化专业自学考试的考生参考教材;可供从事测试技术工作人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程测试技术/刘金环编著.-北京:兵器工业出版社,1998

ISBN 7-80132-382-3

I. 工… II. 刘… III. 工程测量 IV. TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 15189 号

工程测试技术

刘金环 编著

兵器工业出版社出版发行

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店总店科技发行所发行

各地新华书店经售

廊坊市汉印胶印厂

开本:787×1092 1/16 印张:10.7 字数:270千字

1998年1月第1版 1998年1月第一次印刷

印数:0001—1500 定价:16.80元

前 言

“工程测试技术”是高等院校机电类专业学生必须的一门技术基础课。本书是作者在总结多年来的教学和科研实践经验的基础上撰写的。

书中内容的选取主要根据国内外工程测试技术的发展,为适应现代化、自动化的需要并有利于培养学生的科学实践能力和开拓、创造精神,重点阐述了测试技术的基础理论、基本方法以及测试仪器的选用,并介绍了温度测试、振动测试。本书论述上力求简捷,从实践到理论,从教学逻辑到物理概念,简明易懂,重点突出,难点分散,以实例讨论引导学生和读者钻研。

为巩固所学知识,深化学习内容,各章都附有习题。

全书共分三部分内容,共十章,第一部分是测试技术的基本知识和基础理论,包括第一、二、三章,信号分析,测量误差与数据处理,测量系统的响应特性;第二部分是测试系统,包括第四、五、六、七、八章,位移、力、压力、扭矩、速度、加速度传感器,信号模拟转换电路,显示,记录装置;第三部分是参数测试,包括第九、十章,温度测试,振动测试。

本书由北京理工大学刘金环编著,并编写了第一、二、三、四、五、六、七章;北京理工大学田悦祥编写了第八、九、十章。

本书由华北工学院路宏年教授任主审,他对书稿提出了一些宝贵意见,谨致以衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中错误和不妥之处,恳请各位专家、读者批评指正。

编著者

1998.1 月于北京

目 录

第一章 信号分析	1
1.1 概述	1
1.2 信号的分类	1
1.3 信号的幅值描述	3
1.4 信号的相关描述	5
1.5 信号的频域描述	6
习题	17
第二章 测量误差与数据处理	19
2.1 误差基本概念.....	19
2.2 随机误差理论.....	20
2.3 间接测量误差的传递.....	26
2.4 系统误差.....	28
2.5 实验数据处理方法.....	32
2.6 一元线性与非线性回归.....	33
2.7 曲线拟合——一元非线性回归.....	36
习题	36
第三章 测量系统的响应特性	37
3.1 测量系统的组成.....	37
3.2 测量系统的静态特性.....	37
3.3 测量系统的动态特性.....	39
习题	46
第四章 位移传感器	48
4.1 参量型位移传感器.....	49
4.2 发电型位移传感器.....	62
4.3 大位移传感器.....	62
习题	68
第五章 力、压力、扭矩传感器	70
5.1 测力传感器.....	70
5.2 扭矩传感器.....	82
5.3 压力传感器.....	86
习题	92
第六章 速度、加速度传感器	94
6.1 速度传感器.....	94
6.2 加速度传感器.....	98
习题.....	101

第七章 信号模拟转换电路	102
7.1 电桥	102
7.2 滤波器	109
7.3 调幅、解调的测量电路.....	116
7.4 调频、解调的测量电路.....	119
7.5 数/模(D/A)和模/数(A/D)转路	121
习题.....	128
第八章 指示、记录装置	129
8.1 指针刻度仪表	129
8.2 笔式记录仪	130
8.3 磁带记录器	132
8.4 简单数字、符号显示装置.....	136
8.5 图象显示器	138
习题.....	139
第九章 温度测量	140
9.1 温度及温度标准	140
9.2 温度测量方法及仪器设置	141
9.3 热电阻温度计	143
9.4 热电偶	145
9.5 热辐射测温法	149
第十章 振动测试	155
10.1 概述.....	155
10.2 振动的类型.....	155
10.3 振动的激励.....	156
10.4 测振器.....	158
10.5 测振系统.....	160
10.6 机械阻抗的测试.....	163
10.7 信号分析在振动测试中的应用.....	164
习题.....	166
参考文献	167

第一章 信号分析

1.1 概述

信号是某一特定信息的载体,通过对信号分析,可以认识事物的内在规律或事物之间的相互关系。信号有静态信号与动态信号之分,静态信号是指其量值与时间无关的信号,如零件的尺寸信号;动态信号是指其量值随时间变化的信号,是时间 t 的函数,如一车汽车驾驶座振动速度和加速度信号

