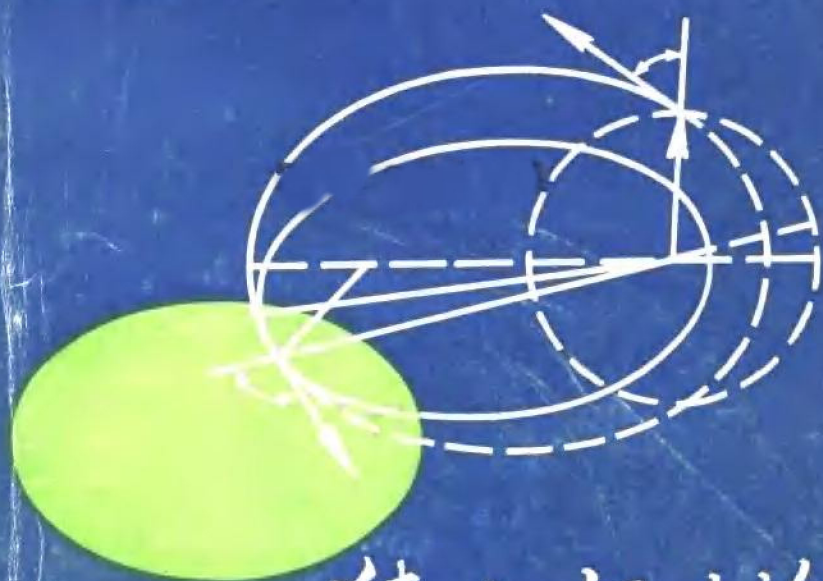


竺苗龙 著



狭义相对论 与 航天器飞行

青岛海洋大学出版社

狭义相对论与航天器飞行

竺苗龙 著

青岛海洋大学出版社
一九九〇年五月

狭义相对论与航天器飞行

竺苗龙 著

*

青岛海洋大学出版社出版发行

(青岛市鱼山路5号)

潍坊计算机公司激光排版实验印刷厂排版

青岛海洋大学印刷厂印刷

*

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

开本(850×1168毫米)1/32 3.5印张 84千字

印数1—2000

ISBN 7—81026—050—2/V·1

定价： 3.20 元

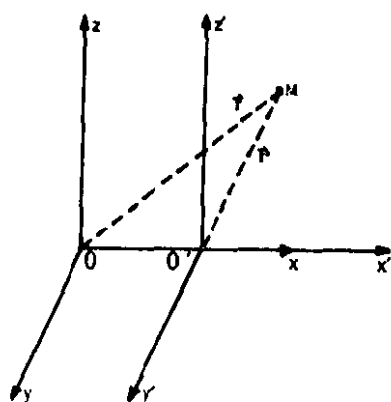
目 录

第一章 狭义相对论的时空理论.....	1
1.1 伽利略变换.....	1
1.2 平面上的坐标旋转.....	4
1.3 菲左的实验.....	7
1.4 迈克耳逊实验.....	9
1.5 洛伦兹变换.....	12
1.6 闵可夫斯基的四维几何(一).....	16
1.7 尺的收缩和钟的变慢.....	20
1.8 狭义相对论的速度变换法则.....	22
1.9 狭义相对论中的角度变换关系.....	26
1.10 间距与狭义相对论的时空观.....	29
第二章 关于高速飞船的一个图像问题.....	39
2.1 平面上的直线.....	39
2.2 平面上的圆.....	40
2.3 平面上的一般二次曲线.....	40
2.4 一般平面曲线.....	43
2.5 运动过程.....	43
2.6 平面二次曲线的 $I_i(i=1, 2, 3)$ 在洛伦兹变换下 的具体形式及其应用.....	44
2.7 空间中的平面.....	47
2.8 空间中的直线等.....	47
2.9 空间中的球面.....	48
2.10 空间中的一般二次曲面.....	48
2.11 关于二次曲面特征方程的特征根的详细分析.....	53

2.12 一般空间曲面和一般空间曲线.....	55
2.13 特殊情况——伽利略变换.....	56
第三章 狭义相对论动力学基础.....	57
3.1 狭义相对论中的基本运动方程.....	57
3.2 质量与能量的相互关系式.....	70
3.3 光子理论.....	74
3.4 光子火箭.....	79
3.5 闵可夫斯基的四维几何(续).....	81
第四章 狭义相对论与火箭飞行.....	91
4.1 阿克莱公式与齐氏公式的明确关系式.....	91
4.2 狭义相对论中多级火箭的速度表达式.....	96
4.3 多级火箭的 V_N 与 $\overline{V}_N$ 的相互关系.....	99
4.4 V_N 与 $\overline{V}_N$ 相互关系式的应用.....	101
后记.....	103

