



# 地球物理反演和地震层析成象

杨文采 编著

地质出版社

41363

# 地球物理反演和地震层析成像

Geophysical Inversion & Seismic Tomography

5407/26

杨文采 编著

地质出版社

## 内 容 提 要

“地球物理反演和地震层析成象”一书，全书共七章，可分为三个部分。前两章介绍地球物理反演的特点、发展和研究方法，以及数值计算基础。第三和第四章详细讨论了各种广义反演技术和 Backus-Gilbert 反演理论和应用。第三部分三章讨论地震层析成象问题，系统介绍了地震层析成象的理论基础、用于地震走时反演的图象重建技术和用于地震波场的各种层析成象技术。全书的编写以实际应用为主导，为地学工作者、应用数学家和计算机软件人员在了解这一新领域时提供一本较为全面系统的材料，也可作为地球物理专业研究生的教材或教学参考书。

## 地球物理反演和地震层析成象

杨文采 编著

责任编辑：曹玉

地质出版社出版发行

(北京和平里)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所经销

开本：787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub> 印张：16.25 彩插：3页 字数：386000

1989年11月北京第一版·1989年11月北京第一次印刷

印数：1—1050册 国内定价：7.90元

ISBN 7-116-00464-5/P·391

# 作者简介

本书作者杨文采博士1942年生于广东省。1964年毕业于北京地质学院物探系，然后在地科院物探所从事应用地球物理的研究工作。1981年以访问学者身分去加拿大McGill大学作研究，后转为博士研究生，并于1984年取得博士学位。回国后在地矿部北京计算中心继续进行地球物理反演方法的研究，并应邀在北京大学研究生院讲授地球物理反演和地震层析成象课程。近年来，他又与英国帝国理工学院合作进行有关项目的研究。他是30篇论文的作者，对各种应用地球物理问题中的反演理论和技术感兴趣。

# 前 言

在计算机和数字革命的推动下，地球物理数据处理和解释的理论在近20年来发生了根本性的变化，突出地表现在地球物理反演问题的研究上。原来分散在不同地球物理方法中的反演问题被抽象出来，对它们的共性、个性以及解估计的构成和评价的研究，逐渐使地球物理反演发展成为一门独立的边缘学科。进入八十年代之后，用于对地球内部结构成象的地震CT技术和波动方程反演的研究进入了高潮，把地球物理反演的理论和方法推向新的高度。在这本书里，作者试图根据自己的科研和教学经验，对这段时期内应用地球物理理论和方法方面的进展进行系统的总结。

全书共分七章，头两章为概述及数值计算的基础。第三章和第四章总结了1967年以来的所谓“经典”地球物理反演的理论、方法和应用。最后三章讨论当前处在研究前沿的新课题，即微分方程反演和地震层析成象技术。由于没有索引，书后附有英文目录以供对照。由于本书讨论的领域涉及面广而且发展迅速，作者的水平和经验极其有限，谬误之处恳请读者批评指正。

作者感谢国家自然科学基金会和地震学联合基金会对有关研究工作的支持和本书出版的资助。国内地球物理和计算数学界的专家们对作者的建议、帮助和讨论枚不胜数，没有他们的努力作者是不可能对这个领域内的成果作系统总结的。此外，王家林和刘馥两位教授审阅了原稿并提供了宝贵的意见，在此一并感谢。

# 目 录

前言	
第一章 概述	(1)
一、地球物理反演的研究对象	(1)
二、地球物理反演的发展简史	(3)
三、地球物理反演的研究内容和方法	(6)
四、地球物理反演的计算机实现	(11)
第二章 算法基础	(14)
一、矩阵的范数	(14)
二、线性方程组和扰动分析	(17)
三、QR分解和线性最小二乘问题	(24)
四、奇异值分解	(31)
第三章 广义反演方法	(39)
一、参数化、线性化和规一化	(39)
二、广义最小二乘法	(44)
三、广义线性反演	(49)
四、利用自然逆的广义反演方法	(56)
五、线性规划和联合线性反演	(62)
六、广义线性反演在位场处理解释中的应用	(68)
七、广义线性反演在地震处理解释中的应用	(73)
第四章 Backus-Gilbert 反演理论和正则化	(78)
一、连续地球物理模型的反问题	(78)
二、线性反问题解的非唯一性	(82)
三、非线性反问题的线性化	(87)
四、脉冲度准则	(92)
五、BG展布准则	(96)
六、BG折衷准则	(102)
七、正则化方法	(108)
第五章 作为偏微分方程反问题的地震层析成象	(113)
一、地球介质的层析成象和偏微分方程反问题的关系	(113)
二、地震层析成象的应用环境	(120)
三、变系数波动方程	(130)
四、典型的地震层析成象问题	(139)
五、震源函数反演的解析法	(144)
六、解反问题的一种数值方法——脉冲谱技术	(148)

<b>第六章 利用地震走时的层析成象技术</b> .....	(153)
一、射线追踪的方法.....	(153)
二、Radon变换和连续图象重建.....	(161)
三、离散图象重建技术.....	(167)
四、广义Radon变换问题.....	(174)
五、图象重建技术在地震探查中的应用.....	(181)
六、反射地震走时的广义反演.....	(187)
<b>第七章 利用地震波场重建地球介质图象的反散射类解析方法</b> .....	(198)
一、反散射问题.....	(198)
二、衍射层析成象技术.....	(206)
三、反射地震波场的层析成象.....	(213)
四、Fourier 积分算子.....	(224)
五、奇性反演在地震勘探中的应用.....	(230)
六、高分辨率散射地震层析成象.....	(235)
<b>参考文献</b> .....	(248)
<b>英文目录 (Contents)</b> .....	(253)

