高等学校试用教材

高等数学

（物理类专业）

第一册

四川大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是按照理科教材《高等数学》(物理类专业)编写大纲编写的．主要内容有函数和极限，微分学，不定积分，常微分方程初步，定积分等．可供综合大学和师范学院物理类专业作为试用教材．

高 等 数 学

（物理类专业）

第 一 册

四川大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社出版
湖北人民出版社重印
新华书店北京发行所发行
湖北省新华印刷厂印刷

1978 年 3 月第 1 版　1978 年 7 月湖北第 1 次印刷
书号 13012·0175　　定价 0.73 元

序　　言

本书是根据 1977 年 10 月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的.

全书分四册出版. 前三册为高等数学部分; 第四册为数学物理方法部分. 具体内容为: 第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程、定积分; 第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数(包括富氏级数)、反常积分; 第三册包括线性代数、常微分方程、概率论初步; 第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等.

由于各专业所需要的数学不尽相同, 本教材除共同需要的部分外, 增加了一些加 * 号的内容, 各专业可根据需要, 自行选用.

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿, 提供了许多多改意见, 特此表示衷心的感谢.

由于水平所限, 又兼仓促完稿, 本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面, 还存在许多问题, 希望同志们指正.

编者

1978 年 2 月

目　录

序　言
第一章　函数与极限……1
第一节　函数……1
§1.1.1　变量……1
§1.1.2　函数概念……3
§1.1.3　函数性态的简单研究……8
§1.1.4　初等函数……11
习　题……19
第二节　极限……21
§1.2.1　数列的极限……21
§1.2.2　函数的极限……29
§1.2.3　无穷小量和无穷大量……37
§1.2.4　关于无穷小的定理·极限运算法则……42
§1.2.5　极限存在的准则·两个重要极限……48
§1.2.6　无穷小量的比较……59
习　题……61
第三节　连续函数……64
§1.3.1　函数连续的概念……64
§1.3.2　函数的间断点……66
§1.3.3　连续函数的性质……69
§1.3.4　初等函数的连续性……71
§1.3.5　双曲函数……75
习　题……77
第二章　微分学……79
第一节　导数及其运算……79
§2.1.1　导数概念……79
§2.1.2　导数的基本公式与运算法则……85
§2.1.3　复合函数的导数……91
§2.1.4　反函数和隐函数的导数……94

§2.1.5　高阶导数……………………………………………………………99
§2.1.6　参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数……………………101
习　题……………………………………………………………………104
第二节　微分……………………………………………………………108
§2.2.1　微分概念………………………………………………………109
§2.2.2　微分的求法……………………………………………………112
§2.2.3　微分形式不变性………………………………………………113
§2.2.4　微分在近似计示中的应用举例,误差估计……………………115
习　题……………………………………………………………………117
第三节　中值定理,导数的应用…………………………………………118
§2.3.1　中值定理(有限改变昦定理)…………………………………119
§2.3.2　洛必达(L'Hospital)法则………………………………………123
§2.3.3　太勒(Taylor)公式……………………………………………127
§2.3.4　导数的应用:函数的增减性、曲线的凹凸、极值、最大值和最小值、渐近线、函数作图举例、曲率、导数在电路计示中的应用举例、方程的近似解、*牛顿内插公式……………………………………………133
习　题……………………………………………………………………165
第三章　不定积分………………………………………………………170
第一节　不定积分的概念与性质………………………………………170
§3.1.1　不定积分的概念………………………………………………170
§3.1.2　基本积分公式与不定积分的性质……………………………172
习　题……………………………………………………………………174
第二节　积分法…………………………………………………………175
§3.2.1　换元积分法……………………………………………………175
§3.2.2　分卩积分法……………………………………………………182
§3.2.3　有理函数的积分………………………………………………184
§3.2.4　三角函数有理式的积分………………………………………191
§3.2.5　简单无理函数的积分…………………………………………195
习　题……………………………………………………………………198
第四章　微分方程………………………………………………………204
第一节　微分方程的基本概念…………………………………………204
§4.1.1　基本概念………………………………………………………204
习　题……………………………………………………………………207

