地震波理论与应用

冯德益 编著

地震出版社

地震科学联合基金会资助出版

地震波理论与应用

冯德益　编著

地震出版社

1988

内 容 提 要

本书是一本全面介绍地震波理论与应用的专著。

全书共分十五章。第一至九章介绍地震波基本理论，包括地震波基础知识，平面波理论，均匀与非均匀层状介质、非理想弹性介质、多相介质和各向异性等介质中地震波传播理论，以及几何形状复杂的介质中地震波的传播，绕射与散射理论等，第十章介绍地震波反演问题的解法，是地震波应用的基础。第十一至十五章分别介绍地震波在地球内部构造研究、地震研究、地震勘探、爆炸研究及地震工程中的某些应用。

本书可供地震、地球物理、石油与煤田地震勘探、矿业、地质、地震工程、爆破工业与核爆炸研究等科研与产业部门的科技人员和高等院校有关专业的师生参考，也可作为科研单位与大学中有关专业的研究生和在职科技干部专业培训的教材使用。

地震波理论与应用

冯德益　编著

责任编辑：吴　兵

*

地 震 出 版 社 出版

北京复兴路63号

一二〇一工厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

787×1092　1/16　32印张　819千字

1988年11月第一版　1988年11月第一次印刷

印数0001—1500

ISBN 7-5028-0034-4/P·35

（447）　定价：13.80元

前　　言

地震波是地球内部信息的主要来源。地球物理界和地学界的科技人员都要不同程度地，直接或间接地接触到地震波的知识，许多重要科研课题及经济建设项目都要借助于地震波这个工具。例如，在地震学领域，地震波方法是研究天然地震及地球内部构造的重要手段，近年来还用于研究月球，火星等其他星球的震动与构造；在地震勘探学领域，地震波方法常用于石油、天然气及其他矿产的探测工作以及矿山崩塌的监测与防护工作；在爆炸力学方面，地震波可用于研究爆炸效应及核爆炸的监测，鉴别与隐蔽；此外，用地震波还可研究火山效应，地质滑坡，台风中心的测定以及北极，南极冰层结构等多种领域内的课题。

为了介绍地震波理论知识，提高地震波应用水平，培养研究地震波方面的专门人才，特编写了本书。由于地震波的应用范围很广，本书着重介绍一些共同的基础理论及某些典型的应用问题，以便适应广大读者的需要。对于初学者来说，为了阅读本书，还需要掌握连续介质力学，尤其是弹性力学的基础知识以及一些常用的高等数学方法。这些预备性知识可在相应的教科书与参考书中查到，本书不再重复。

本书系作者二十多年来在地震波理论和应用方面所进行的研究与文献调研工作的结果。力求广揽国际上各家所长，并把经典内容与当代最新内容相结合以贯穿成一体。书中的部分内容近年来曾多次在中国科学院研究生院地学专业研究生班及国家地震局系统专业科技人员培训班讲授。由于涉及内容相当广泛，虽经多次修改与补充，仍难免有不完备、不妥当之处，敬请同行们多加指正！

本书编写过程中，曾得到傅承义教授和曾融生教授的热情支持与鼓励，陈运泰研究员审阅了初稿并提出了宝贵意见，孙国璋等同志协助清绘图件；在出版过程中，曾得到地震出版社和地震科学联合基金会的支持与赞助，在此一并表示衷心的感谢！

作者谨以此书献给地学界从事地震波理论与应用研究方面的科研人员，石油、地质、矿业、国防等工业部门从事地震勘探研究与爆炸效应研究的工程技术人员，以及地球物理、地球物理勘探专业的研究生和大专院校有关专业的师生。

