

數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

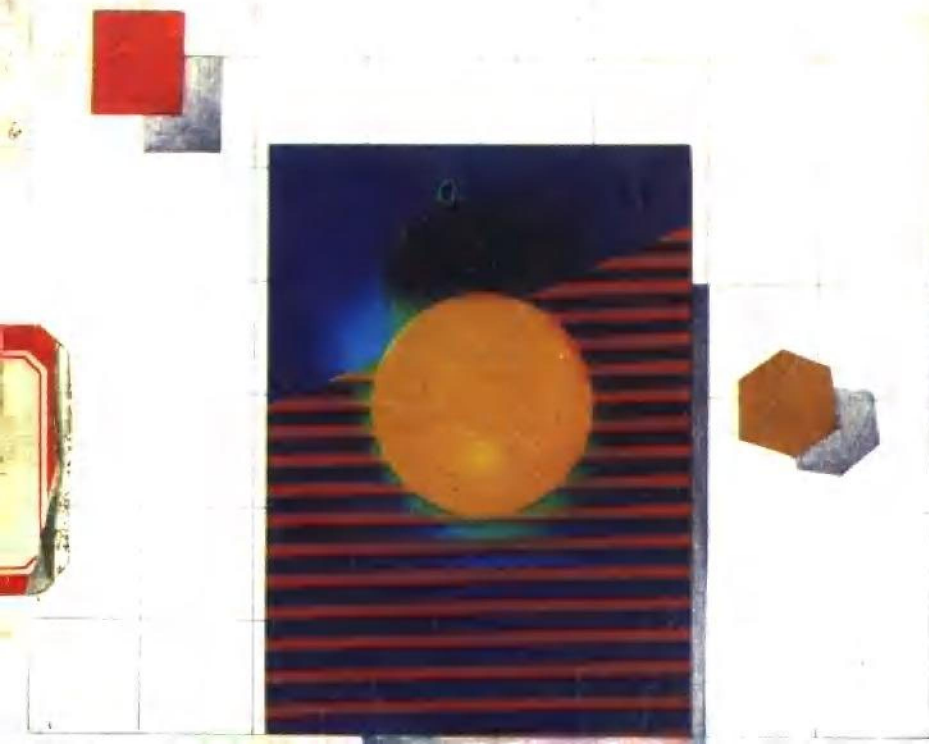
G. Cantor's Mathematics and Philosophy
of the Infinite

康托

的無窮的數學和哲學

【美】周·道本 著

鄭毓信 劉曉力 編譯



数学方法论丛书

康托的无穷的数学和哲学

〔美〕周·道本 著

郑毓信 刘晓力 编译

江苏教育出版社

1988·南京

GEORG CANTOR
His Mathematics and Philosophy
of the Infinite
Joseph Warren Dauben
HARVARD UNIVERSITY PRESS
Cambridge, Massachusetts
and London, England
1979

数学方法论丛书
康托的无穷的数学和哲学
〔美〕周·道本 著
郑毓信 刘晓力 编译

出版发行：江苏教育出版社
经 销：江苏省新华书店
印 刷：七二一四厂

开本850×1168毫米 1/32 印张5 字数107,750
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数1—2,700册

ISBN 7—5343—0862—3

G·761

定价：1.95元

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主 编：徐利治

副主编：朱梧槨 萧文强

编 委：（按姓氏笔画为序）

王兴华	王鸿钧	朱梧槨	刘凤璞
吴学谋	吴望名	欧阳绎	郑毓信
赵振威	徐利治	唐复苏	萧文强

出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔 (Descartes)、莱布尼兹 (Leibniz)、庞加莱 (Poincaré)、克莱因 (Klein)、希尔伯特 (Hilbert) 和阿达玛 (Hadamard) 等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚 (Polya) 为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定

程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

引 言

乔治·康托 (George Cantor, 1845~1918) —— 超穷集合论的创立者, 是数学史上最富于想象力, 也是最有争议的人物之一。19世纪末他所从事的关于连续性和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用和解释的传统, 从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责。德国数学家克隆内克 (Leopold Kronecker) 把康托看成科学的骗子、叛徒; 罗素 (Bertrand Russell) 则认为他是19世纪最伟大的学者之一; 希尔伯特 (David Hilbert) 认为康托为数学家建造了一个新乐园; 而其他一些人, 特别是庞加莱 (Henri Poincaré) 却认为集合论以及康托的超穷数理论代表数学发展史中一场“疾病”。超穷集合论的创立最终使数学家依据对于数学性质的一般观点, 以及对于无穷的特殊见解分裂成为敌对的阵营, 多少年里, 康托的名字就意味着论战和对立。