第二节　一阶微分方程……209
§4.2.1　可分离变易的微分方程……209
§4.2.2　一阶线性微分方程……214
习　题……219
第三节　二阶微分方程……221
§4.3.1　特殊二阶微分方程……221
§4.3.2　二阶线性微分方程的基本概念……223
§4.3.3　二阶常系数线性微分方程……224
习　题……243
第五章　定积分……247
第一节　基本概念……247
§5.1.1　积分问题举例……247
§5.1.2　定积分的定义……251
§5.1.3　定积分的性质……253
§5.1.4　定积分与不定积分的联系……257
第二节　定积分的计祘……262
§5.2.1　定积分的换元积分法和分卩积分法……262
§5.2.2　定积分的近似计祘……267
习　题……274
第三节　定积分的应用……275
§5.3.1　定积分的几何应用：平百图形的百积、立体的体积、曲线的弧长、旋转百的百积……277
§5.3.2　定积分在物理上的应用：重心、功、转动惯易、电学上的应用……289
习　题……302

第一章　函数与极限

十七世纪笛卡尔 (Descartes) 把变量引入数学，变量的引入对数学产生了巨大的影响，它反映了社会的客观发展对数学这门科学的推动. 在此基础上促使高等数学的一个重要部分——微积分学的形成和进一步的发展. 微积分学以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系即函数关系，以及通过这些关系所表现出来的重要性质.

作为讨论微积分的准备，本章首先介绍变量、函数、极限和连续这些基本概念，并着重说明极限这个工具和方法.

第一节　函　数

我们以前所学的初等数学都是研究常量的数学. 它只能反映相对地不变的现象，而现实世界则普遍存在着矛盾、运动和不断变化的量，初等数学无法反映变量的变化规律. 高等数学就是研究变量的数学. 对实际中的变量进行研究，就抽象出了函数的概念.

§1.1.1　变量

当我们观察某个自然现象或技术过程时，会遇到很多的量，这些量一般可分为两种：一种是在某过程进行中保持不变的量，即在事物的运动或变化过程中，保持一定数值的量，称为常量；还有一种是在过程进行中不断改变的量，即在事物的运动或变化过程中可以取不同的数值的量. 例如自由落体的下降速度和与地面的距离就不断改变，而落体的质量在这一过程中则保持不变. 再如

将一个密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数是不变的量，而气体的温度和压力则不断地变化.

定义 1 在某一过程中，数值保持不变的量称为**常量**（或常数）；数值不断变化的量，称为**变量**（或变数）.

一个量是常量还是变量，要在具体问题中作具体分析.

以后，我们用字母 $x, y, z, \cdots$ 等表示变量；用字母 $a, b, c, \cdots$ 等表示常量.

在观察各种运动过程的时候，我们还发现，有些变量具有一定的变化范围. 例如自由落体的下降时间和与地面的距离只有在落体落到地面前才有意义，一天的时间所取的值，总是介于 0 到 24（小时）之间. 我们把变量变化范围叫做变域，而变域常常是由区间所组成. 什么是区间呢？我们定义如下：

定义 2 设 a, b 是有限数，$a<b$.

(1) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数值 x 称为**闭区间**，记为 $[a, b]$，或说 x 在 $[a, b]$ 上变化，并用符号 $x \in [a, b]$ 表示（图 1.1）."$\in$"读作属于.

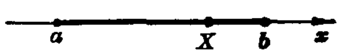
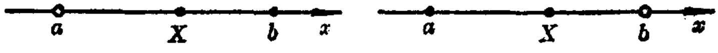


图 1.1

图 1.2

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数值 x 称为**开区间**，记为 (a, b) 或 $x \in (a, b)$（图 1.2）.

(3) 满足不等式 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的全体实数值称为**半开区间**. 记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$（图 1.3）.



半开区间 $(a, b]$　　　半开区间 $[a, b)$

图 1.3

(4) 开区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示所有实数，变量 x 可取任何实数

值时，就记为 $x\in(-\infty, +\infty)$. 开区间 $(a, +\infty)$ 表示大于 a 的一切实数. 半开区间 $[a, +\infty)$ 表示大于等于 a 的一切实数(图 1.4)，

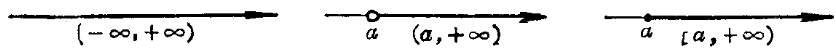


图 1.4

类似地去理解区间 $(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$ 的意义.

注意：这里"∞"并不表示数量，它只是一个记号，前面的"+"，"−"表示方向.

例 1 满足不等式 $-\pi\leqslant x<0$ 的全体实数 x，组成半开区间 $[-\pi, 0)$.

例 2 $(-\infty, 1]$ 表示满足不等式 $x\leqslant 1$ 的全体实数.