第一章 狭义相对论的时空理论

1.1 伽利略变换



图—1

如图1所示, 设坐标系 $0'-x'y'z'$ 沿着坐标系 $0-xyz$ 的 X 轴正向作匀速直线运动, 则对于空间中任意一点 M 而言, 它在 $0-xyz$ 系中的坐标与它在 $0'-x'y'z'$ 系中的坐标之间有下列的关系:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1.1)$$

或者写成矢量的形式

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1.1')$$

变换 (1.1.1) 或其矢量形式 (1.1.1') 就是经典力学中著名的伽利略变换

从变换 (1.1.1), 我们容易求得它的逆变换:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (1.1.2)$$

或者写成矢量形式

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \\ t = t' \end{cases}$$

从伽利略变换可见：一个物体在不同的参照系内其坐标是不同的。

但是距离是伽利略变换下的不变量。

这是因为

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - vt \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \\ t' = t \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x'_2 = x_2 - vt \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \\ t' = t \end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 \\ y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 \\ z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1 \end{cases}$$

故得

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} \\ &= l'_{12} \end{aligned}$$

即

$$l_{12} = l'_{12} \quad (1.1.3)$$

所以距离(也可称为相对距离)为伽利略变换下的不变量。

另外,若引进

$$\tau_{12} = t_2 - t_1$$

$$\tau'_{12} = t'_2 - t'_1$$

则显然有

$$\tau_{12} = \tau'_{12} \quad (1.1.4)$$

即一事件的时间间隔在伽利略变换下也为不变量。

将(1.1.1)的前三个式子对时间 t 求导数, 可得

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

引入物体相对于参照系 k 即 $O-xyz$ 系的速度 $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, 相对于参照系 k' 即 $O'-x'y'z'$ 系的速度

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

可得

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad (1.1.6)$$

即有

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (1.1.6')$$

这是因为 $t' = t$ 。

式(1.1.6)或(1.1.6')就是经典力学中的速度相加定理。

从(1.1.6)或(1.1.6')可见: 同一质点在某一给定的时间 t 其速度在不同的伽利略参照系内是不同的。

但是因为

$$\vec{u}'_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}$$

$$\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - \vec{v}$$

所以两物体之间的相对速度

$$\vec{u}_{12} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \vec{u}'_2 - \vec{u}'_1 = \vec{u}'_{12}$$

即

$$\vec{u}_{12} = \vec{u}'_{12} \quad (1.1.7)$$

为伽利略变换下的不变量。

若在(1.1.6)的两边再对 t 求导数, 则得

$$\begin{cases} \frac{du'_x}{dt} = \frac{du_x}{dt} \\ \frac{du'_y}{dt} = \frac{du_y}{dt} \\ \frac{du'_z}{dt} = \frac{du_z}{dt} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

所以有

$$\frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

即加速度也是伽利略变换下的不变量。

现在我们来证明: 牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

在经典力学的范围内对伽利略变换是个不变式, 根据经典力学中的相对性原理, 知道 $F = ma$ 及 $F' = m'a'$ 分别在 s 和 s' 系中成立, 由于质量 m 在经典力学中被看作不变, 而加速度 $\vec{a}$ 又在上面被证明为伽利略变换下的不变量, 所以 $m'a' = ma$ 从而 $F = F'$, 所以牛顿第二定律在经典力学范围内为伽利略变换下之不变式。

1.2 平面上的坐标旋转

对于平面上仅仅是绕原点的坐标旋转而言, 我们在解析几何中已经知道, 它们的坐标变换如下:

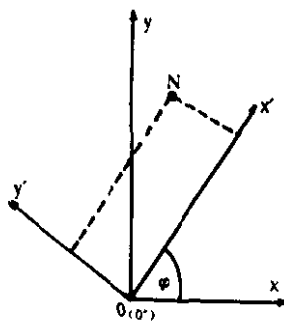


图-2

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi \end{cases} \quad (1.2.1)$$

