丁传松
李秉彝 著

广义黎曼积分

科学出版社

广义黎曼积分

丁传松　李秉彝　著

科学出版社
1989

内 容 简 介

本书对 Riemann 积分作了一点自然和朴素的修改，而得到绝对型（如 Lebesgue 积分）和非绝对型（如 Perron，Denjoy 积分）的等价积分，处理方法初等而简洁，可作为高校数学系教材．另外，本书在起点较低的基础上，力求反映八十年代以来国际上主要的研究成果，以使读者对这一分支有比较全面的了解．

读者对象为大学数学系学生、研究生、教师以及数学研究人员和有关工程科技人员．

广 义 黎 曼 积 分

丁传松 李秉彝 著

责任编辑 梅 霖 刘嘉善

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 8 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1989 年 8 月第一次印刷　印张：5 3/8

印数：平 1—1 500　插页：平 1 精 3

　　　精 1—250　字数：122 000

ISBN 7-03-001275-5/O · 283（平）

ISBN 7-03-001276-3/O · 284（精）

定价：平 装 3.10 元

　　　布面精装 5.10 元

序

Dieudonne 在其名著《现代分析基础》中曾说过："如果不是出于对 Riemann 这位大数学家的尊敬和受到传统的束缚，Riemann 积分早就为 Lebesgue 积分所取代了."持类似观点的人决非个别. 诚然，后者较前者不仅更为一般，而且更加有力. 但是，不管用何种方式引入 L 积分都不如引入 R 积分那样自然和易解. 况且，L 积分还不能包括 Newton 积分和 Cauchy 积分. 凡此都使人有一种美中不足之感. 这就难怪 Dieudonne 的论点未能占有较大的市场了.

Lebesgue 积分出现之后，就有许多人寻求它的进一步扩展，如 Denjoy 积分和 Perron 积分. 但是兼有叙述简单、内容广泛、性质完善之长的新型积分却一直没有产生. 这一愿望终于在 Henstock-Kurzweil 积分中得到了较好的实现，时在 1957—1958 年间. 该积分实际上是 Denjoy 积分与 Perron 积分的一种等价形式，从而也是 L 积分的推广，而且没有 L 积分中"可积必绝对可积"的要求. 更引人注目的是，Henstock-Kurzweil 积分的引入相当简单，既不用测度，也不用超限归纳法，只须就 Riemann 积分的 $\varepsilon—\delta$ 定义略加修改，将 δ 换成 $\delta(x)$ 即可. 因此，我们可以很自然地称之为广义 Riemann 积分.

广义 Riemann 积分虽出现在 50 年代，但流传不广，国内的介绍尤少. 多年来，我倒是有意作过介绍，鼓励中青年同志进行研究. 现在终于有了结果：以丁传松教授为代表的西北地区的积分研究，已经相当深入了.

这里要特别提到新加坡国立大学李秉彝(Lee Peng Yee)教授的贡献.他曾任东南亚数学会会长,现任国际数学教育委员会的副主席,是一位国际性人物.他又是 Henstock 的高足,当然深得广义 Riemann 积分的真传.1983,1985 和 1987 年他三次来华讲学访问,在遍访京沪之外,还仆仆风尘,深入西北地区培养研究生和青年教师,对于开发"积分论"研究,贡献莫大焉.因此,把丁传松和李秉彝合著的这本《广义黎曼积分》看作中国和新加坡两国人民友谊的一种结晶,我觉得是很合适的.

广义 Riemann 积分问世多年,但系统的著作不多.McShane 的《统一积分》很不错,但只处理了绝对可积的情形.丁传松与李秉彝的这本书不仅填补了中国大陆在这方面出版物的空白,而且总结了近年来在积分论研究上的若干新成果,在学术上有所前进.通俗化原是广义 Riemann 积分研究的初衷之一,本书具备起点低、易于入门的特色,许多处理都是独具匠心的.所以我期待本书会拥有相当多的读者.

在本书即将付梓之际,我盼望国内外在积分论研究上更进一层,克服广义 Riemann 积分现存的若干弱点,使积分理论日渐更新.与此同时,也祝愿丁、李的合作不断扩大,研究后继有人.于是乐为之序.