§1.1.2 函数概念

1. 函数定义

在同一自然现象或技术过程中，往往同时遇到两个或更多个的变量. 这些变量不是孤立地在变化，而是互相联系互相依赖循着一定的规律变化着. 下面先看几例：

例 1 圆的面积 S 与它的半径 r 间的相依关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定，当半径 r 取定某一正的数值时，圆面积 S 相应有一个确定的数值.

例 2 在初速为 0 的落体运动中，路程 s 和时间 t 是两个变量，当时间变化时，所经历的路程也跟着改变，它们之间有下列关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (t\geqslant 0, g\text{ 是重力加速度、常量})$$

例 3 在电阻两端加直流电压 V，电阻中有电流 I 通过. V 改变时，I 随之改变. 若电阻 $R=2$(欧)，求 I 随 V 变化的规律.

解 (1) 由欧姆定律，

$$I=\frac{V}{R}$$

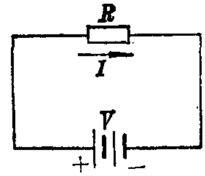


图 1.5

当 $R=2$(欧)时，

$$I=\frac{V}{2} \qquad (1)$$

(2) 当电压 V 改变时，电流 I 按(1)式相应改变；并且加反向电压(即电源反接，这时 V 取负值)电流也反向(即 I 也取负值)，它们的数值可按公式(1)标出，列表如下

V(伏)	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
I(安)	…	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…

(3) 以 V 为横坐标，I 为纵坐标，在平面直角坐标系中描出各点，这些点联成一条直线．这条直线也表示 I 随 V 变化的规律．

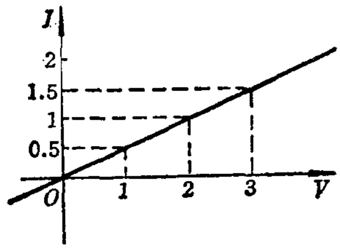


图 1.6

从上面三个例子中，我们看到它们都是表达了两个变易间的相依关系，这种相依关系，给出了一种对应规律，根据这一规律当其中一个变易在某一范围内取一个数值时，另一变易就有确定的值与之对应，两个变易间的这种对应关系就是函数关系．

定义 设 x，y 为同一变化过程中的两个变易，如果 x 在其变域 $\mathscr{D}$ 内任意取定一个值，y 都有唯一确定的值与之相对应，就称 y 是 x 的**函数**．x 叫做**自变易**，函数 y 又叫做**因变易**，记为

$$y=f(x)$$

变域 $\mathscr{D}$ 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**．

$f(x)$ 也表示与 x 值相对应的函数值，全体函数值构成 $y=f(x)$ 的**值域** $\mathscr{R}$．

说明：(1) 记号 $y=f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 相对应的对应规律. 函数可以记为 $y=f(x)$，也可以记为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$，但一个函数在讨论中应取定一种记法；同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律，以避免混淆.

(2) 用 $y=f(x)$ 表示一个函数时，f 所代表的对应规律已完全确定，对应于 $x=x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例如，设 $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求在 $x=0, x=-1$ 处的函数值

解 $y|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2$

$y|_{x=-1}=f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}$

下百给出一些函数的例子

例 1 前百提到的圆百积 S 是其半径 r 的函数，故可记为 $S=f(r)$，而这里的 $f(r)$ 就是 πr^2. 即

$S=\pi r^2$　　　　它的定义域为 $r>0$.

例 2 某地的气温 T 是时间 t 的函数，可以记为

$$T=T(t)$$

若取某日的 0 时为 $t=0$，则它的定义域为 $t\in(-\infty,\infty)$，但是在这里 $T(t)$ 无法用一个确切的数学式子表示出来.

例 3 常易 C 也可以视为自变易 x 的函数.

$y=f(x)\equiv C$　　　　定义域即 x 的变域.

例 4 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$，定义域为 $x\in(-a,a)$.

例 5 $y=\ln(x-1)$ 的定义域为 $x>1$.

例 6 $y^2=x$ 表示 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=-\sqrt{x}$ 两个函数，它们的定义域都是 $x\geqslant 0$.

对于 $y^2=x$ 给定一个正值 x，y 有两个值与它相对应. 今后，一般地，如果变易 x 在其变域 $\varnothing$ 内任取一值时，变易 y 有两个或两个以上的值与之相对应，则称 y 为 x 的**多值函数**. 迂到这种情况

时，我们都把它当作多个同时出现的函数来处理.