矢量 $\vec{ON}$ 的长度 $|\vec{ON}| = A$ (也有称之为
矢量 $\vec{ON}$ 的模数或模的等)。

在坐标系 $O-xy$ 即 s 系内

$$A^2 = x^2 + y^2$$

在坐标系 $O'-x'y'$ 即 s' 系内

$$A^2 = (x')^2 + (y')^2$$

这就是说: 变换 (1.2.1) 保持平方项之和不变, 而且显见 (1.2.1) 是线性变换, 所以下述命题成立。

命题一: 线性变换 (1.2.1) 保持平方项之和不变, 即 $x^2 + y^2$ 在变换 (1.2.1) 之下是个不变量。

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 \quad (1.2.2)$$

现在我们反过来证明

命题二: 若一线性坐标变换满足平方项之和保持不变, 那么它在图 2 所示的右手坐标系下必为 (1.2.1) 的形式。

保持平方项之和不变的线性坐标变换都可写成如下形式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

要此变换满足 (1.2.2), 即要求

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

因为是在实数范围内讨论, 所以从上面的前两式可知, 此时的 a, b, c, d 其绝对值均 ≤ 1 , 因此我们可令

$$a = \cos\varphi$$

由

$$a^2 + c^2 = 1$$

可得

$$c = \pm \sin\varphi$$

(i) 取 $c = \sin\varphi$

那么从

$$ab + cd = 0$$

可得

$$\cos\varphi \cdot b + \sin\varphi \cdot d = 0$$

所以

$$b = -d \operatorname{tg}\varphi$$

从

$$b^2 + d^2 = 1$$

可得

$$d^2 + d^2 \operatorname{tg}^2\varphi = 1 = d^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = d^2 \sec^2\varphi$$

故有

$$d = \pm \cos\varphi$$

$$b = \mp \sin\varphi$$

这样我们就得到了下述的两个坐标变换:

$$\begin{cases} x' = ax + by = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y \\ y' = cx + dy = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \\ y' = \sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y \end{cases} \quad (1.2.4)$$

(ii) 若取 $c = -\sin\varphi$, 则我们同样可得如下两个坐标变换:

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \\ y' = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{cases} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y \\ y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{cases} \quad (1.2.6)$$

显见(1.2.3)和(1.2.5)可统一成一种变换,不妨用(1.2.5)代表;而(1.2.4)和(1.2.6)可统一成另一种变换,不妨用(1.2.4)代表。

在(1.2.4)和(1.2.5)两种变换中,(1.2.4)又显然是变换(1.2.5)的反演,故应除去。

所以在右手系里保持平方项之和不变的线性变换就是(1.2.5)即(1.2.1)。

故知命题二成立。

1.3 菲左(Fizeau)的实验

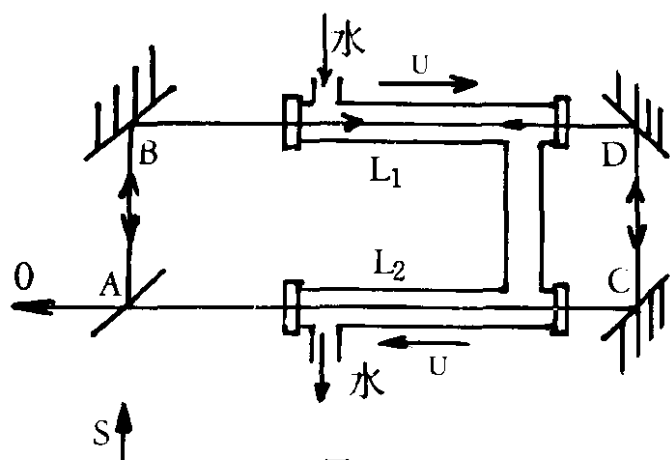
下面叙述狭义相对论的实验基础。

十九世纪初期,光的波动学说刚发展起来,当时人们以为光波与弹性波完全相仿,光的传播也需要一种弹性媒质,这种弹性媒质充满整个宇宙而且渗透在一切物体的内部,人们称这种弹性媒质为宇宙以太。

为了证实这种以太的观念,人们设计了许多实验来研究以太与物体相互作用时的特性。但是这些实验的结果无法用以太的观念来统一解释,在这许多实验中,最著名的而且后来对爱因斯坦(A. Einstein)建立相对论影响最大的实验是本节所述的菲左的实验和下节要述的迈克耳逊(Michelson)实验。