象历史上一切有争议的人物一样, 康托常常被误解, 不仅被同时代的人, 也被后来的传记作家和历史学家们误解, 特别是关于他的个性和精神分裂症更流传着一些神话。值得庆幸的是, 一些新发现的材料使得有可能以一种更为精确的方式对康托精神病症的性质及其影响重新作出评价, 并使之与他的经历和智力发展过程相一致。事实上, 狂郁症 (manic depression) 对于康托关于超穷集合论性质的解释始终有着十分重要的影响。

就上述的研究而言, 康托与其同时代的数学家之间的通信是特别重要的。尽管这些信件的底稿已大部流失, 但寄出的一些信件原稿还可在各种档案及私人收藏中找到。特别幸

运的是，在康托学术生涯的每一重要时期，都至少有一位数学家（通常只有一位）受到他的信赖，在与他们的通信中，康托对自己的工作作了详尽的介绍。

康托对于友谊的态度无疑可以从一个侧面反映他的个性。他对朋友的感情往往是强烈的，而相对来讲却又是短暂的。例如，尽管1870年初，来往信件表明许瓦尔兹（H. A. Schwarz）曾给予康托许多鼓励和帮助，甚至包括提供一些基本方法，康托曾成功地将此应用于三角级数的早期研究中。但他们的友谊却未能持久。从1872年至1879年间康托给狄特金（Dedekind）的信中，我们可以看出，狄特金堪称康托在那个时期的良师益友，但后来这种友谊却因为康托对狄特金拒绝接受哈勒（Halle）大学的位置感到不满而中止了。在此之后得到康托信任的是瑞典数学家米塔格-莱夫勒（Mittag-Leffler），他是最早对康托集合论发生兴趣的数学家之一，因为他发现康托的工作对于他自己的研究有着重要意义。作为《数学学报》（Acta Mathematica）的主编，米塔格-莱夫勒尽力帮助康托，并通过译文将康托的工作介绍到国外，这些对于超穷集合论的发展都是十分重要的。但即使如此重要的关系也未能维持长久。1887年，由于米塔格-莱夫勒认为时机不够成熟而建议康托不要发表他的关于序型的一般理论的文章，康托结束了两人之间的学术合作，并拒绝在《数学学报》上发表任何文章。康托最后一部重要著作《超穷数论的奠基性贡献》（Beiträge Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre）（以下简称《贡献》）是由数学家克莱因（Felix Klein）所发表的，他当时是《数学年鉴》（Mathematische Annalen）的主编。康托写给克莱因的信件，对于正确评价《贡献》发表前这一对于康托来说特别重要的时期中有关数学和哲学的发展是非常有价值

的。

至今，对康托生平和著作的研究大都未能超出阿道夫·弗兰克尔 (Adolf Fraenkel) 于1930年写的长篇悼念文章的范围。在这方面仅有两个重要的例外，笔者从他俩的工作中得益匪浅。

一是赫伯特·迈斯考夫斯基 (Herbert Meschkowski) 于1967年发表的《无穷问题：康托的一生》 (Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantor's)，这是自弗兰克尔以后关于康托生平和工作最深入的研究。另一个则是其后不久格拉顿-盖纳斯 (Ivor Grattan-Guinness) 关于康托一篇未为人知的手稿的发现及其《关于康托的一生》 (Towards a Biography of Georg Cantor) 的发表。

康托的头脑极富创造性，他那富于挑战性的思想对于现代数学史有着极其深刻的影响。事实上，任何对科学思想史有兴趣的人，都可把康托集合论的发展作为缩影来研究对科学具有重要意义的新思想的产生和发展问题。康托的工作在很多方面都是具有典型意义的，数学无穷的革命几乎是由他一个人在相当长的一个历史时期内独立完成的。对于他工作的反对不仅来自数学家，而且也来自哲学家和神学家，而这种反对最终又被全新的理论和新的研究领域所完全取代。

文艺复兴时期的思想家们由亚里士多德 (Aristotle) 学说的封闭宇宙前进到哥白尼 (N. Copernicus) 以后的无限丰富的世界是一次艰难的甚至是痛苦的转变，这对西方思想史的影响是极其深远的。康托集合论的发展，尽管发生在另一时间和空间，但两者却是十分相似的。那些致力于由封闭的数学王国走向无限广阔的数学世界的近代数学家们，虽说并没有遭遇到火刑的厄运，康托却同样经受了同时代人严厉

的审查和批判。

应当指出的是，尽管本书集中于康托的数学，特别是他的集合论和超穷数理论创立的背景、发生和发展的考察上，但这既不是一部传记，也不是某一思想的历史，这里并不打算只是列出一张关于人名、时间和数学定理的清单，而试图记录一个不平凡的智力活动的主脉，并在某种程度上作出一些心理动力学的分析，以此表明一个新理论如何产生，为什么会产生，它所面临的问题，以及最终为什么会演变成为科学理论体系的一部分。此外，本书也是对一位伟大数学家的赞颂，正是凭借他的丰富想象力，超穷集合论才得以创立，这位数学家就是：乔治·康托。