# 第一章 概述

## 一、地球物理反演的研究对象

地球物理反演是在地球物理学中利用地球表面观测到的物理现象推测地球内部介质物理状态的空间变化及演化的一个分支。虽然地球物理学可分为固体地球物理学和勘探地球物理学两大方面，但这两方面在理论上都有一个共同的核心问题：如何根据地面上的观测信号推测地球内部与信号有关部位的物理状态，如物理性质、受力状态或热流分布等，这些问题就构成了地球物理反演的独特研究对象。具体来说，地球物理反演研究的是各种地球物理方法中反演问题共同的数学物理性质和解估计的构成和评价方法，它是从各个地球物理分支中抽象出来的新的边缘学科。

以地球内部为主要研究对象的地球物理研究过程一般可以用如图 1.1 的流程表示。反映地球内部物理过程的数据由所谓的数据获得系统收集，在勘探地球物理中数据获得系统不仅包括观测物理信号用的传感器和测量仪器，还可能包括激发物理信号的人工震源或场源，如可控震源、射线发生器等。数据获得是地球物理研究中最重要的一环之一，每当记录的地球物理数据的精度或信息量提高一个级次，就推动数据分析技术前进一大步，从而导致对地球内部结构的认识的精细程度提高一步。由于原始记录中包含着不同程度的干扰，也由于随着获得的数据量的不断增大而要求相应的数据管理和显示技术，原始记录的数据要先用计算机进行处理，以提高信噪比及提取与地质解释有关的某些特殊的信息。数据处理的结果一般还是描述物理现象的量，而不是描述地球内部物质物理状态的量，而反演计算的目的是将物理现象的数据转化为地球内部物质物理状态变化的数据，为下一步地质解释提供依据。地质解释主要根据实验测定的岩石类型和物理性质之间的关系或者这方面的统计规律来推测地球内部不同岩石的分布区域以及相变带和突变带，并由此导出有关地球构造、动力和演化的佐证，或者得出有关矿产生成、储存和聚集的结论。由此不难看出，地球物理反演乃是地球物理研究过程中的关键环节，反演的准确度和分辨率实际上常常成为衡量地球物理研究成果的价值的关键指标。

地球物理反演又可分为单一地球物理现象的反演和多种地球物理现象的联合反演两大步骤。由于我们要推测的地球模型只有一个，它必须和地表观测到的所有物理现象的诱发保持一致，因此联合反演是地球物理数据分析的最理想工具。遗憾的是，由于各种技术上的困难和限制，适用于各种地球物理数据综合反演的模式和技术还没有诞生，人们在大多数场合下还只能定性地对比单一地球物理数据反演结果的一致性。因此，这里讨论的反演方法主要是单一地球物理数据的反演方法，仅在第三章讨论广义反演时介绍联合线性反演的几种方法。