为了研究透明媒质(例如水)的运动对于这种媒质中以太的影响,菲左在1851年曾作了一个实验,这个实验的装置可用图3来说明。

当图中长度各为 L 的两管 L_1 和 L_2 中的水不流动时,光线 s 投至半镀银薄片 A 上分成两部分,分别经过 $ACDBA$ 和 $ABDCA$ 而会合在一起,观察者可以看到一定的干涉条纹。



图—3

现在使 L_1 和 L_2 两管中的流水速度为 u ，流动方向如图 3 所示，则观察者就可以看到干涉条纹的移动。

菲左按照流水可以局部带动以太的假设来对这个实验进行计算。

若设 v 是光在静水内的以太中传播的速度，而以太被流水局部带动后具有速度 αu ，其中 α 称为以太被带动的牵引系数。

那么根据经典力学中的速度相加法则，我们可得：

当光线在水中顺流进行时，它相对于此实验装置（或观察者）的速度为： $v + \alpha u$ 。

当光线在水中逆流进行时，它相对于此实验装置（或观察者）的速度为： $v - \alpha u$ 。

显然当水静止时，这两部分光线的时间差为：

$$\Delta t = 0$$

当水流动时，这两部分光线的时间差为

$$\Delta t = \frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u} = \frac{4l\alpha u}{v^2 - \alpha^2 u^2}$$

正是由于这个时间差，使观察者看到了干涉条纹的移动。

菲左在量出了干涉条纹的移动后算出了以太被带动的牵引系数

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (1.3.1)$$

其中 n 为流体的折射率。

但请注意这样的历史事实即公式 (1.3.1) 早由菲涅耳的理论时发现，而菲左的实验结果则证实了这个公式。

1.4 迈克耳逊实验

按前所述,以太可以局部地被运动的物质所带动,而且牵引系数 α 与此运动物质的折射率有关,对于折射率为 1 的媒质其牵引系数显然为零,也就是说不应带动以太。

地球周围的大气其折射率几乎为 1,所以说地球在运动中不应带动以太,故地球对于以太的运动当初人们就以为是地球对于绝对静止参照系的绝对运动。

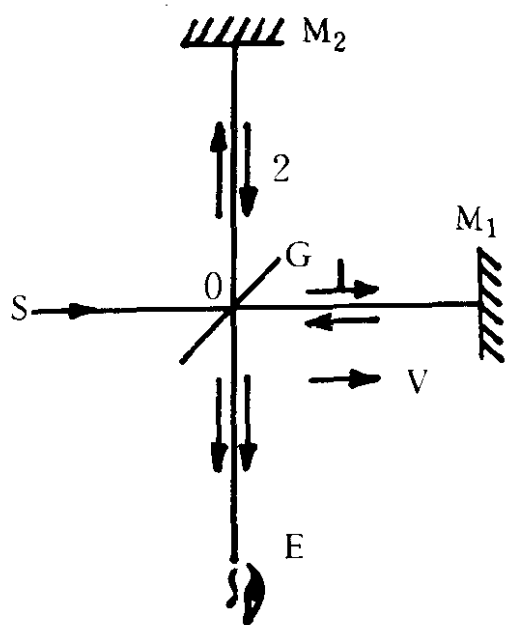
1881 年,迈克耳逊为了测定地球对于以太的绝对运动速度做了一个实验,结果完全否定了不带动以太的假设。

迈克耳逊的实验可用图 4 来说明,图中所示的装置就是通常所说的迈克耳逊干涉仪。

设 $OM_1 = OM_2 = l$

首先考虑光线 I 在平行于地球运动方向上运动的情况。

假定在静止的以太内光线的传播速度为 c ,那么对于光线 I 来说,从薄片 O 至反射镜 M_1 的路程上,根据经典力学的速度相加定理可知,光对此实验装置的速度为 $c-v$ 。而当光线 I 从反射镜 M_1 反射到薄片 O 时,根据速度相加定理,其对实验装置的速度应为 $c+v$ 。