原作者的话

我愿在此向南京大学的郑毓信、内蒙古大学的刘晓力两位老师及江苏教育出版社的有关各位表示诚挚的谢意，正是由于他们的辛勤劳动，本书才得以与广大有兴趣于科学史和科学哲学的中国读者见面。

在此，我还愿意提及现在美国的两位中国朋友：纽约大学的苏时和麻省理工学院的徐甦。他们不仅热情地帮助我学习中文，而且使我在中国悠久的历史及其灿烂的文化等方面受到了很大的教益。对此特表示深切的谢意。

周·道本

(Joseph Dauben)

1988年1月于伦敦

目

录

原作者的话

引 言.....(1)

一 分析中的序曲.....(1)

二 康托集合论的起源.....(10)

三 可数和维数.....(24)

四 康托关于点集的早期理论.....(35)

五 康托《基础》中的数学.....(43)

六 康托的无穷的哲学.....(55)

七 从《基础》到《贡献》.....(70)

八 《贡献》的第 I 部分:

全序集的研究.....(84)

九 《贡献》的第 II 部分:

良序集的研究.....(97)

十 康托集合论的基础和哲学.....(109)

十一 悖论及集合论的进一步发展

.....(119)

十二 康托的个性.....(136)

编译后记.....(145)

一 分析中的序曲

乔治·康托所创立的超穷集合论是数学史上令人惊异的成就。康托最早的论文是1870年开始发表的关于三角级数方面的一系列文章,事实上,正是分析的基础激起了康托对点集的兴趣,并由此而发现了超穷数。集合论,至少部分是起源于黎曼(Riemann)等人对三角级数丰富的研究以及对不连续函数的分析。对这些函数的兴趣引导人们以一种十分自然的方式对于产生各种不连续情形的函数定义域之上的点集进行特殊的考察。

然而,康托并不是第一个在探索三角级数问题时引进例外点集的人。狄里克莱(Dirichlet)、黎曼、李普希兹(Lipschitz)和汉凯尔(Hankel)都写过这方面的论文,特别是对那些使函数不连续或收敛问题变得很困难的点的集合进行了研究。但只有康托在这一过程中系统发展了一般点集的理论,而且开拓了一个全新的数学研究领域。

1829年狄里克莱第一次在《克莱尔杂志》(Crelle's Journal)上发表了一篇关于傅立叶(Jeseph Fourier)级数的论文。傅立叶在他著名的关于级数的研究中,建立了“对任意给定的函数都可以用一具有特殊类型的系数的三角级数表示”的结果,这种级数被称为傅立叶级数。这一发现扩展了数学分析研究的视野,也产生了一系列需要解决的问题。继傅立叶之后,柯西(A.L. Cauchy)急于建立更严格的傅立叶级数理论,但狄里克莱对他的结果不大满意。

例如,柯西1823年发表了一篇文章,企图使用一种新方

法处理傅立叶级数,但狄里克莱发现,尽管柯西自认为他用于判别级数收敛性的方法是成功的,但是仍有许多论证是不充分的。如柯西曾用一个级数的项是递减的来证明该级数是收敛的,但狄里克莱认为这是不充分的。柯西还建立了用级数的第 n 项与量 $A \frac{\sin x}{n}$ (其中 A 是由函数的极值确定的常数) 的比来判定级数收敛性的方法,但狄里克莱指出这种方法对于交错级数不适用。交错级数的特性引导狄里克莱去研究条件收敛和绝对收敛问题,收敛的傅立叶级数未必绝对收敛,收敛可以有多种形式,而绝对收敛只是其中的一种形式——正如19世纪的数学家们认识到的。

为了建立傅立叶级数的收敛条件,狄里克莱从简单情形入手,对于 $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$, 设函数 $f(\beta)$ 在 $(0, h)$ 上连续且单调递减但又保持为正,考虑如下积分

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

通过假设 i 为正,他能够得出,对于 $0 < g < h \leq \frac{\pi}{2}$,

$$(1 \cdot 1) \quad \int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$$

当 i 趋于无穷时收敛到一个确定的极限;这个极限为0,除非 $g = 0$, 这时积分收敛到 $\frac{\pi}{2} f(0)$ 。

有了这一结果,狄里克莱进一步讨论在给定的范围内,表达任意函数的傅立叶级数的收敛性。

首先考虑

$$(1 \cdot 2) \quad \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\alpha) d\alpha \\ + \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{aligned} &\cos x \int \varphi(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha + \dots \\ &\sin x \int \varphi(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha + \dots \end{aligned} \right\}$$