程其襄

一九八九年四月九日于沪滨

目 录

第一章　一种广义黎曼积分

§1.1 引　　言

在古典微积分学中，从两种不同的观点分别引进了两类积分。其一是把积分看作微分运算的逆运算；其二是把积分看作一类特殊和式的极限。这两类积分的相互沟通与补充，促使了古典微积分理论的完善，从而成为独立的学科。

为了进一步发展积分理论，我们在这里对上述两类积分作一些回顾和分析。这里所引用的记号是初等微积分中常用的。

设 a, b 为有限实数，$[a, b]$ 为实数域中的闭区间，$f(x)$ 是定义于 $[a, b]$ 上的实值有限函数。

所谓 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 **Newton 可积的**（或简称 **(N) 可积的**），是指存在函数 $F(x)$，$x\in[a, b]$，使其导数 $F'(x)=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上成立。这时称 $F(b)-F(a)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 **Newton 积分**（简称 **(N) 积分**），记为 $(\mathrm{N})\int_a^b f dx$，即

$$(\mathrm{N})\int_a^b f dx=F(b)-F(a).$$

所谓 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 **Riemann 可积的**（或简称 **(R) 可积的**），是指存在实数 A，对 $[a, b]$ 的分法 T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

及任意的 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=A,$$

其中 $\lambda(T)=\max\limits_{i}|x_i-x_{i-1}|$，且上述极限与分法 T 及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的选法无关。

这时称 A 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**（简称 **(R) 积分**)，记为

$$(\mathrm{R})\int_a^b f dx=A.$$

为了反映极限与分法 T 及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的无关性，可用 ε-δ 说法来描述，即存在实数 A，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\lambda(T)<\delta$ 时，任何分法 T 及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon.$$

在古典微积分学理论中已经熟知，$[a,b]$ 上 $f(x)$ 是 (N) 可积(即 $f(x)$ 有原函数存在时)，并且 $f(x)$ 是 (R) 可积时，这两种可积意义是等价的，而且积分值是相等的，即

$$(\mathrm{N})\int_a^b f dx=F(b)-F(a)=(\mathrm{R})\int_a^b f dx.$$

这就是古典微积分理论中最重要最著名的 Newton-Leibniz (N-L) 公式，特别当函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续函数时，这个公式总是成立的. 不过，在一般情况下，这两类积分并不等价，确实存在着这样的例子，(N) 可积函数并不 (R) 可积，或 (R) 可积函数并不 (N) 可积.

例 1

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

可见 $f(x)$ 是 (N) 可积的，但 $f(x)$ 在包含 O 点的任何区间 $[a, b]$ 上并非有界，故不是 (R) 可积的.

注 甚至我们还可以构造出一个有界的函数，它是 (N) 可积而非 (R) 可积.

例 2 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

在包含点 O 的任何区间 $[a, b]$ 上都不是 (N) 可积的. 因为假若 $f(x)$ 是 (N) 可积函数，则它是某一个函数 $F(x)$ 的导函数，即 $F'(x)=f(x)$. 但根据导数的 Darboux 定理可知，$F'(x)=f(x)$ 可取 $F'(a)$ 与 $F'(b)$ 中一切介值，但这不可能，因 $f(x)$ 在包含点 0 的区间 $[a, b]$ 中显然无介值性. 可见假定 $f(x)$ 是 (N) 可积的是不真的. 另一方面，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上却是 (R) 可积的.

例 3 微积分中最常见的例子，Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

既非 (R) 可积，亦非 (N) 可积.

例 4 设有理数的全体为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，函数

$$D_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1, r_2, \cdots, r_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

在任何区间 $[a, b]$ 上均为 (R) 可积的，且 $D_n(x)$ 为上升函数列，收敛于 $D(x)$，而 $D(x)$ 如例 3 所述不是 (R) 可积的.

例 5 考察函数

$$f_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}, \quad x\in[-1, 1].$$

$$f_n(x)\to \operatorname{sign}x, \quad x\in[-1, 1], \ (\text{当 } n\to\infty \text{时})$$

$f_n(x)$ 是 (N) 可积的，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 却不是 (N) 可积的.

以上例子说明，这两类可积函数的范围是互不包容的，同时也都不够广泛. 从而也就限制了这些积分的应用范围.

另一方面，从理论上讲，微积分学的基本方法是极限方法，但是无论是 (N) 积分，还是 (R) 积分，对于极限的运算均不封闭(参看例 4、例 5)，或者说还没有较好的收敛定理. 这应该说是一种缺陷. 当然，我们还可以列举一些其它严重的缺点，如积分次序的交换不够灵活；可积函数类作为距离空间并不完备等等. 这里不多讨论，可参看参考文献[1].