1.2 信号的分类

对各种不同信号,可以从不同角度进行分类。在动态测试中,将信号作为时间的函数来研究,按能否用明确的时间函数关系描述,可将信号分为确定性信号与非确定性信号(随机信号)。

1.2.1 确定性信号

能用明确的数学解析关系式或图表来描述的信号,如简谐波、方波、矩形波等信号,根据信号的特征,确定性信号又分为:

1. 周期信号

若信号依一定的时间间隔 T (周期)周而复始无始无终,则该信号称为周期信号,如图 1.2-1a)所示。它满足下列关系式

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.2-1)$$

式中 T ——周期信号的周期, s 。

其中最简单的周期信号是如图 9-1a)所示的正弦信号:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.2-2)$$

式中 A ——幅值;

ω ——角频率, $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

φ ——初相位,简称相位。

实际上周期信号往往不是仅含一个正(余)弦的简单周期信号,它们还具有取值周期重复性的特征,如图 1.2-1b)所示。

2. 非周期信号

非周期信号是指在时域内不按周期重复出现,但仍可用明确的数学关系式或图表来描述的信号,如图 1.2-1c)、d)所示。

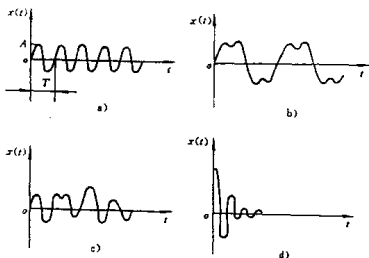


图 1.2-1 确定性信号

1.2.2 非确定性信号

非确定性信号时域波形是不确定的,无法用确切的数学关系式来描述,也不能准确预测它未来的结果,由于每次观测的结果均不相同,因此,只能用概率统计的方法来描述它的规律。

非确定性信号也称为随机信号,其单个时间历程,称为样本函数,记作 $x_i(t)$,全部样本函数集合 $\{x_N(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\} = X_N$ 称为随机过程,在有限时间内的样本函数,称为样本记录。

若随机过程统计特征参数不随时间变化,且可用一个样本函数 $x_i(t)$ 求出,则此信号称为平稳各态历经随机信号,对该类信号的描述,只需有一次观测记录 $x_i(t)$ 就可以,从而使信号分析大为简化,以后所讨论的信号,如果没有特别说明,均指平稳各态历经随机信号。

随机过程与样本函数见图 1.2-2 所示

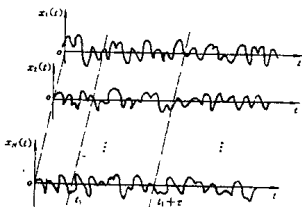


图 1.2-2 随机过程与样本函数

1.2.3 模拟信号与离散信号

1. 模拟信号

在某一自变量连续变化的时间间隔内,信号的幅值是连续的,如图 1.2-3a)所示。

2. 离散信号

自变量在某些不连续数值时,输出信号才具有确定值称为离散信号如图 1.2-3 b)所示。如果将其各离散点的幅值也作离散化,如以二进制的编码表示,则称为数字信号。

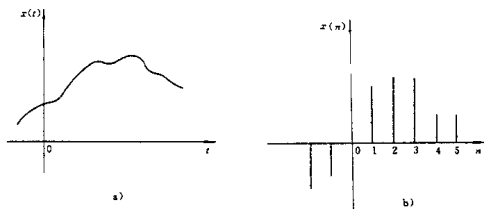


图 1.2-3 模拟信号与离散信号
a) 模拟信号 b) 离散信号

1.3 信号的幅值描述

动态信号本身是一个时间历程 $x(t)$ ，可以在时间坐标上以 t 为自变量，以其瞬时取值 $x(t)$ 的因变量来进行描述和分析，这就是常称的时域分析。时域分析中的重要内容之一就是対时间历程作狭义的或广义的统计分析。

1.3.1 信号的均值 μ_x

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.3-1)$$

均值 μ_x 是信号 $x(t)$ 在整个时间坐标积分的平均，它表示信号中常值分量或直流分量。由于在实际工作中，不可能作无限长时间的测试或观察，因此所得到的是对某个样本在足够长时间内的积分平均，称为均值估计，记作

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.3-2)$$

测试或观察时间 T 足够长情况下得到的 $\hat{\mu}_x$ 能够精确地逼近于真正的 μ_x 。

1.3.2 信号的方差 σ_x^2

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1.3-3)$$

方差 σ_x^2 是描述信号的波动范围的，其正平方根 $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ 称为信号的标准差。方差的估计值为

