

01-3/1=3

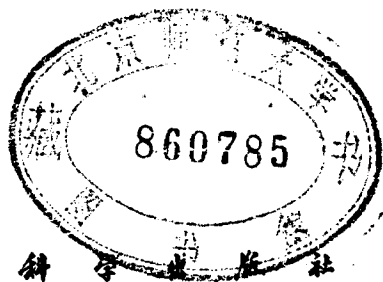
怎样解题

(美) G. 波利亚 著

阎育苏 译

张公绪 校

5011159/19



1982

译者序

教学的目的之一是培养学生具有分析问题与解决问题的能力,换言之,也就是培养学生具有能够独立思考进行创造性活动的能力。

为达到上述目标,除去进行必要的实验和安排适当的习题作业以外,更重要的是必须改进和提高教师的教学方法。教师在授课时,不仅要讲授课程内容,而且应该着重阐述分析问题与解决问题的一般规律和方法。

对于数学课程而言,国内外已经出版了大量的有关学习数学的著作和习题集,这些著作基本上只解决个别类型的问题,例如算术问题、几何问题、代数问题等等,但是很少涉及解题的一般方法。应该看到,学生熟悉了解答个别类型问题的特殊方法以后,有可能只限于掌握一种千篇一律的刻板方法,而不具备独立解决新问题的本领。

我们翻译的这本美国著名数学家波利亚(G. Polya)的世界名著《怎样解题》就弥补了这一空白。这本书给出了求解数学问题的一般方法,并且介绍了讲授解题的一些经验。

波利亚认为,学生除去必须掌握逻辑分析方法外,还必须掌握探索性思维能力。波利亚把他本人数十年的教学与科研经验集中具体地表现在他的“怎样解题”表上。在这张表中,

他按照逻辑思维的顺序和出现可能性大小的顺序搜集了一系列公式化了的指导性意见,提出的方式也十分灵活,有时用建议的口气,有时则用引导性问题的办法,尽量顺乎自然,使学生感到这些意见真是说到他们的心坎上了,这就是他们自己所要说的话。因此,从教育心理学上来看,这张表也是十分可取的。利用这张表教师可以行之有效地指导学生自学,发展学生独立思考和进行创造性活动的 ability。

波利亚强调“怎样解题”表具有常识性和普遍性。由于该表具有常识性,即来源于人们的一般常识,所以顺乎自然,能启发学生自发地提出这些建议或问题;由于具有普遍性,所以该表所提出的指导性意见不仅可用于数学学科而且可用于其他学科。译者本人就曾经尝试应用本书的方法讲授其他课程和指导学生自学,取得了良好的效果,这证实了波利亚的经验是可贵的。

本书内容以“怎样解题”表为中心,其他各部分基本上是配合这张表的,也可以说是对该表的进一步阐述和注释。本书的举例主要取自初等数学,其中仅有少量几个取自初等的解析几何与微分计算。

本书的对象正如作者序言中所提到的,是大、中学生,教师,科技工作者和所有有志于自学的人。这里,译者愿意强调,不仅是与学习数学有关的同志,就是从事其他专业的人也可以从本书中获益非浅。

原书出版后,不胫而走,许多国家竞相翻译,现已有许多文种的版本,它已成为一本世界名著。著名的现代数学家瓦

尔登早在 1952 年 2 月 2 日瑞士苏黎世大学的会议致词中就曾说过：“每个大学生、每个学者，特别是每个教师都应该读这本引人入胜的书”。对本书给予了高度的评价。

本书根据 1957 年第二版原版书进行了仔细校对。由于水平有限，其中不妥之处在所难免，诚挚地欢迎广大读者指正。

本书译稿曾由刘远图同志根据原文和对照俄译本对译稿做了仔细校订，并提出许多宝贵意见。在此表示衷心的感谢。

阎育苏

第一版序言

一个重大的发现可以解决一个重大的问题，但在求解任何问题的过程中，也都会有点滴的发现。你要求解的问题可能不大，但如果它能引起你的好奇心，如果它能使你的创造才能得以展现，而且，如果你是用自己的方法去解决它们的，那么，你就会体验到这种紧张心情，并享受到发现的喜悦。在易塑的青少年时期，这样的体验会使你养成善于思维的习惯，并在你心中留下深刻的印象，甚至会影响到你一生的性格。

因此，一个数学教师有着极大的机会。如果他分配给他的时间塞满了例行运算来训练他的学生，他就扼杀了学生的兴趣，妨碍了他们的智力发展，从而错用了他的机会。但是，如果他给他的学生以适合他们程度的问题去引起他们的好奇心，并且用一些吸引人的问题来帮助他们解题，他就会引起学生们对独立思考的兴趣并教给他们一些方法。