我们希望建立一种积分，它使可积函数范围更大，而性质更加完善.

Lebesgue 积分显然推广了 (R) 积分，由于 (L) 积分具有绝对可积性，即 f 与 $|f|$ 同时 (L) 可积性，因此仍未完全包括反常积分与 (N) 积分. 如果能有一种表述简单、内容广泛、性质完善的积分，总是值得讨论的. 我们希望本书介绍的广义 Riemann 积分能充当这个角色.

§ 1.2 广义 Riemann 积分

如大家所知，Riemann 积分是指函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上对所给的分法 T，所作出的积分和 $\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 的极限，而这个极限要求与分法 T 加细的方式无关，也要求与 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 的选法无关. 这两个无关性一方面是为了保证积分和的极限的唯一性，也就是积分的确定性；另一方面无关性实质上是一致性，这样强烈的一致性也就限制了许多函数的可积性，使 (R) 可积函数是且只能是不连续点为 (L) 零测集的有界函数. 如果在保证积分和的极限唯一的条件下，适当减弱这两个无关性来定义积分，这是有可能扩大可积函数类的. 这个目的可以通过多种方式达到，下面我们先介绍一

种方法.

为了保证积分和的极限的唯一性，粗略来看，就是希望对任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，绝对值 $|\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A|$ 可以任意小. 可以看出，对某些区间 $[x_{i-1}, x_i]$，当 x 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上值 $f(x)$ 变动不大时，任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，上述绝对值相应地变化不大，也许仍可保持任意小. 但对另一些区间 $[x_{i-1}, x_i]$，值 $f(x)$ 变动较大，相应地会导致上述绝对值有较大的变化，使之难以保持任意小. 因之一律要求 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度都小于固定常数 δ，会使可积函数类的范围变狭窄.

为了避免这种情况的发生，我们采取的想法自然是使 ξ_i 与区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 相适应，因地制宜地选择 $\delta(\xi)$，然后再确定分法 T 来求积分和，以削弱其"一致性"，从而扩大可积的函数类. 下面是具体作法和必要的辅助工具.

我们先引进一个非常重要的辅助概念，即所谓关于 $\delta(x)$ 精细分法.

定义 1.2.1 $[a, b]$ 上给出正值函数 $\delta(x) > 0$，所谓在 $[a, b]$ 上的分法 T 是 **$\delta(x)$ 精细的**，是指 T 的有序分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 与结点 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，对每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都有 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$.

可以看出所谓 $[a, b]$ 上的 $\delta(x)$ 精细分法 T，是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 与 ξ_i 所组成的集偶 $\{([x_{i-1}, x_i], \xi_i), i=1, 2, \cdots, n\}$，它满足：

(i) $[a, b] = \bigcup\limits_i [x_{i-1}, x_i]$；

(ii) $[x_{i-1}, x_i]$ 两两无公共内点；

(iii) $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$.

因此今后提到 $[a, b]$ 上的 $\delta(x)$ 精细分法 T，有时可直接写为 $\{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\ i = 1, 2, \cdots, n\}$，甚至在不产生误解

时，干脆简写为 $\{([u,v],\xi)\}$ 或 $\{[u,v],\xi\}$.

注 提到 $[a,b]$ 上 $\delta(x)$ 精细分法与通常分法不同是在于后者指一组分点，而不考虑结点以及 (iii) 式右端的包含关系。

关于 $\delta(x)$ 精细分法显然有性质：若 $\delta(x)\leqslant\delta'(x)$，则 $\delta(x)$ 的精细分法必为 $\delta'(x)$ 的精细分法。

定理 1.2.2 对于 $[a,b]$ 上任何一个正值函数 $\delta(x)$，一定存在 $\delta(x)$ 精细分法 T.

证明 对应正值函数 $\delta(x)$，每一个 $x\in[a,b]$，邻域 $(x-\delta(x),\ x+\delta(x))$ 覆盖 x，邻域族 $\{(x-\delta(x),\ x+\delta(x))\}$ 覆盖 $[a,b]$. 由 Heine-Borel 有限覆盖定理知，存在有限邻域族 $\{(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i))\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 同样覆盖 $[a,b]$.