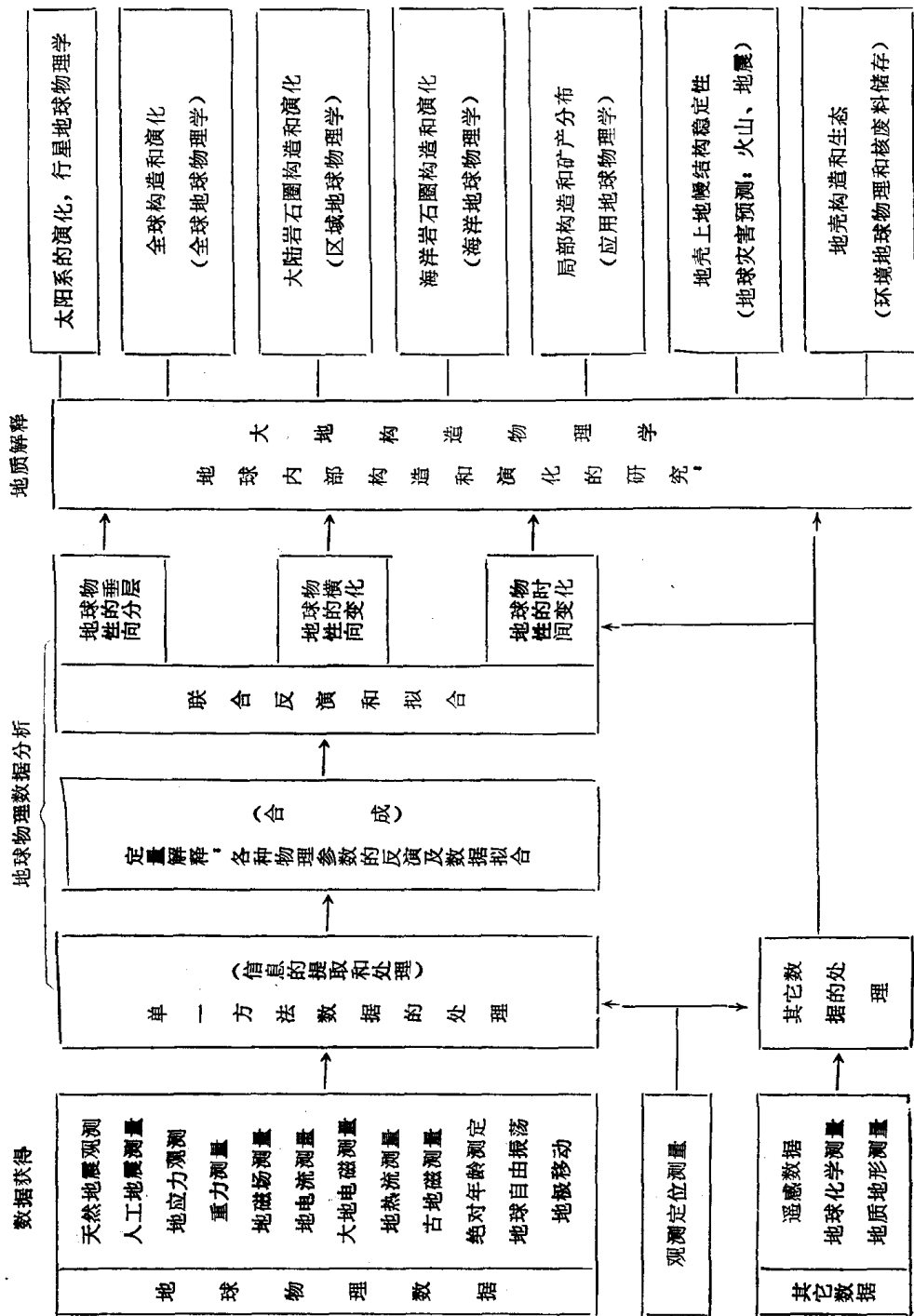


图 1.1 地球物理学研究的一般流程

## 二、地球物理反演的发展简史

如果把天然地震的震源参数的推测也归入地球物理反演的范围,那么我国东汉的科学家张衡应是从事地球物理反演的先驱。牛顿根据万有引力定理推测地球密度,开尔芬(Lord Kelvin)研究地球的弹性和热传导,都是启蒙时期地球物理反演研究的范例。

地球物理学中反演问题的研究,在早期主要来自科学家对地球内部构造的好奇心,并受到物理学和地质学发展的推动。1880年美国学者J. A. Ewing等人发明了近代地震仪,此后地震记录的分析便提到日程上来。到了本世纪初,地震、地磁和重力的数据都有了一定程度的积累<sup>①</sup>,地球物理数据的分析问题逐渐受到了重视,而定量的分析地球物理数据便导致了地球物理反演问题的研究。有人认为<sup>[16]</sup>首先用于地球物理研究并取得反演问题数学解的是Hergloz于1907年提出的地震走时数据的反演。1909年A. Mohorovicic发现莫霍面,1912年Beno Gutenberg发现古登堡面,以及1935年Inge Lehmann发现地球外核和内核的分界面。这些地学发展史上的辉煌事件,都对地球物理反演学术思想的形成和发展起过巨大的推动作用,至今还值得我们借鉴。

到了五十年代,人们对地球内部的分层结构和各层的物理状态已经有了一个大致的了解,编制了地震波速、密度和磁化率随球状地球径向变化的分层模型,所用的反演方法主要是试错法和拟合法。此后,球状地球的分层模型在地震和地电地磁数据的解释上再度建立功勋,确定了上地幔低速和高电导层的存在和深度,导致了岩石圈和软流圈概念的建立和现代板块构造学说。

虽然应用物理学的方法来勘探矿物的思想萌芽于19世纪,但是勘探地球物理方法的研究和试验却是在第一次世界大战前后伴随着现代大工业的发展而兴起的。1926年在美国奥克拉荷马州的沉积盆地上根据反射地震记录的解释布置的钻孔第一次打到了工业油流,证实了物探在找矿勘探中巨大的经济效益,促进了应用地球物理学的迅速发展。第二次世界大战以后,电子管地震仪,高精度石英丝重力仪和航空磁力仪的发明使勘探地球物理中的数据采集系统发生了质的变化,数据分析技术也随之走向复杂,因此有关勘探方法的地球物理学逐渐从固体地球物理学中分离出来,自成体系。然而在五十年代以前,由于计算工具的限制,对反演问题的研究远不如正演问题的研究那么受到重视。这时用于解释推断的工具主要为用于地震走时曲线或位场曲线的特征法(曲面斜率、特征点等),与正演结果对比的选择法和量板法(即简化计算过程用的试错法,如电测深曲线量板),以及用观测信号能量来推测场源参数的积分法等。

1947年第一台电子数字计算机的诞生标志着科学技术的一场革命,对地球物理数据分析产生了巨大的推动。五十年代地球物理中的正演问题已广泛地使用了电子计算机,而与正演计算关系紧密的试错法和拟合法也随之转用计算机来实现。到了六十年代,人们开始利用计算机高速运算的特性试验用计算机代替解释者自动修改地球模型的参数,实现所谓的计算机自动解释(称为自动拟合法或最优化选择法)。然而,在1967年Backus和Gilbert发表他们三篇经典性的论文以前,适用于各种地球物理方法的反演理论还没有形成,反演

<sup>①</sup> 近代重力测量开始于1735年Pierre Bouguer率领的安第斯考察队。古代地磁测量在中国公元720年已有记录, J. Michell于1750年开始用磁秤测出磁场强度,1832年高斯提出了地磁场强度向量的测量方法。