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1.3-4)$$

1.3.3 信号的均方值 Ψ_x^2

信号的均方值 Ψ_x^2 及它的估计值 $\hat{\Psi}_x^2$, 分别用下列两式表示

$$\Psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.3-5)$$

$$\hat{\Psi}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (1.3-6)$$

均方值 Ψ_x^2 是描述信号的强度, 表示信号的平均功率。

将 1.3-4 式展开为各项积分的和, 整理后可得

$$\Psi_x^2 = \sigma_x^2 - \mu_x^2 \quad (1.3-7)$$

式(1.3-7)是同一信号均值、均方值和方差的关系式。

1.3.4 信号的概率密度函数 $p(x)$

信号瞬时取值的规律也可用概率密度函数来描述。

图 1.3-1 所示的信号, 其概率密度函数为

$$p_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x \Delta x}{T_s} \quad (1.3-8)$$

式中 $T_s = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$ —— 在记录时间 T_s 内, 信号 $x(t)$ 的幅值落在 $(x, x + \Delta x)$ 区间的总时间

$\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ —— 在记录时间 T_s 内, 信号 $x(t)$ 的幅值落在 $(x, x + \Delta x)$ 区间的各段时间。

概率密度函数 $p(x)$ 描述了信号 $x(t)$ 对指定幅值的取值机会。常见典型信号的概率密度曲线如图 1.3-2 所示。

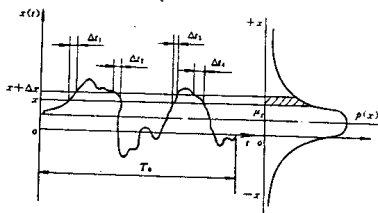


图 1.3-1 概率密度函数

名称	时间历程图	概率密度图
(1) 初相角随机变化的正弦信号		
(2) 正弦波加随机噪声信号		
(3) 窄带随机信号		
(4) 宽带随机信号		
(5) 白噪声信号		

图 1.3-2 五种信号的概率密度函数

1.4 信号的相关描述

信号的相关描述又称信号的时差描述。它的特点是在广义积分平均时,将信号作了恰当时延 τ ,从而反映信号取值的大小及先后的影响。

1.4.1 信号的自相关函数 $R_x(\tau)$

一个信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 定义为

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.4-1)$$

式中 τ ——时延(时差)量, $-\infty < \tau < \infty, s$ 。

作为估计,有

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.4-2)$$

自相关函数的性质:

(1) 当时延 $\tau=0$ 时,信号的自相关函数就是信号的均方值

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt = \Psi_x^2 \quad (1.4-3)$$

(2) $R_x(0) \geq R_x(\tau)$, 即在 $\tau=0$ 处取峰值。

(3) $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ 。证明略。

(4) 周期信号的自相关函数呈周期性。

$$\begin{aligned} R_x(\tau \pm nT) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t \pm nT)x(t \pm nT + \tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt = R_x(\tau) \end{aligned}$$

由上述分析可知,自相关函数描述了信号现在值与未来值之间的依赖关系,同时也反映了信号变化的强弱程度,是信号的基本统计特征之一。

1.4.2 信号的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$

信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数定义为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.4-4)$$

作为估计,有

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.4-5)$$

互相关函数的性质(证明略):

(1) $R_{xy}(\tau)$ 通常不在 $\tau=0$ 处取峰值,其峰值偏离原点的位置为 τ_x , 如图 1.4-1 所示。它反映了两信号相互有 τ_x 时移时,相关程度最高。

(2) $R_{xy}(\tau)$ 与 $R_{yx}(\tau)$ 是两个不同的函数。根据定义

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t+\tau)dt$$

不难证明

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

在图形上,两者对称于坐标纵轴,如图 1.4-2 所示

(3) 均值为零的两个统计独立的随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 其 $R_{xy}(\tau) = 0$

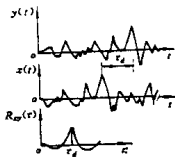


图 1.4-1 互相关函数

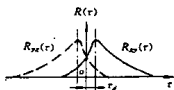


图 1.4-2 互相关函数的对称性

1.4.3 信号的互相关系数 $\rho_{xy}(\tau)$

由于信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 本身的取值大小直接影响了相关函数的大小,因而在比较不同的成对信号相关程度时,仅视其相关函数值大小是不确切的。一对弱信号虽然相关程度很高,但相关函数值很小;反之,一对强信号虽然相关程度很低,但相关函数值却很大。为了避免信号本身幅值对其相关程度度量的影响,引入一个无量纲的相关系数,其定义