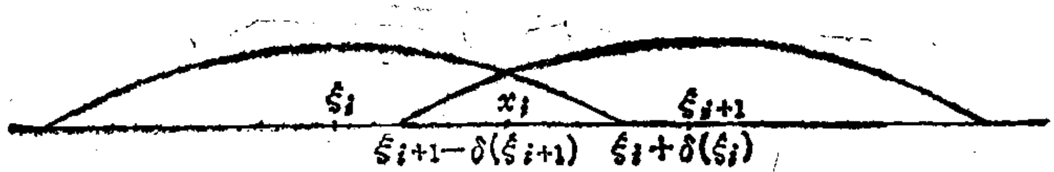
对这组有限覆盖邻域族不妨可以认为有下列性质：

(i) 族中每一个邻域不可能包含在族中其他一个或数个邻域的并之中（不然，族中就去掉这一个，不影响其余的有限覆盖性）；

(ii) ξ_i 按大小顺序排列，即有

$$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n.$$

这样 $(\xi_i,\xi_i+\delta(\xi_i))$ 与 $(\xi_{i+1}-\delta(\xi_{i+1}),\xi_{i+1})$ 必有交点，并且以任何交点 x_i，$i=1,2,\cdots,n-1$ 及 $a=x_0$，$b=x_n$ 作为分点，以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为结点，所构成的 $[a,b]$ 上的分法 T 一定是 $\delta(x)$ 精细分法.



有了 $\delta(x)$ 精细分法的准备以后，下面就可以引进广义

Riemann 积分的概念。

定义 1.2.3 设 $f(x)$ 定义于 $[a, b]$，若存在常数 I，具有下列关系：对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\delta(x)>0$，对任何 $\delta(x)$ 精细分法，其分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，结点为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，都有

$$\left|\sum_i f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon, \qquad (*)$$

则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 **Henstock 意义下可积**，简称 **(H) 可积的**，且 I 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 **(H) 积分**，记为 (H) $\int_a^b f dx$，或称为**广义 Riemann 积分**；也有人称为**完全 Riemann 积分**.

这个积分定义不同于 Riemann 积分定义，主要在于它的积分和并不要求对所有充分细密分法及一切 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都能使(*)式满足，而仅仅是要求对于任何 $\delta(x)$ 精细分法中相应的分点 x_i 与结点 ξ_i 使(*)式满足就够了。这样减弱了对分法及 ξ 选择的要求，就有可能使本来不是 (R) 可积的函数成为 (H) 可积函数。下面可以看到这一拓广是有意义的且扩大了可积函数的范围.

定理 1.2.4 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分是唯一的.

证明 若存在 I_1 及 I_2，分别有下列性质：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1(x)$，使得任何 $\delta_1(x)$ 精细分法 T_1，分点为 $a=x'_0<x'_1<x'_2<\cdots<x'_n=b$，结点为 $\xi'_1, \xi'_2, \cdots, \xi'_n$，有

$$\left|\sum f(\xi'_i)(x'_i-x'_{i-1})-I_1\right|<\varepsilon.$$

同样存在 $\delta_2(x)$，使得任何 $\delta_2(x)$ 精细分法 T_2，分点 $a=x''_0<x''_1<x''_2<\cdots<x''_m=b$，结点为 $\xi''_1, \xi''_2, \cdots, \xi''_m$，有

$$\left|\sum f(\xi''_i)(x''_i-x''_{i-1})-I_2\right|<\varepsilon.$$

令 $\delta(x)=\min(\delta_1(x), \delta_2(x))$，此时取一个 $\delta(x)$ 精细分法

T，自然也是 $\delta_1(x)$ 精细分法和 $\delta_2(x)$ 精细分法。设 T 的分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_k=b$，结点为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，自然应有

$$\left|\sum f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I_1\right|<\varepsilon,$$
$$\left|\sum f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I_2\right|<\varepsilon.$$

从而 $|I_1-I_2|<2\varepsilon$，即得 $I_1=I_2$。

可见虽然减弱了对分法 T 的选择要求，但仍能保证积分和极限的唯一性。说明这样定义的积分是有意义的。

定理 1.2.5 $[a,b]$ 上 (R) 可积函数 $f(x)$ 是 (H) 可积的，且

$$(\mathrm{R})\int_a^b f dx=(\mathrm{H})\int_a^b f dx.$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积，即存在 $I=(\mathrm{R})\int_a^b f dx$，具有性质：对任给 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，对任何分法 T：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，当 $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ 时，无论 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 如何选取，都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