研究还只是作为正演研究的自然延伸分散在单一的地球物理分支之中。

总结1970年以前地球物理反演的研究过程，其主要特点可概括如下：

(1) 地球模型在数学上多用被二次曲面分隔的均匀各向同性介质模型。

(2) 由于对上述模型正问题的解析解（古典解）一般可以找到，反问题不需要直接与偏微分方程打交道，反演计算只用微积分或古典积分方程等数学工具。

(3) 地球物理数据被认为是无限的、完整的、精确的或者只含可忽略的误差，在大多数情况下把它与根据假定模型正演计算取得的人工合成数据等同起来。

(4) 虽然意识到反问题解的非唯一性，但没有对解非唯一的程度和后果作深入研究，评价反演结果的主要准则是用推测的地球模型求得的合成数据与实测数据的拟合好坏。

(5) 所用到计算技术只涉及到初等数值分析，如数值微积分，最小二乘法解超定方程组等。在六十年代后期开始用到快速 Fourier 变换和高速褶积。

六十年代是地质科学和计算机科学发生革命性飞跃的时期。电子计算机从第一代跃变为第三代，计算技术也获得了迅速发展，各种适用于高速计算机的新算法不断涌现。六十年代初开始的国际“上地幔研究”计划，要求研究地壳和上地幔的不均匀性，这就使基于二次曲面分割的地球模型不能满足新的要求。与此同时，地球物理勘探的仪器逐渐走向数字化，数据获得的总量和精度提高了一个级次。随着对复杂构造和地层岩性圈闭等精细地层结构圈定的需要，对反演计算结果的分辨率的要求也大大提高。因此，反演理论和方法的研究开始受到极大重视。在1967—1970年期间，美国地球物理学家 Backus 和应用数学家 Gilbert 连续发表了三篇关于地球物理反演的文章<sup>[17-19]</sup>，为建立统一的地球物理反演理论和方法奠定了基础。他们的主要贡献有：

(1) 地球模型是客观地球在人们头脑中的反映，可以有无穷多个。在数学上地球模型可以用有限个有序的函数集合表示，与希尔伯特空间的元对应，这种希尔伯特空间称为模型空间。

(2) 地球物理数据是有限个不精确的实数组成的集合，如果认为它们可以通过地球模型计算出来，则与模型空间相对应，也可以用希尔伯特空间的元表示地球物理数据集。

(3) 这样定义的地球物理模型和数据的联系常常可以用有限个泛函方程式表示，反问题可以归纳为泛函方程组的求解。然而，由于零空间的存在和数据的有限性，反问题的解具有高度的非唯一性，即古典解一般不存在。

(4) 对于精确的地球物理数据，地球物理反问题的古典解虽然可能不唯一，但是解的某种平均是唯一的，可以利用微扰法等数学工具构成某种迭代格式逐次逼近而求出满足规定准则的广义解。这样获得的解估计的分辨本领和精度不可能同时达到最高。

(5) 在反问题研究中，重要的不是构造出一种广义的解估计，而是要对各种可能的解估计进行评价，这是由于反问题解的非唯一性所决定的。评价解估计的准则应该是在分辨本领和精度之间取合理的折衷，而不是实测和计算数据之间的拟合差最小。

Backus和Gilbert的反演理论讨论的是模型为连续的情况，因此总是导致欠定的方程组，不便于在计算机上作快速计算。与BG理论对应的离散模型的情况下的反演在1972年由美国的Wiggins和英国的Jackson等人先后提出，<sup>[20,21]</sup>这就是广义反演方法。经过Parker等人的介绍和推广<sup>[22]</sup>，BG反演理论和方法在七十年代后期逐渐普及，并在北美

许多大学的地球物理专业开设了地球物理反演方面的研究生课程，标志着它已经成为地球物理学中相对独立的一个分支。

BG 反演理论的不足之处，是未能直接从运动方程和本构方程本身出发来提出反演问题。自六十年代中期以来，偏微分方程的理论有了很大的发展，出现了拟微分算子和Fourier积分算子的理论。在另一方面，变系数波动方程中系数项或源项的反问题在物理学、医学、天文学和地学等不同领域及工程技术中不约而同地被提了出来，这些问题大都与不可直接观测的物体的成象问题有关。七十年代初期英国学者G. Honsfield研制出第一台医用CT机以及他和美国物理学家A. M. Cormack共同获得了1979年度生理学和医学的诺贝尔奖金，大大推动了有关不可见物体层析成象的研究热潮，激发了地球科学家们对变系数偏微分方程反问题及层析成象技术的巨大兴趣。由于七十年代开展的国际“地球动力学计划”未能解决板块运动的驱动力等问题，地球科学家们认为八十年代应该进一步研究地球内部的精细结构，以便为揭示地球内部物质运动的动力和地球演化提供可靠的佐证。因此，在八十年代开展的国际地球岩石圈研究计划中，地学层析成象反演技术受到了特别关注，而且取得了令人鼓舞的成果。例如，美国哈佛大学和加州理工学院应用地震层析成象技术取得了揭示地球内部精细结构的层析图<sup>[23]</sup>，为板块运动的热对流学说提供了证据。由地震学得到的传统的地球模型仅给出了波速在不同深度上的平均值，只反映地球波速径向的平均变化；而层析图还同时揭示了波速的横向变化，并可由波速的横向变化了解地幔密度和温度的横向变化，即低速异常与低密度、高温的地幔物质对应。由层析图上地幔波速环状分布模式可推测地幔内热流的位置，从而间接地显示出地幔的对流图形。由于地震层析成象初步成果引人注目，1984年美国四十多个学术机构建立了地震学合作研究机构IRIS(Incorporated Research Institutions for Seismology)，并取得了美国政府的大量资助。1984年在美国亚特兰大召开的54届SEG年会上，也首次开辟了层析成象技术在油气勘探开发方面应用的专题讨论。总的来说，偏微分方程反演和地震层析成象的研究已把地球物理反演这门学科推向一个新的阶段。虽然这个领域中取得的研究成果还是初步的，理论还不系统，方法也不成熟，但是已为今后地球物理反演的发展勾划出一个重要的方向。有人认为地震层析成象的研究将导致地球科学的第二次革命，虽然还有不少人对此持慎重态度，但至少说明地球物理反演成象在今后的一段时期内将继续处于地学发展的前沿方向上。