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} \quad (1.4-6)$$

由于 $|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$, 故 $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$, 一般

$\rho_{xy}(\tau) = 1$ 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全相关;

$\rho_{xy}(\tau) = 0$ 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全不相关

$0 < |\rho_{xy}(\tau)| < 1$ 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 部分相关

同理,自相关系数

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (1.4-7)$$

反映了原信号 $x(t)$ 和时移后的原信号 $x(t+\tau)$ 之间的相关程度。

1.5 信号的频域描述

作为时间函数的信号,除了在时域上描述之外,从分析频率结构观点,在测试技术中,往往还采用频域的概念予以描述,傅里叶分析法就是以频域对信号进行描述的一种常用方法。

1.5.1 周期信号与离散频谱——傅里叶级数

1. 三角函数形式的傅里叶级数

在数学上,对任一在有限期间的周期函数 $x(t)$,凡满足狄里赫利条件者都可展成傅里叶级数,记作

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t] \quad (1.5-1)$$

式中 ω_0 ——周期信号的角频率,又称为基频, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$;

a_0, a_n, b_n ——傅里叶系数。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \quad (1.5-2)$$

傅里叶级数展开式(1.5-1)说明,任意一个周期信号 $x(t)$ 都可认为由两类基本信号组成。一类是以 a_0 描述的直流分量,一类是由许多正交的、幅值分别以 a_n 和 b_n 描述的、频率各为基频整数倍的余弦和正弦分量的迭加而组成见图 1.5-1。因此傅里叶级数表达了组成周期信号的分量的频率结构”。

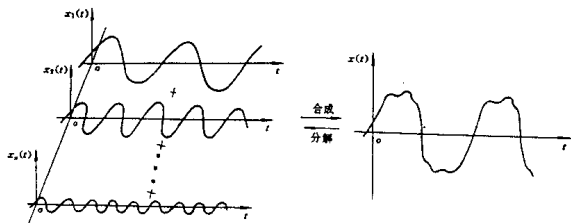


图 1.5-1 周期信号的合成与分析

应该注意,如果周期信号 $x(t)$ 为奇函数时, $a_n = 0, a_0 = 0$, 此时

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (1.5-3)$$

如果周期信号 $x(t)$ 为偶函数时, $b_n = 0$, 此时

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (1.5-4)$$

依据三角函数有关公式,正、余弦函数之和可以合并成一项,则式(1.5-4)可改写为

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1.5-5)$$

式中 $A_0 = a_0$ —— 直流分量;

$A_n = \sqrt{a_{1n}^2 + b_n^2}$ —— 谐波分量的幅值;

$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_{1n}}$ —— 各次谐波的初相位。

当 $n=1$ 时,称为一次谐波即基波,相应的频率是基频 $\omega=0$; $n=2, 3, \dots$ 时,依次称为二次谐波,三次谐波, ..., 相应的频率称为二次谐波,三次谐波, ...。

以角频率 $n\omega_0$ 为横坐标, A_n 和 φ_n 分别为纵坐标作图,如图 1.5-2。该图称为周期信号 $x(t)$ 的频谱图,简称频谱,图 1.5-2a) 表示信号 $x(t)$ 幅值与频率的对应关系,称为信号幅频图;图 1.5-2b) 表示信号相位与频率的对应关系,称信号的相频图。



图 1.5-2 频谱图
a) 幅频图 b) 相频图

例 1-1 求图 1.5-3 所示的周期方波信号的频谱

解 由图 1.5-3 可得

$$x = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{4} \\ A & \frac{3T}{4} \leq t \leq T \end{cases}$$

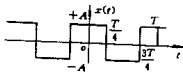


图 1.5-3 周期方波

因为该信号为偶函数,所以 $b_n=0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} A dt + \int_0^{\frac{T}{2}} (-A) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T A dt \right] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} A \cos n\omega_0 t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} (-A) \cos n\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3T}{4}}^T A \cos n\omega_0 t dt \right] = \frac{4A}{\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{当 } n=1 & a_1 = \frac{4A}{\pi} & n=2 & a_2 = 0 \\
 n=3 & a_3 = -\frac{4A}{3\pi} & n=4 & a_4 = 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{4A}{\pi} \left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t \dots \right] \\
 &= \frac{4A}{\pi} \left[\cos\omega_0 t + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t + \pi) + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t + \dots \right]
 \end{aligned}$$

由上式给出周期方波 $x(t)$ 的频谱图,如图

1.5-4 所示。

周期信号频谱的特点:

(1) 离散性:频谱谱线是离散的

(2) 收敛性:谐波幅值总的趋势是随谐波次数的增加而降低,即

$$A_n(n \rightarrow \infty) = 0$$

(3) 谐波性:谱线只出现在基频整数倍的频率处。

典型周期信号的傅里叶级数与频谱列于表

1.5-1

2. 复指数函数形式的傅里叶级数

傅里叶级数还可用复指数形式展开,根据欧拉公式

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})$$

$$\sin\omega t = j \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \quad (j = \sqrt{-1})$$

将式 1.5-1 改写为

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (1.5-6) \\
 &\quad (n=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

令

$$\left. \begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\
 X_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\
 X_0 &= a_0
 \end{aligned} \right\} \quad (1.5-7)$$

则有
$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [X_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + X_n e^{jn\omega_0 t}] \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.5-8)$$

或
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.5-9)$$

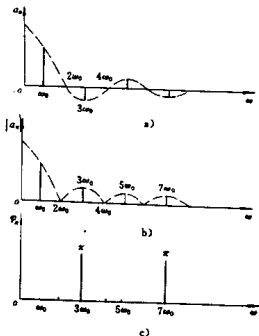
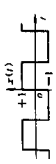
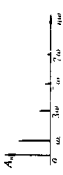
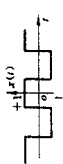
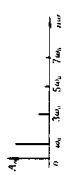
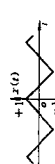
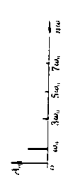
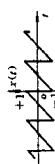
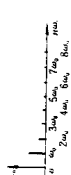

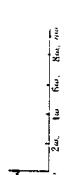


图 1.5-4 周期方波频谱图

a) 频谱图 b) 幅值谱 c) 相位谱

表 1.5-1 典型周期信号的傅里叶级数与频谱

信号名称	波 形	傅里叶级数展开式	幅 度 谱 图
周期对称方波 (奇函数)		$x(t) = \frac{1}{\pi} \left[\sin\omega_p t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_p t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_p t + \dots \right]$	
周期对称方波 (偶函数)		$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos\omega_p t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_p t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_p t - \dots \right]$	
周期三角波		$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos\omega_p t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_p t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_p t + \dots \right]$	
周期锯齿波		$x(t) = \frac{2}{\pi} \left[\dots \sin\omega_p t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_p t - \frac{1}{3} \sin 3\omega_p t - \dots \right]$	
周期全波整流 正弦波		$x(t) = \sin\omega_p t = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega_p t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_p t - \dots + \frac{1}{143} \cos 14\omega_p t + \dots \right]$	

其中

$$X_n = \frac{1}{T}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.5-10)$$

值得注意的是复指数形式的傅里叶级数展开式的各阶系数 X_n 是一个复数, 可用实部和虚部表示

$$X_n = \operatorname{Re}X_n + j\operatorname{Im}X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

所以 X_n 将周期信号所含谐波的幅值与相角都包含在内了, X_n 就是周期信号的频谱函数。它与三角级数展开表达式的关系如下:

$$a_0 = X_0$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}X_n$$

$$b_n = -2\operatorname{Im}X_n$$

$$A_n = 2|X_n|$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} = \arctan \frac{\operatorname{Im}X_n}{\operatorname{Re}X_n}$$

傅里叶级数三角函数展开式是以正(余)弦作为基本函数族, 而傅里叶指数表达形式是以 $e^{jn\omega_0 t}$ 作为基本函数族, 二者之间以欧拉公式为桥梁相互转换。在利用欧拉公式作转换时, 单项的正(余)弦信号变成复指数就成了两项, 而引入了 $-n\omega_0$ 项, 使频谱图变为双边谱, 见图 1.5-5 所示。

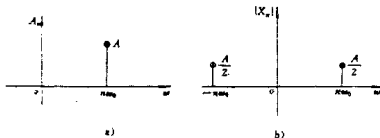


图 1.5-5 单边谱与双边谱

1.5.2 非周期信号与连续频谱——傅里叶变换

非周期信号是指在时域上不按周期重复出现, 但仍可用明确的数学解析关系表达其信号。非周期信号包括准周期信号和瞬态信号两种。

准周期信号的特点是谱线离散, 并无法确定其基频 ω_0 和谐频 $n\omega_0$, 只有频率分量幅值大小而没有共同周期。

瞬变非周期信号的时间函数为各种脉冲函数、衰减函数等, 如图 1.5-6 所示。瞬变信号也可以说是除准周期信号以外的一切可以用时间函数来描述的非周期信号。这里主要讨论瞬态信号及其频谱。

周期信号 $x(t)$ 当周期 T 趋于无穷大时就等价于瞬态信号。此时原周期信号离散谱图中的