有的学生，在他的大学课程里包括某些数学教程，那么他就更有一个特殊的机会。当然，如果学生把数学看作必须得到多少学分的课程，而在期末考试之后立即置之脑后，那么这个机会也就丧失了。即便是这个学生在数学上具有某些天赋，这种机会也可能失去，因为他像任何人一样，必须首先发现自己的才能与爱好；如果他从来就没有尝过草莓饼，他不可

能知道他会喜欢草莓饼。然而他可以设法发现，数学问题可能像组字谜语一样有趣，而生气勃勃的思维活动可能像一局激烈的网球比赛一样令人向往。他尝到了数学的乐趣，就不容易忘记它。于是，数学很可能将成为他的一种业余爱好，或者他的工作中的一个工具，或者他的职业，或者他的崇高志向。

作者还记得自己的学生时代，那时他是一个有雄心的学生，渴望去弄懂数学和物理。他听课、读书，尝试去了解所提出的种种解答与事实，但有一个问题却一再使他感到困扰，这就是：“是的，这个解答好像还行，它看起来是正确的，但怎样才能想出这样的解答呢？是的，这个实验好像还行，它看起来是个事实，但别人是怎样发现这样的事实？而且我自己怎样才能想出或发现它们呢？”今天作者正在大学里讲授数学，他认为或者期望他的某些更热衷的学生会提出类似的问题，并且他试图去满足他们的好奇心，不仅试图去弄清楚这个或那个问题的解答，而且要了解这个解答的出发点与方法，并把这些向其他人加以阐述，于是终于导致他写出本书。作者希望这本书对于期望发展学生解题能力的教师以及渴望发展自己的能力学生都会有用。

虽然本书对于数学专业的教师与学生的要求给予了特殊的注意，但它也应该引起任何关心发明与发现的种种途径与方法的人们的兴趣。这种兴趣可能会比一个人所随意设想的要广泛得多。报纸与杂志上的组字谜与其他谜语所占的篇幅似乎表明了人们愿意在解决非实际的问题方面花费时间。在

求解这些与物质利益无关的问题的愿望背后，可能有一个更深切的好奇心，一个要求了解求解的种种途径与方法、出发点与程序的愿望。

虽然本书写得有些言简意赅，但却是对求解方法的长期认真研究为基础的。这类研究被某些作者称为探索法(heuristic)现在已经不时兴了，它有过很长的一段历史，并且也许还有某些未来。

通过研究解题的方法，我们可以看到数学的另一个侧面。是的，数学有两个侧面，它是欧几里得式的严谨科学，但它也是别的什么东西。用欧几里得方式提出来的数学看来像是一门系统的演绎科学；但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学。这两个侧面都像数学本身一样古老。但从某一点说来，第二个侧面则是新的，因为以前从来就没有“照本宣科”地把处于发现过程中的数学照原样提供给学生、或教师自己、或公众。

主题探索法和许多方面是有联系的。所以数学家、逻辑学家、心理学家、教育学家，甚至哲学家都可能要求把它的各个部分纳入他们的专业范围。作者清楚地知道，反对者可能会提出异议，并指出作者的局限性，但作者只有权声明：在解题方面以及在讲授各种水平的数学方面，作者可以提供一些经验。

1944年8月1日于斯丹佛大学

第二版序言

第二版除去有少量微小改进以外，还增加了第四部分：“问题、提示与答案”。

在本版即将付印之际，发表了一篇文章（教育测验服务，普林斯顿，纽泽西州；参见1956年6月18日泰晤士报），它列举了一些很中肯的意见（这些意见对于内行来说并不是什么新鲜内容，但是它向公众提出的时机却很合乎时宜）：“…数学在各个课程中是最不得人心的一门功课，其名声不佳，…。未来的教师通过初级学校学会讨厌数学…。他们返回初级学校又教育新一代讨厌数学。”

我希望为更广大读者所修订的本书第二版将能使某些读者相信：数学除了通向工程工作和科学知识的必由之路以外，还可能是一种乐趣并且可能开辟最高水平的智力活动前景。

1956年6月30日于苏黎世

“怎样解题”表

第一
你必须弄清问题。

弄清问题

未知数是什么？已知数据*是什么？
条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？

画张图。引入适当的符号。

把条件的各个部分分开。你能否把它们写下来？

拟定计划

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且

* 这里的已知数据 (data) 指已知数、已知图形和已知事项等的统称。以后则结合具体情况分别译成已知数或已知图形，或已知事项等。——译者注

**第二
找出已知数与未知数之间的联系。**

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。

你应该最终得出一个求解的计划。

早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第三
实行你的计划。

实现计划

实现你的求解计划, 检验每一步骤。
你能否清楚地看出这一步骤是正确的?
你能否证明这一步骤是正确的?

第四
验算所得到的
解。

回 顾

你能否检验这个论证? 你能否用别的方法导出这个结果? 你能不能一下子看出它来?
你能不能把这结果或方法用于其他的问题?