与固体地球物理学中层析成象研究几乎同步，应用地球物理领域在八十年代初期也开始了层析成象的研究。例如，海湾石油公司与美国加州大学合作从八十年开始秘密地进行利用反射数据重建地下速度结构的研究，并在1984年勘探地球物理(SEG)年会上首次公布了地震层析成象的研究成果，引起了轰动。地震波波速的提取不仅对于准确圈定地下构造的传统地震勘探是非常重要的，而且波速的变化可以指示非背斜型的地层岩性圈闭，而这些类型的圈闭已成为现今油气勘探的主要目标。地震层析成象技术的发展不仅适应了油气勘探的要求，而且渗透到以提高采油率为目标的油藏工程的全过程。在油田开发方面，开采方案的设计、油田开采的监测和强化采油是提高产量和降低成本的关键环节。这些环节都要求准确地了解地下岩层的孔隙率、饱和度、渗透率和温度，而地震波速与地层的这些物理参数有密切的关系。以强化采油为例，对稠油的水采和火采要求准确控制地层中注水面或火焰前沿的位置，这是油藏工程中一个极其困难的问题。由于地层注水或燃烧后其波速变化可达20%至70%，因此地震波速的层析成象在强化采油时可以起到有效的监测作用。目

前，为油藏工程服务而不是以找油为目标的地震方法已从地震勘探中分离出来，形成一个新的地震学分支——采油地震学（Production Seismology），而地震层析成象就是采油地震学中的主要方法之一。在采油过程中应用的过井电磁层析成象技术近年来也有很大发展。可以预计能源和工业上的需求将促进地球物理反演的新分支——层析成象逐渐走向完善和实用。

除了研究地球内部构造外，天然地震的震源参数的确定也属于地球物理反演问题。六十年代美国拟定的“维拉——U计划”，即利用标准地震台网监视地下核爆炸试验的研究，对地震学以及整个固体地球物理学都有巨大影响，震源参数的反演也得到了深入的研究。当然，天然地震的孕育和发展过程远比核爆炸复杂得多，仅仅反演震中位置、发震时间和地震矩等参数还是不够的。因此，近年来一些学者开始利用反演成象技术对地震带地壳的波速结构成象，甚至探讨利用波速图象的细微变化预报地震的可能性。

我国关于地球物理反演理论和成象技术的研究起步较晚，但是BG反演方法在七十年代就开始介绍到中国，并用于解决我国某些地球物理数据分析问题。我国著名的老科学家傅承义、冯康等都十分重视反演问题的研究<sup>①</sup>。八十年代初，我国的大学已经开始设立了地球物理反演的研究生课程，而且多次召开了关于数学物理反演的学术会议，一个关于地球物理反演成象的新的热潮已经兴起。可以预料，我国的地球物理学家和数学家们将为地球物理反演方法的发展作出应有的贡献。

### 三、地球物理反演的研究内容和方法

地球物理反演的出发点是描述地球内发生的物理现象满足的数学物理方程。数学家称为偏微分方程，物理学称之为运动方程或场方程。在物理学家眼中，运动方程是一个物理体系中物理过程的数学描述，这里“过程”指物质状态的变化。实际上，对运动方程的研究和证实是物理学方法论的核心。典型的物理学研究方法是，对某个系统在某个时刻的状态列出运动方程，通过求解运动方程计算系统中表示状态的变量是怎样随时间变化的，然后得到这一物理过程的某些预测数据；如果这些数据与实验取得的数据相符，则证实了他们的假说和运动方程，产生了新理论；如果预测数据和实验数据不符，则反过来修改运动方程和假说，然后进行下一个循环。典型的物理学研究方法见图1.2。

对于地球物理学家来说，他们习惯用的研究方法和物理学的方法只有一点不同，即他们全盘接受在物理学中已经证实的运动方程（包括稳定场方程，下同），而只修改介质函数和边界条件（地球模型）或初始条件（激发源特性）。以地震学为例，示如图1.3的典型研究方法可称为反演计算的试错法。对比图1.2和图1.3可清楚地看到研究方法的相似性。

在地球物理反演研究中，采用的方法和上述流程不一样。以地震反演为例，这时反演专家已知的运动方程和实际地震数据，这两者都不是可以随便修改的。利用波动方程来研究的不再是波向前的传播（过程的进化），而是波沿时间轴的后退（逆时轴传播），所期望的是通过波后退过程中地下质点振动状态的变化给出关于介质性质或激发源特性的消息（图1.4）。为了证明反演的结果是否正确，可用图1.3所示的正演计算来合成地震图，并把