冯　德　益

1987年3月　北京

本书所用数学符号

u：位移矢量

$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$：质点速度矢量

u_x, u_y, u_z：在(x, y, z)坐标系中的位移分量

q, w：位移的水平与垂直分量

e：应变，地面出射角

σ：应力

σ_n, τ_n：正应力，剪应力

$\bar{\theta}$：体积膨胀量

Φ, Ψ或φ, ψ：纵波与横波的位移势

p：压力

ρ：密度

λ：波长，拉梅系数

K：体膨系数

ω：圆频率，空间角，旋转量

ν：频率，泊松比

μ：剪切模量

$\gamma=v_P/v_S$：波速比

Σ：界面

S：波面，曲面

τ：走时

Δ：震中距，角震中距

θ：入射角或自震源的出射角

θ^*：临界角

k：波数

k_{ij}, k_γ：相对于位移的反射-折射系数

$æ_\nu$：相对于位移势函数的反射-折射系数

ξ：复波数

i：球对称介质中的入射角或自震源的出射角

v：波速，相速度

v_P、v_S：P、S波速度

D：间断面传播速度

c：相速度，声速

U：群速度

a, b：P、S波慢度

$S(\nu)$、$S(\omega)$：频谱

T：周期

$\mathbf{e}$：单位矢量

h：介质层厚度

H, z_0：震源深度

χ：位相函数

I, J：反射波与首波强度

$H(t)$：亥维赛函数

α, β：吸收系数

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$：矢量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角

$(\mathbf{ab})=\mathbf{ab}$：矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的数积

$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$：矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的矢积

$f'(x)$：导数$\frac{df}{dx}$

$z_{,\alpha}=\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$：函数$z$对变量$x_\alpha$的偏导数

目　　录

绪　论

在一般情况下，地球介质可看成是弹性或主要具有弹性性质的介质，因而在地球内部传播的周期不特别长的波都可看作弹性波或以弹性成分为主的波，这些波可统称为地震波。显然，地震波的激发源不仅限于天然地震，而且还包括爆炸、崩塌、冲击、可控震源及其他人工振动源等多种。

地震波观测与研究是地震学和地震勘探学的基础。有人说，地震学就是建立在地震记录图基础上的科学；而地震勘探方法更是直接依赖于对地震波的检测与分析。因此，研究地震波始终是地震学和地震勘探学的核心课题。不仅如此，地震波还在其他许多科学技术和产业部门得到相当广泛的应用。

人类研究地震波已有很久的历史，早在我国东汉时期，张衡设计候风地动仪时就考虑到了地震波的振动原理，以便在远离震中的地方能测出地震的发生时间与大致方位。十六世纪以来，科学家们已对地震波作了相当详尽的研究，为我们今天的工作打下了扎实的基础。下面列出与地震波研究有关的一些重大工作与发现。

1638年，伽利略(意)研究了一端固定的横梁受荷载时的形变问题，即伽利略问题。

1660年，胡克(英)发现了著名的胡克定律，建立了应力与应变的关系。

1760年，米歇尔(英)认识到地震时要从地球内部发射出弹性波。

1821年，内维尔(法)推导出弹性理论的微分方程(弹性固体的平衡与振动的普通方程)。

1822年，柯西(法)建立了弹性理论的大部分理论基础。

1828年，柯西(法)得出了完全弹性体内的波动方程；泊松(法)从理论上证实了纵波和横波的存在，计算出它们的速度比为$\sqrt{3}$，同时还研究了球体的自由振荡。