图—4

因此当光线 I 从薄片 O 到达反射镜 M_1 再返回到 O 这段路程所需的时间 t_1 为

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

现在我们来考虑光线 II 在垂直于地球运动方向的运动情况。

因为已设在静止的以太中光线速度为 c 。

现在地球相对于以太以速度 v 运动，所以光线 II 相对于实验装置的速度应为

$$\sqrt{c^2 - v^2}$$

详见图 5。

这样从薄片 O 到达反射镜 M_2 再返回到薄片 O 这段路程中所需的时间为

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

所以光线 I 和光线 II 所经过的路程的时间差为

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (1.4.1)$$

若把迈克耳逊的实验装置在水平面内转 90° ，那么显然光线 I

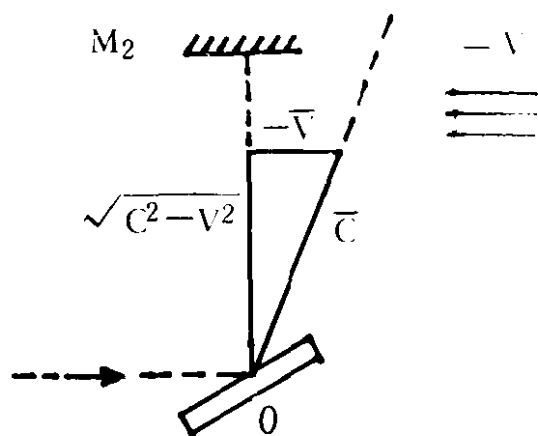


图--5

和光线 II 所经过的路程的时间差为：

$$\Delta t' = \frac{2L}{c} \left[\frac{-1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = -\Delta t \quad (1.4.2)$$

根据泰勒展开

$$(1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \dots$$

$$(1 - \alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \dots$$

可知

$$\Delta t = \frac{L}{c} \beta^2 \quad (1.4.3)$$

因此两个时间差的改变量是

$$\frac{2L}{c} \beta^2$$

$$\text{其中 } \beta = \frac{v}{c}$$

这个改变量决定了仪器转动 90° 后干涉条纹的移动。当时间的改变量是光振动的一个周期 T 时，就引起一条干涉条纹的移动。

一般，条纹移动的总数 Δn 决定于下式

$$\Delta n = \frac{2L\beta^2}{cT} = \frac{2L}{\lambda} \beta^2 = \frac{2L}{\lambda} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (1.4.4)$$

从上式可解出 β ，而由 $\beta = \frac{v}{c}$ 可算出地球相对于以太的运动速度，这里 λ 是光波的波长。

按照迈克耳逊的实验装置，我们预先来估计一下条纹移动的总数。假设 v 约略等于地球绕太阳轨道而运行的速度即

$$v = 3 \times 10^6 \text{ cm/秒}$$

实验装置中 L 的长约为 11m ，光波的波长约为 $5.9 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ，所下干涉条纹的移动数约为

$$\Delta n = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} = \frac{2 \times 11 \times 10^2 (3 \times 10^6)^2}{5.9 \times 10^{-5} \times (3 \times 10^{10})^2} \doteq 0.4$$

根据实验装置的精确度，应该在实验中观察到这种干涉条纹的移动。

但是迈克耳逊在不同的地理条件和不同的季节条件下多次进行实验却始终没有观察到干涉条纹的移动。迈克耳逊的这一实验结果引起了当时人们广泛而热烈的争论。

如果假定以太完全被地球所带动（即此时地球相对于以太的速度为零），这样虽能说明干涉条纹没有移动，但却与菲左的实验结论完全不符，而且还与其它的许多现象相矛盾。

人们本来就对所谓的宇宙以太观念有着这样或那样的怀疑，迈克耳逊的这一实验结果空前地加深了这个危机。虽然当时也有人提出过一些企图不推翻以太理论的其它假定或进行过其它的许多实验来测定地球的绝对运动，但都没有收到成效。

一直到一九〇五年，爱因斯坦在这些实验和争论的基础上提出了关于狭义相对论的两个著名的假设并在此基础上建立了狭义相对论的理论，这些矛盾才在相对论的范围内得到了统一、圆满的解决。

1.5 洛伦兹变换

1905年，爱因斯坦提出了如下两个著名的假设

（一）相对性原理：在两个彼此相对作匀速直线运动的实验室内，一切物理现象的进行是相同的（在相同的条件下）。

（二）光速不变原理：真空内的光速在任何方向都相同，而与光源的运动无关。

在这两个基本假设下，我们可以推导出洛伦兹变换。

为此，我们来研究两个沿 ox 轴方向以速度 $\vec{v}$ 彼此相对作匀速直线运动的参照系（参见图 1）。

设在起始时刻（当两个参照系在空间内相合时），从坐标原点发出光讯号，我们来研究波阵面在参照系 s 和 s' 的传播情况。