<sup>①</sup> 见1982—1985期间中国数学年会及地球物理学术讨论会的报告。

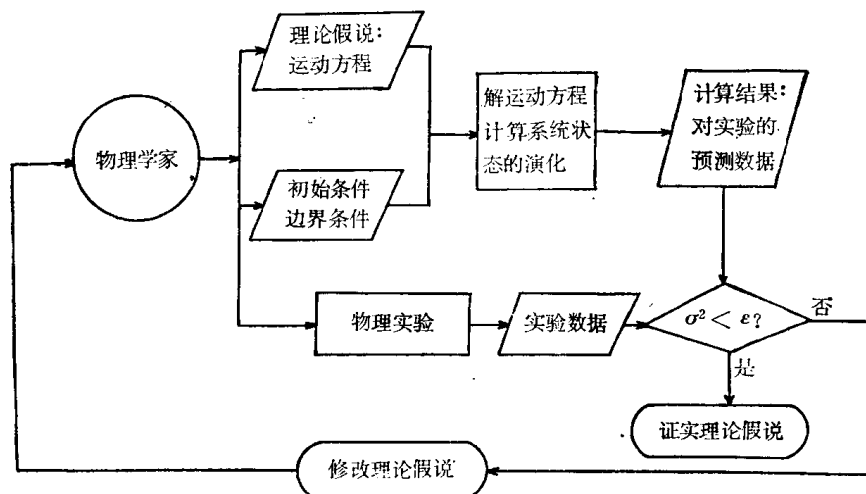


图 1.2 典型的物理学研究方法示意图

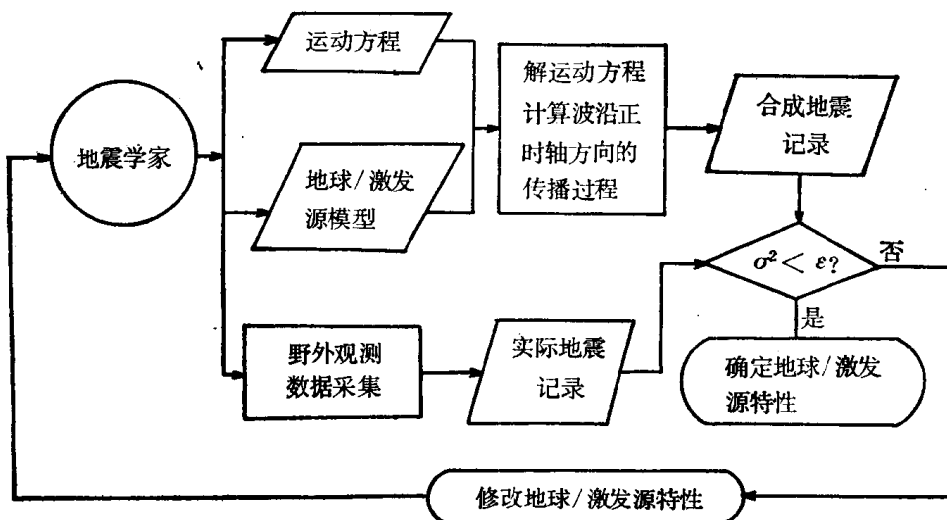


图 1.3 典型的地震学研究方法示意图

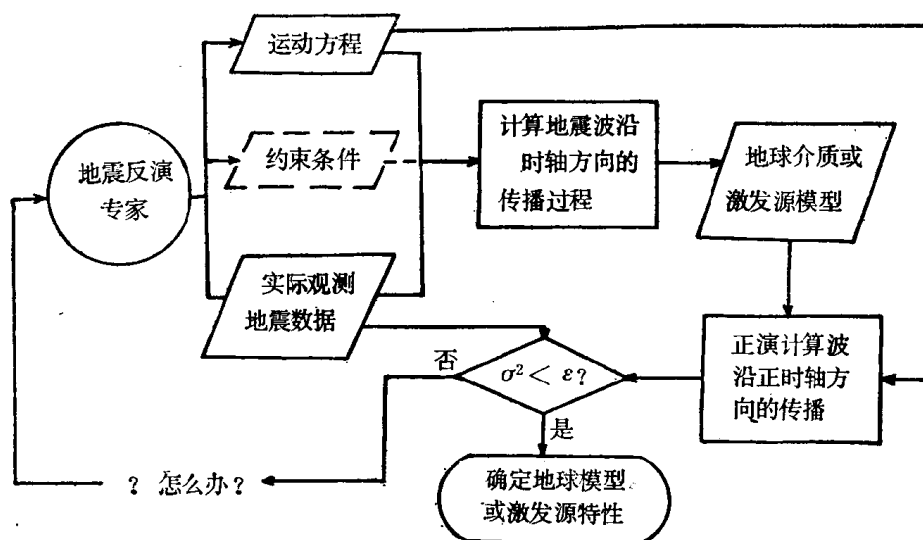


图 1.4 反演过程的示意图

它与实际地震数据比较。如果两者相符说明反演结果可靠，但是如果两者差别很大怎么办？难道允许反演专家去修改运动方程或实际数据（它们是反演系统的输入）吗？

对于这样的反演系统，至少有两个问题使物理学家产生怀疑。第一，反演涉及到的波的逆时传播是物理不可实现的。第二，系统的不封闭不能保证研究的深入，而且可能导致混乱（如错误地怀疑观测数据而布置更多实验）。这些问题的存在决定了地球物理反演研究内容和方法的特殊性。