引 言

下面的讨论是围绕上述以“怎样解题”为标题的那张表进行的。从该表中摘出来的任何问题或提示都用楷体表示。

以下几页将讨论这张表的目的,举例说明它的实际用途,并且阐明基本概念与思维活动。作为一个初步说明,可以认为:只要应用得当,如果你向自己提出表中的这些问题与建议,它们可以帮助你解决你的问题;而如果你向你的学生提出同样的问题与建议,你就可以帮助解决他们的问题。

本书分成四部分。

第一部分的标题是“在教室中”。它包括 20 节。引用各节时将用数码字表示,例如,第 7 节等。而 1—5 节一般性地讨论该表的“目的”。6—17 节则说明这张表的“主要部分,主要问题”是什么,并讨论了第一个实例。第 18、19、20 节增加了“更多的例子”。

第二部分篇幅很小,标题是“怎样解题”。它以对话方式来写;一个有点理想化的教师回答一个有点理想化的学生提出的简短问题。

第三部分,同时也是最详尽的部分,它是一个“探索法小词典”——我们称它为“词典”。它包括 67 个题目。例如,“探索法”这个词的含义就可在 28 节该标题的下面找到。当在本

书中提到这样一段的标题时，将用黑体来表示。有少量题目的某些段落技术性较强，就用方括号把它们括起来。有些题目与第一部分有颇为密切的联系，它们对第一部分补充了进一步的说明和更专门的评论，其他一些阐述背景的专题则超越了第一部分的目标。现代探索法是个关键的题目。它说明了各主要题目与作为词典基础的方案之间的联系；同时它也指导读者怎样从表中找出关于某项具体内容的资料。由于词典中的题目从外表看来变化多端，所以必须强调其中有一个总计划和某种统一性。有几段较长的段落用来系统地、精练地讨论某些一般论题；其他一些则包含更专门性的评论，还有其他一些则包含相互引证，或历史资料，或引文，或格言，甚至笑话。

对词典这一部分不应当读得太快；它的内容通常是浓缩的，但时而也有精微之处。关于一些特定问题的资料，读者可以查本书的词典部分。如果这些特定问题来自他亲身的解题经验，或来自他自己学生的解题经验，则这样的阅读，受益就会更大。

第四部分的标题是“问题，提示，求解”。它向更有雄心的读者提出了一些问题。每个问题之后（在适当的篇幅之后）有一个“提示”，它可能揭示一种方法使之达到在“求解”部分所述的结果。

我们已经再三地提到“学生”和“教师”了，并且我们还将再三地提到他们。我们可以把这“学生”看成是个高中生或者是个大学生，或者是其他学习数学的某个人。同样，这“教师”

可以是一个高中教师或一个大学讲师，或任何对数学讲授法有兴趣的人。作者考虑问题有时从学生的观点，有时从教师的观点（在第一部分中，后者是主要的），但在大多数篇幅中（特别是在第三部分），观点既不是教师的，也不是学生的，而是急于解决手头问题的人的观点。

目 录

译者序	i
第一版序言	ix
第二版序言	xii
“怎样解题”表	xiii
引言	xv

第一部分 在教室中

目 的

1. 帮助学生	1
2. 问题、建议、思维活动	1
3. 普遍性	2
4. 常识	3
5. 教师与学生，模仿与实践	4

主要部分，主要问题

6. 四个阶段	5
7. 弄清问题	6
8. 例子	7
9. 拟定计划	8

10. 例子	10
11. 实现计划	12
12. 例子	14
13. 回顾	15
14. 例子	16
15. 不同的方法	19
16. 教师提问的方法	21
17. 好问题与坏问题	22

更多的例子

18. 一个作图题	23
19. 一个证明题	25
20. 一个速率问题	30

第二部分 怎样解题——一段对话

1. 熟悉问题	34
2. 深入理解问题	34
3. 探索有益的念头	35
4. 实现计划	36
5. 回顾	37

第三部分 探索法小词典

1. 类比	38
2. 辅助元素	46

3. 辅助问题.....	51
4. 波尔查诺 (Bolzano)	57
5. 好念头.....	58
6. 你能检验这结果吗?	59
7. 你能用不同方式导出这一结果吗?	61
8. 你能利用这个结果吗?	64
9. 实现.....	67
10. 条件	71
11. 矛盾*.....	72
12. 推论	72
13. 你能从已知数据导出某些有用的东西吗?	72
14. 你能重新叙述这个问题吗?*	74
15. 分解与重新组合	75
16. 定义	85
17. 笛卡尔	92
18. 决心,希望,成功	92
19. 诊断	94
20. 你是否利用了所有的已知数?	94
21. 你知道一个与此有关的问题吗?	97
22. 画张图*.....	98
23. 检验你的猜测	98
24. 图形	103
25. 普遍化	107
26. 你以前见过它吗?	109