写出狄里克莱部分和

$$\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) d\alpha \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos(2\alpha - 2x) + \dots \right. \\ \left. + \cos n(\alpha - x) \right]$$

其中心问题归结为当 n 无限增大时，积分

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) (\alpha - x)}{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - x)} d\alpha$$

的极限如何。引用 (1 · 1) 的结论，狄里克莱证明如上序列事实上是收敛的，而且对于 $(-\pi, \pi)$ 中所有 x 收敛到 $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x-\varepsilon)]$ ，而在端点处则取值 $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon) + \varphi(-\pi+\varepsilon)]$ 。

于是对于一个给定的函数，只要它是连续的，就完全可由它的傅立叶级数表示，端点可能除外，而在不连续点和端点 $(-\pi$ 和 $\pi)$ 处，函数仅当满足某些附加条件时才可由级数表示。

狄里克莱还给出了如下称为狄里克莱条件的结果：

如果函数 $\varphi(x)$ （假定对所有考虑的值，函数有穷或者是确定了的）在 $-\pi$ 到 π 范围内仅有有穷数目的不连续点，而且极大极小值的数目不超过一个确定的数值，则级数 (1 ·

2) (其系数是依赖于函数 $\varphi(x)$ 的定积分) 是收敛的, 且可表示为 $\frac{1}{2} [\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon)]$, 其中 ε 是无穷小。

尽管上述结果表明狄里克莱在一定程度上解决了三角级数的收敛性以及可表示性的充分条件, 但狄里克莱希望探讨级数的更一般的特性, 因为他对自己给出的限制条件不很满意。1837年他在一篇文章中解释说, 可以将函数 $f(\beta)$ 在积分限内连续、单调的条件放宽, 甚至也可允许函数有无穷间断。1853年在给高斯的一封信中他还指出如何可以允许函数的极大、极小值的数目超过有穷。在此过程中, 他引进了现今称为凝聚点和测度为零的集合, 狄里克莱希望这些奇点能如此分布以包含在长度可任意小的区间内。从这一思想出发, 是可以引出有价值的推广的。

除了三角级数的研究, 狄里克莱也同黎曼等人一样, 讨论了关于函数概念的定义, 但是他所处理的函数是带有较多限制的, 他从未给出严格的、一般的函数的定义。

就可表示性的条件而言, 除了“一般来讲连续”, 即函数仅有有穷多个间断点外, 狄里克莱在1829年的论文中还附加了一个条件, 即对于满足 $-\pi < a < b < \pi$ 的 a, b 来讲, 总存在 r 和 s , $a < r < s < b$, 使得 $\varphi(x)$ 在 (r, s) 上连续。正是由狄里克莱的条件出发, 黎曼开始了他自己关于三角级数的研究。

黎曼在他的一篇论文“Habilitationsschrift”中专门讨论了函数的三角级数表达问题。黎曼准备超出狄里克莱研究的函数范围, 扩展到更复杂、更有趣, 而且在纯粹分析中应用更为广泛的一类函数。狄里克莱曾描述过一个在定义域内所有有理点上连续的函数, 黎曼甚至能够用公式精确地表达类似的一个函数。黎曼感兴趣的是对狄里克莱关于函数的

三角级数表达问题的结果作进一步推广。他研究了可表达性的必要条件，还讨论了函数可积性的范围，他希望扩展可积函数的范围以使得可用三角级数表达的函数类即使不包括所有的不连续函数，也应包括其中的一大部分。如果函数总是有穷的，黎曼给出了可积性的充分必要条件，然后又推广这一结果，允许函数在某些孤立点上是无穷的情形。但对于函数有无穷多极大极小值的情形，黎曼没能解决可积性问题，他的工作是不彻底的。

对于三角级数的收敛问题，狄里克莱仅仅处理了傅立叶级数，黎曼则讨论了一般的三角级数。他所使用的方法的关键之点是引入一个辅助函数 $F(x)$ ，它成为收敛性和可表达性问题的研究重点。给定一个三角级数

$$(1.3) \quad \frac{1}{2}b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

对级数两次积分得出如下形式的黎曼函数：

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x \cdot x}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \dots$$

$$\text{其中 } A_0 = \frac{1}{2}b_0, \quad A_n = a_n \sin nx + b_n \cos nx.$$

为了建立可表达性的必要条件，黎曼给出三个引理：

引理 1：如果级数 (1.3) 收敛，并且如果 α 和 β 是同阶无穷小，则

$$\frac{F(x + \alpha + \beta) - F(x + \alpha - \beta) - F(x - \alpha + \beta) + F(x - \alpha - \beta)}{4\alpha\beta}$$

与级数收敛到同一值。

$$\text{引理 2:} \quad \frac{F(x + 2\alpha) + F(x - 2\alpha) - 2F(x)}{2\alpha}$$

当 α 趋于 0 时也趋于 0。