要利用台站上接收的地震波传播的某种后果来研究发生在以前时刻的波的传播特性或激发过程，必须假定地震波沿时轴的正向和反向的传播是对称的。这一隐含的假定对数学家也许是无所谓的，但是物理学家们却心怀疑虑，因为时间具有方向性。根据热力学第二定律，如果在一个封闭的房间内放一小瓶香水，若干小时后房间内会充满宏观上均匀分布的香水分子，这是一个产生熵的不可逆过程，因为均匀分布香水分子的房间绝不会发生香水逐渐汇聚回小瓶子中去的“逆扩散”过程。物理学关于热力学的时间方向不可逆和自然过程产生熵的知识，导致沿时间轴正演和反演的不对称结论。与扩散过程一样，波动过程沿时间轴也是不对称的，在炮点的爆破产生了地面振动，如果人工发生相同的振动却不能导致振动能量集中回到炮点而激发爆破。从物理学和信息论分析，从源出发的地震波传播过程是消灭宏观信息而产生熵的过程，在传播过程中宏观信息不断地转化为微观信息，而微观信息又不断地被微扰所消耗（从而不断再生出熵增加的条件），因此利用波传播的“结果”不可能完全恢复波的“源”，所谓的“逆时传播”是物理不可实现的。

当然，也有的物理学家认为，时间的方向性来自于孤立的封闭系统的假定实际上并不存在。他们认为，如果把封闭的物理体系扩大到整个宇宙，在测不准原理的规定限度内对宇宙给出完全微观的描述，则时间的两个方向就不会有质的差别，描述对于时间的正演和反演就将是 对称的。这个观点看来有一定道理，但是对于无界的宇宙进行完全微观的描述是不现实的。

数学家们可以争辩说，逆时物理过程即使是物理不可实现的，但也可以用计算机进行“仿真”。以香水扩散过程为例，如果可以把小瓶子内每个分子扩散的轨迹用摄像机拍成电影，然后把电影片子倒过来放，就可以看到宏观上均匀分布的香水分子是怎样“逆扩散”回到小瓶子里去。类似地我们可以把地震波传播的计算机模拟（如射线追踪地震合成）的计算步骤一步一步地颠倒过来，那么只要计算机的精度高到舍入误差可以忽略的程度，也可以把地面振动的传播路径（射线）逆向追回到源点，实现震波逆时传播的“仿真”，这表明物理上不可能实现的自然过程具有数学上的可模拟性。然而，对于这一类物理不可实现的过程的模拟在数学上常常归结为所谓的不适定问题，即初始条件或边界条件有微小的误差会导致解答发散的一类数学问题，它的古典解即使存在，也难以准确地计算出来。这就使地球物理反演方法通常都不依靠古典解，而只能根据某种准则找广义的解估计并且还要对解估计进行评价。在这里我们用“解估计”一词来表示反演计算的结果，它的含义是在某种准则或附加条件下对地球模型的一种猜测，而不是古典意义下数学问题的解，这是由反演问题解的非唯一性决定的。

让我们回到反演系统不封闭的问题上来，看看造成不封闭的原因是否与理论上的不完善性有关。为此，我们不妨把自己打扮成一个福尔摩斯式的侦探，到图 1.4 的反演流程中去找问题的症结。假定数学家们已经完满地解决了对称时轴上的逆时传播的“仿真”计算，

那么造成反演失败的环节就只能出在：①运动方程；②地球物理数据；③介质模型或激发模型；以及④上述三方面的总体配合上。

首先让我们回顾一下与地球物理学有关的一些数学物理方程，它们大都可以用二阶偏微分方程表示。这些数学物理方程是由基本物理定律，例如质量守恒定律、牛顿运动定律和能量守恒定律等，加上由实验取得的本构关系推导出来的。在第五章的前三节中我们将讨论与地球物理反演有关的各种数学物理方程，并且可以注意到，在导出这些方程时我们对地球介质的性质作出了一定的假设，因此在用它们描述实际地球内发生的物理过程时带有一定的近似性。例如，我们假设地球物质是完全弹性体，因此可以用完全弹性体的本构关系即广义虎克定律来描述应力和应变的关系，从而推导出弹性波方程。但是，实际地球内的岩石和其它地内物质并非严格的完全弹性体，而是成分复杂的多相物质组成的非完全弹性体，这样弹性波方程就只能是地球内地震波传播过程的近似描述，而不是精确的描述。如果用弹性波方程作反演还太复杂，还必须加上其它假设条件进一步把它简化为声波方程，则作为反演出发点的方程本身的近似程度便更差一些。这种由于反演使用的基本方程的近似性有可能造成反演系统的不封闭。按理说，为了避免由于这种原因造成的反演的失败，应该尽量采用准确和复杂的数学物理方程作为设计反演算法的基础。然而，这样做不仅会导致反演算法的复杂化和计算机实现的困难，更重要的是可能使反问题的提法本身发生错误，因为方程变得复杂之后反问题的解可能不存在或者不唯一。一般来说，准确的方程涉及更多的未知地球参数，而作为边界条件的已知数据却总是有限的，对反演来说我们只能采用与数据中的信息量相匹配的适当近似的方程，而不是最准确的数学物理方程。由此可见，当发现反演系统不封闭时必须首先研究反问题的提法是否合适及基本方程本身的近似程度，并把它和已知地球物理数据的性质联系起来。

在进行地球物理反演时各类地球物理数据的物理意义是很清楚的，但它们在数学上的准确描述就不那么容易了。笼统地说，它们是含有地球信息的有限实数集，或者说以观测函数表示的地球信息和地质噪音在某种形式上的组合。理想的数据集可定义为观测函数在给定测点集上的取样数据集，与观测函数的关系可以用取样定理表示。这里假定取样是无限稠密的，而且是不带任何误差的，这就是数学家们对待地球物理数据的常用方法。