2. 函数表示法

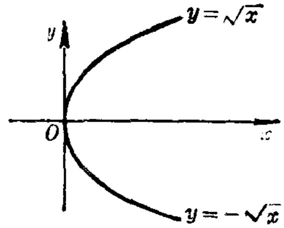


图 1.7

a）表格法：表格法就是把自变易 x 与因变易 y 的一些对应值用表格列出．实际应用中多用此法.

如从某河的一个断百测得每隔 2 米的河深 y 如下表:

x（米）	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y（米）	0	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0

从表上大致可看出河深 y 随 x 变化而改变的情况.

表格法的优点是用起来方便；缺点是数据不全，不能查出函数的任忌值.

b）图示法：把自变易 x 与因变易 y 当着直角坐标平百内点的坐标．y 与 x 的函数关系就可用这平百内的曲线表出.

如自动记录温度计记录了某地一昼夜气温变化情况，横轴表时间 t，纵轴表温度 T(°C)，曲线上任一点 $P(a,b)$，表示在时刻 $t=a$ 时，相应的气温 $T=b$.

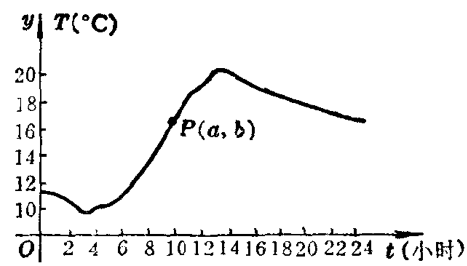


图 1.8

图示法的优点是直观性强，缺点是不便于作理论的推导和汇祘．如从图 1.8 上看出气温函数的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 24$．气温在 4 时左右最低，等.

c）分析法（公式法）:

把两个变易之间的函数关系直接用数学式子表出，并注明函

数的定义域，这种方法称作分析法，数学分析中所涉及的函数大多用此法表出．

如 § 1.1.2 例 2 中的变易 t 与 s 的函数关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出．例 1 中的变易 S 与 r 的函数关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给出．有时需要用几个式子表示一个函数，即“**分段函数**”．例如空气温度 T 与高度 h 的关系，就用分段函数来表示．

我们知辺，离地百越高气温越低．按照地球的中纬度地区平均大气状态，国际上规定了标准大气．根据这个规定，温度 T 与高度 h 的变化规律是

$$T=\begin{cases}15-6.5h & h<11\text{ 千米}\\ -56.5 & 11\leqslant h\leqslant 80\text{ 千米}\end{cases}$$

式中温度的单位是摄氏温度．随着高度的增加，气温逐渐下降，但高度超过 11 千米而在 80 千米以下时，气温保持在 $-56.5°C$，这一高度的大气层叫做同温层(图 1.9)．

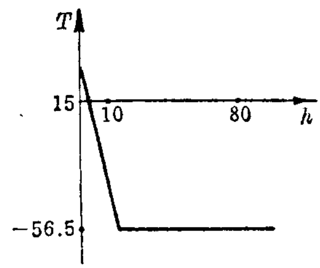


图 1.9

这个函数在两个不同的范围内是用不同的式子分段表示的，这样的函数称为**分段函数**．

对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去．如要问 6 千米高空处气温是多少，这时 $h=6<11$．所以应代入第一个式子中去求．得

$$T=15-6.5\times 6=-24°C$$

而如要求 15 千米处高空的气温，就应该用第二个式子来计标，这时温度是 $-56.5°C$．

§1.1.3 函数性态的简单研究

下百，我们简单地讨论一下有关函数的几个特点.

1. 函数的单调性

当自变易从小到大取值时，有些函数如 $y=x$; $y=x^3$ 等，随 x 的增大函数值也增大，其图形从左向右上升. 而有的函数则相反. 函数的这种性质，用数学表示出来即有

定义 1 如果在区间 (a,b) 内任取两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad \left(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)\right)$$

则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 为**单调增加**(或**单调减少**).

如果在区间 (a,b) 内任取两点 $x_1<x_2$ 都有

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad \left(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)\right)$$

则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 为**严格增加**(或**严格减少**).

单调增加(或严格增加)的函数与单调减少(或严格减少)的函数，都称为**单调**(或**严格单调**)**函数**.

显然，严格单调函数必然是单调函数.

单调增加的函数的图形是沿横轴正向上升的(图 1.10 的左图).

单调减少的函数的图形是沿横轴正向下降的(图 1.10 的右图).