1839年，格林(英)解释了弹性波的反射与折射现象。

1845年，斯托克斯(英)观测了正应力和切应力，引进了压缩模量和切变模量。

1848年，马利特(英)第一次用人工爆破方法观测地震波速度，奠定了折射波法的基础。

1880年，格雷、米尔恩和伊文(美)在日本研制了地震仪，主要记录近震，直到1889年首次记到远震。

1881年，伊文(美)分析出地震波的两个震相。

1885年，索米利亚那(意)推导出内维尔方程的形式解，广泛地用于震源和边界条件。

同年，雷利(英)从理论上导出了面波的存在。

1888年，施米特(德)发表了地球内部地震波传播的论文。

同年，利波尔、伯希维茨(德)研制出光杆放大照相记录地震仪，并于次年分析了第一张远震记录图。

1892年，米尔恩(英)在日本建立了第一个适宜于全球观测的简便地震仪。

1897年，维歇尔特(德)提出了地球存在流体地核的猜想；奥尔德姆(英)证明了P，S，R震相的存在。

1898年，中国上海徐家汇地震台开始记录。

1899年，诺特(英)推导出了平面波在界面上折射与反射的方程，并研究了折射波与反射波的能量。

同年，奥尔德姆(英)第一次作出P，S波时距曲线。

1900年，维歇尔特(德)研制出机械地震仪。

1903年，洛夫(英)发展了无限空间内点源地震波的基本理论。

1904年，拉姆(英)研究了在弹性半空间内波的传播问题。

1906年，奥尔德姆(英)从地震资料上验证了维歇尔特猜想，即证实了铁核的假说。

同年，伽利津(俄)设计并制成了新的地震仪。

1907年，伏尔特拉(意)基于索米利亚那的解提出了位错理论。

1909年，莫霍诺维奇(南)发现了P_n波及地壳与地幔的分界面，用反射波走时估计了这一分界面及地球内其他层的深度。

1910年，里德(美)提出了构造地震的弹性回跳理论。

同年，古登堡(美)计算了地球内部P，S波的速度分布。

1911年，洛夫(英)发展了波在覆盖于半无限固体之上的薄层内的传播理论，并研究了相应的面波。

1913年，古登堡(美)用地震波方法测量了地核的直径。

同年，费森登(德)提出了地震勘探的反射波法，并用声学方法确定了海洋的厚度。

1914年，古登堡识别出P_cP，S_cS，PKP震相。

1917年，费森登(德)首次用反射波法找矿石。

1919年，明储普(德)完善了反射波地震勘探法。

1924年，以明储普(德)为首的勘探队在德克萨斯州用地震折射波方法发现了第一个油田。

同年，斯通利(英)推导出了两个介质的分界面上可能存在的界面波。

1925年，安得逊与伍德(美)研制出光记录扭转地震仪。

同年，康拉德(奥)识别P^*震相，提出康拉德界面。

1932年，贝尼奥夫(美)研制出可变磁阻地震仪。

1935年，伊文(美)等第一次在大西洋上测量折射波，完善折射波方法。

同年，里克特(美)提出了用地震波测定地震震级的方法，即里氏震级标度。

1936年，古登堡和里克特提出了地震能量与震级的测定方法。

同年，莱曼(丹麦)识别P'和$PKIKP$，提出地球内还存在固体内核的观点。

1939年，古登堡、杰弗里斯(英)利用射线理论推导了地球内部结构。

1940年，杰弗里斯(英)和布仑(澳)发表了地球内部地震波走时表；布仑提出地球分层模型。

1952年，伊文、普瑞斯(美)发展了灵敏的长周期地震仪，并提出L_g，R_g震相及地壳低速层。

1954年，甘布尔采夫(苏)提出了在苏联用深部地震探测法研究地球内部结构的新方向。

1960年，佩克里斯(以色列)等从分析1960年5月22日智利大地震的记录确定了地球自由振荡的存在。

1964年，安艺敬一(美)引进了地震矩这一新概念。

1969年，美国在月球上安放了地震仪并得到了第一张月震图。

近二十年来，地震波研究工作发展得尤为迅速。监测地下核爆炸的任务，寻找以油田(包括海底油田)为核心的地下资源，探索地球与星球内部详细构造，特别是实现地震预报与防震抗震，都是地震波理论与观测技术持续蓬勃发展的巨大动力。

地震波有以下四个主要研究方向：

1. 地震波理论

如同其他科技领域一样，地震波的基础理论研究一般都要走在应用前面，并且要随着应用上的要求而不断深化与发展。本世纪初，拉姆、雷利、洛夫等进行的开创性地震波理论研究工作，至今仍保留有重要意义，被写进各种教科书。在三十年代及四十年代，美国的古登堡、英国的杰弗里斯，日本的妹泽克惟，苏联的斯米尔诺夫、索波列夫以及美国的伊文等许多著名学者都对地震波理论作了多方面的研究。早在四十年代中期，我国著名地球物理学家傅承义教授就在美国发表了关于地震射线、地震波能量、地震波速度测量、地震面波、地震波的反射与折射等多篇专门研究地震波理论的学术论文。到了五十年代，地震波理论研究又有迅速的发展，从研究单层介质到多层介质，从研究均匀弹性介质到非均匀、非完全弹性介质，理论愈趋深化，方法愈趋完善，而且愈来愈多地使用电子计算机。这一时期研究地震波理论的学者很多，代表人物如美国的伊文、普瑞斯、诺波夫，苏联的彼得拉辛、布列霍夫斯基赫，以色列的佩克里斯、本梅纳汉，瑞典的巴特，日本的本多弘吉等。近十多年来，各国学者比较集中地研究以下几个方面的地震波理论问题：(1)震源及震源区的模拟，有限断裂震源，有限移动震源等；(2)理论地震图的有效计算方法，这里经常采用的有广义射线法、传播函数矩阵法及反射率法等；(3)简正振型的研究，目的是为了解释超长周期面波资料，此时考虑了地球自转速度以及钱德勒晃动等；(4)横向均匀地球介质中的体波与面波特性，研究多次反射、折射及转换波，薄层介质中的屏蔽波以及焦散现象，散射现象等，同时还研究地震波在多相介质，非线性弹性介质，微极弹性介质，各向异性介质等中的传播问题；(5)有横向变化的地球介质，即三维不均匀介质中的地震波传播问题，目的是研究地下的横向不均匀构造；(6)地震波的衰减，品质因子 Q，粘弹性介质及流变介质中的地震波传播理论；(7)数值计算方法，尤其是有限差分法和有限元法在地震波理论研究中的应用；(8)地震波的反演问题，尤其是三维反演问题；不仅根据地震波运动学特性(走时曲线、频散曲线等)进行反演，而且根据其动力学特性(振幅、频谱等)进行反演；近年来又提出了地震波层析图象技术。