上述关于地球物理数据的定义对于正演问题是合适的，因为它们这时是指定的输出，应与实验数据拟合。在反演计算中，实验数据是系统的输入，有限性和不确定性是实验数据的属性。Backus和Gilbert考虑到数据的有限性，把数据定义为“可以通过规定运算得到的有限实数集”，其中“规定的运算”可以由运动方程导出，因此数据实际上可用泛函方程组表示。虽然BG理论比“数据是观测函数的取样集”走前了一步，导出了一些关于数据有限性引起解的非唯一性定理，但数据中的不确定性仍然没有准确的描述。最常见的描述这一不确定性的方法是把数据视为确定成分（观测函数的取样）和噪音（高斯分布的随机变量）的和，并对噪音的统计性质予以规定。遗憾的是，这种“噪音模型”对地震反演不适用。例如当利用纵波和声波方程进行反演时，作为干扰的面波、横波和转换波都是有序的而不是随机的。对于波动方程反演来说还有一个极其头痛的问题，就是地震数据在频率域只分布在一个窄带之内，说明反散射等反演方法要求输入的许多信息在地震数据中



根本不存在。数据中信息量的不足常常是导致地球物理反演发生困难的根源<sup>①</sup>。因此，对地球物理数据的准确描述，它的信息量和自由度的估计都是地球物理反演研究的内容。

地球模型是反演计算的目标，也是数学家和地球物理学家常有争议的概念。地球模型一般指描述地下介质物理性质的函数集，它一般出现在运动方程的系数项或源项。对于天然地震研究也可以指激发特性，它一般出现在运动方程的源项。如果我们想用孕震区的微震来推测地下应力状态的变化，则这时震源过程的模型要比三维地壳模型复杂得多，能否用一个有序的函数集描写震源过程似乎还有问题，因为这时对应的正演问题还不十分清楚，我们以下只讨论介质模型的情况。这时，Backus和Gilbert对地球模型是“由有限个函数组成的有序函数集”的定义仍然是可行的，问题是规定介质函数的具体性质。

从连续介质物理学的概念出发，地球模型最好用“逐块”光滑的间断函数集来描述，允许空间中存在某个间断面，介质函数 $m(\mathbf{r})$ 在间断点 $\mathbf{r}_0$ 处在有限范围内取不定值，而在相邻间断面内为连续光滑函数，这样的介质函数实际上是广义函数。间断型介质函数的复杂性不仅在于它在间断点处取不定值，还在于存在场函数没有定义的奇点。例如，在不同间断面的交点上波场 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ 没有定义，因为这时 $\mathbf{f}$ 要满足相互矛盾的边界条件。在间断面不光滑的地方，由于界面的法线向量取不定值场函数也没有定义，也是场方程的不可去奇点。对于反射地震法来说，场的奇点是最重要的绕射源，与地层的断裂、尖灭和不整合等构造有关。然而，由于反问题的困难是目前大多数反演方法还没有用广义函数来描述地球介质，这也是导致反演系统不封闭的原因之一。

对于目前讨论得最多的反射地震法来说，介质函数是纵波速度（或声阻抗） $C(\mathbf{r})$ ，它是声波方程（或纵波方程）中的系数项，可用上面说的逐块连续的间断函数表示。令 $S_0$ 为观测面， $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ 为其上的观测函数， $\mathbf{r}_0 \in S_0$ ，则反问题的提法可能有以下几种：

① 给定关于 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ 的有限数据集，根据运动方程确定函数 $C(\mathbf{r})$ ，即层析成象。

② 给定关于 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ 的有限数据集确定 $C(\mathbf{r})$ 的间断点集 $\{\mathbf{r}_0\}$ 。这类反问题可称为介质奇性反问题。当间断面为单一的封闭曲面时，它相当于确定边界形状的反问题，即轮廓成象。

③ 根据 $S_0$ 面上的观测函数同时求研究区域内的介质函数 $C(\mathbf{r})$ 和波场函数 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ 。这种及问题的提法可称外推反问题或“偏移反演”。

如上所述，这样提出的反问题不能保证反演系统封闭，即取得可以与数据拟合的解估计，其原因可能出在运动方程过于简化，地球物理数据的不足和地球模型的描述不够准确。或者从总体上看，运动方程要求的数据和模型与反演使用的不一致。一种常用的改进地球物理反演效果的方法是增加输入的信息量。如果附加的信息量来自于其它地球物理方法或地质观测的数据，我们所进行的是联合反演。如果附加的信息量来自于我们对地球模型的某些先验知识，则我们要进行的是加约束的反演。但是，约束条件来自于人们的认识，未免带有主观性，而联合反演虽然要求取得更多的数据，但避免了主观认识出错的可能性。

① 根据香农 (C. E. Shannon) 的信息论，信息被定义为对物理体系作统计描述的一种性质，单位为比特 (bit)，一比特的信息是两个相等的可能性之间决定其中一个需要的信息量，而一个体系的信息量等于对该体系完备的统计描述进行编码所需要的二进位数的最少位数。信息服从于守恒定律，即一个体系的信息与熵的和保持恒定，等于该体系在给定条件下所能达到的最大信息量或最大熵：

$$I + H = I_{\max} = H_{\max}$$

式中  $I$  表示信息量， $H$  为熵。信息是对物理体系的有组织程度（确定性）的度量，而熵是对系统的无序程度（不确定性）的度量，因此熵就是负的宏观信息。