令 $\delta(x)=\dfrac{\delta}{2}$，任何 $\delta(x)$ 精细分法 T：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 及 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\subset\left(\xi_i-\dfrac{\delta}{2},\xi_i+\dfrac{\delta}{2}\right)$，自然 $|x_i-x_{i-1}|<\delta$，从而 $(*)$ 式成立。即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 (H) 可积的，且

$$(\mathrm{H})\int_a^b f dx=(\mathrm{R})\int_a^b f dx.$$

这个定理指出了 (R) 可积函数类包含在 (H) 可积函数类之中。反映在分法上无非是：对 (R) 可积函数而言，任给

$\varepsilon > 0$，相应地 $\delta(x)$ 是特殊的正值函数，即正常数．其实这个结论之逆也是成立的，对 (H) 可积函数而言，任给 $\varepsilon > 0$，相应正值函数 $\delta(x)$ 为常数，或 $\inf\limits_x \delta(x) > 0$ 时，此函数必为 (R) 可积的．

定理 1.2.6 在 $[a, b]$ 上 (N) 可积的函数 $f(x)$ 是 (H) 可积的，且

$$(\mathrm{H})\int_a^b f dx = (\mathrm{N})\int_a^b f dx.$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (N) 可积，即存在 $F(x)$，使

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

这样，对任给 $\varepsilon > 0$ 及任意 $x \in [a, b]$，存在 $\delta(x) > 0$，当 $x - \delta(x) < u < x < v < x + \delta(x)$ 时，有

$$\left|\frac{F(u) - F(x)}{u - x} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left|\frac{F(v) - F(x)}{v - x} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即

$$|F(u) - F(x) - f(x)(u - x)| \leqslant \varepsilon(x - u),$$

$$|F(v) - F(x) - f(x)(v - x)| \leqslant \varepsilon(v - x).$$

合并得

$$|F(v) - F(u) - f(x)(v - u)| \leqslant \varepsilon(v - u).$$

取 $\delta(x)$ 精细分法 T，即

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n,$$

且 $\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i < \xi_i + \delta(\xi_i)$，就有

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})|$$
$$\leqslant \varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

从而

$$\left|F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a).$$

可见 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 (H) 可积的，且

$$(\mathrm{H})\int_a^b f dx = F(b) - F(a) = (\mathrm{N})\int_a^b f dx.$$

定理 1.2.7 若 $f(x)$ 定义于 $[a, b]$，b 为 $f(x)$ 的瑕点，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的反常 Riemann 积分 $(\mathrm{IR})\int_a^b f dx$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (H) 可积，且

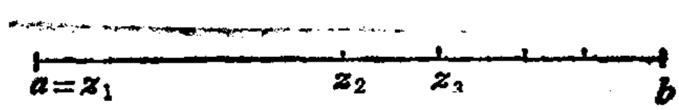
$$(\mathrm{H})\int_a^b f dx = (\mathrm{IR})\int_a^b f dx.$$

证明 由于只有瑕点 b，且 $\int_a^b f dx$ 存在，所以当 $a<b'<b$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b']$ 上是 (R) 可积的，也是 (H) 可积的，且有

$$\lim_{b'\to b}(\mathrm{H})\int_a^{b'} f dx = (\mathrm{IR})\int_a^b f dx.$$

令 $F(x) = (\mathrm{H})\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b)$，$F(b)=\lim\limits_{x\to b}F(x)$，$F(u, v) = F(v) - F(u) = (\mathrm{H})\int_u^v f(t)dt$，再令

$$z_k = a + \frac{k-1}{k}(b-a),\quad k = 1, 2, \cdots,$$



由于 $f(x)$ 在 $[z_k, z_{k+1}]$ 上 (R) 可积，也就 (H) 可积. 这样，对任给 $\varepsilon>0$，在 $[z_k, z_{k+1}]$ 上有 $\delta_k(x)$，对任何 $\delta_k(x)$ 精细分法 $\{[u, v], \xi\}$，相应积分和有

$$\sum_{[z_k, z_{k+1}]}(F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

另有 $\delta>0$，当 $b-\delta<u<b$ 时，

$$\left|(\mathrm{H})\int_a^u f dx - (\mathrm{IR})\int_a^b f dx\right| = |F(u) - F(b)| < \varepsilon,$$