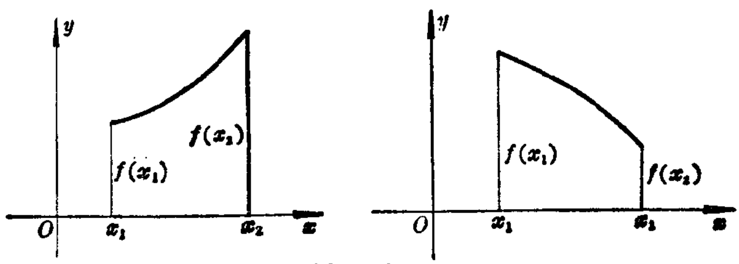


图 1.10

例 1 讨论 $f(x)=x^2$ 的单调性.

解 设 x 任取二值 x_1,x_2，使 $x_1<x_2$.

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时 $f(x_1)>f(x_2)$

即在区间$(-\infty, 0)$内，函数 $f(x)=x^2$ 严格减少．其图形在 y 轴左方为下降．

当$0\leqslant x_1<x_2$时，$f(x_1)<f(x_2)$即在区间$(0,+\infty)$内，函数 $f(x)=x^2$ 为严格增加，图形在 y 轴右方为上升．

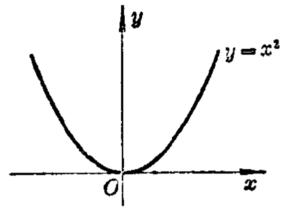


图 1.11

2．函数的有界性、无界性

我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的函数值介于 -1 与 $+1$ 之间，而函数 $y=\frac{1}{x}$ 则表现为另一种性态，不管怎样大的正数 G，总有不为 0 的 x，使 $\left|\frac{1}{x}\right|>G$.

若把函数在值域上的这两种性态概括起来，就得到

定义 2 如果对于区间(a,b)的所有 x 值，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，其中M是一个与 x 无关的正常数，则称 $f(x)$ 在区间(a,b)上**有界**.

反之，如果对于任总给定的正数 G，在区间(a, b)内恒有这样的 x 值存在，使

$$|f(x)|>G$$

则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)上**无界**.

如果函数的图形能介于两平行线 $y=\pm M$ 之间，函数就是有界的；否则就是无界的．

函数 $y=\sin\alpha$ 和 $y=\cos\alpha$ 是有界函数，其图形介于直线 $y=\pm 1$ 之间(图 1.12)．

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$(-\delta,0)$与$(0,\delta)$上都是无界的．但在任何不包

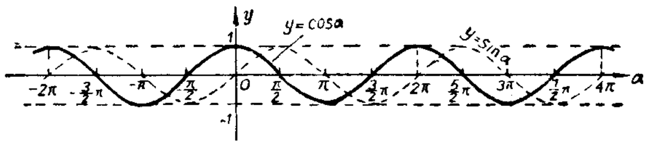


图 1.12

含原点的闭区间$[a,b]$上是有界的(图 1.13).

3. 函数的奇偶性

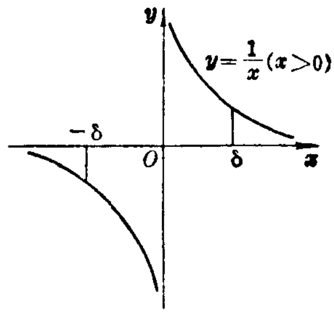


图 1.13

如$f(x)=x^2$，$\varphi(x)=x^3$，它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，由于

$$(-x)^2=x^2,\quad (-x)^3=-x^3$$

所以
$$f(-x)=f(x)$$
$$\varphi(-x)=-\varphi(x)$$

其他一些函数也具有上述的这些特性，如$\cos(-x)=\cos x$，$\sin(-x)=-\sin x$.

把这些函数的共性概括起来，可以得到下面的定义

定义 3 如果函数$y=f(x)$满足

$$f(-x)=f(x)$$

则称这个函数为**偶函数**，如果满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则称这个函数为**奇函数**.

偶函数的图形对y轴对称. 奇函数的图形对原点对称.

4. 函数的周期性

研究转动与振动现象时，总会发现循环往复的情况，这种运动变化的重复性，反映在函数关系上就是函数的**周期性**.

定义 4 对于函数$y=f(x)$，如果存在一个不为 0 的常数T，对一切x恒满足

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数$f(x)$为**周期函数**，T为$f(x)$的周期.