2. 地震波观测

地震波观测包括地震仪器的革新和观测技术的改进，观测方法的完善等。在天然地震观测中，近20年来设计出了多种类型的，不同频率区间和不同实际用途的地震仪器。一些国家相继建立了地震台阵，微震观测台网及井下地震台网。有线和无线电信传输台网也在不少国家发挥了巨大作用，并取代了过去的观测台网。近年来，地震仪器正在向数字化、轻便化和专门化方向发展。地震勘探仪器与观测技术进展更快。50年代主要使用光记录地震仪，60年代改用磁带记录，现在已革新为数字地震仪，发展了共反射点叠加技术以及地层细结构的彩色显示技术等多种新技术，广泛使用汽枪、气体爆炸器及可控震源等非炸药震源。尤其是可控震源系统的应用，为地震勘探工作打开了新局面，大大缩短野外工作时间，可以对一些条件较困难的地区开展工作，还可以大大增加勘探深度。遥测技术也在地震勘探工作中得到应

用，尤其是在海上勘探中还应用了卫星导航系统。

3. 地震波分析处理

自1880年出现第一张天然地震记录图以来，不少地震学者在图纸分析与资料处理上都下了功夫。单为识别出S波的物理实质，就花了许多年的时间。原来在地震图上见到了两个明显的震相，称为“初始波”和“第二波”，简称P、S波，1906年以后才证实S波是横波。地震定位问题也经历了一段探索过程。自本世纪30年代以来，古登堡、里克特、杰弗里斯、布仑、萨瓦连斯基、特列什可夫、斯通利、巴特、和达清夫等许多杰出的地震学家都为探索地震图分析方法作出过重要贡献。近20年来，不少人在震源位置的计算确定法，地震震级标准的改进，地震矩等新的震源参数的测定以及其他一些资料分析处理方面作了大量的工作。目前，地震图的计算机识别，地震信号的数字记录，地震的自动定位，地震分布图的计算机描绘，震中目录的自动编制与修定等软件工作，有些国家已完全开展，我国也正在进行。在地震勘探的数据处理方面，数字化完成得更早，电子计算机早已得到广泛应用，数字滤波、多次叠加、相关分析与自相关分析、计算机自动速度分析，自适应速度分析等多种新的计算技术已发挥重要作用。

4. 地震波模拟实验

配合理论与野外观测，地震波模拟实验也一直在平行发展。本世纪50年代就已广泛采用超声波技术进行地震波模拟实验。现在已经发展到可以观测三轴压力作用下固体介质中地震波特性的变化，岩石破裂过程中地震波特性的变化，并进行模拟地球深部介质在高温、高压条件下的地震波实验等。实验室设备日趋完善，观测已实现自动控制，实验数据可及时用计算机处理并进行自动分析。

尽管对地震波的研究在理论、观测技术、资料分析处理及模拟实验等方面都在不断迅速发展，各时期得出的一些经典的、基础性的、比较成熟的理论与应用成果始终是继续从事本项研究工作必不可少的指南。

第一章　弹性波传播的基本理论知识

§1.1　弹性波传播问题的数学提法

1.1.1　弹性介质运动方程的各种表达形式

1.　通过位移、粒子速度或应力表示的原始形式(内维尔-柯西方程)

$$\rho\frac{d\dot{u}}{dt}=\rho\frac{d^2u}{dt^2}=\rho F+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z},\tag{1.1.1}$$

式中 u 为位移，$\dot{u}$为粒子速度，F为体力，σ_i为作用在以x_i方向为法线方向的面上的应力矢量，$x_1=x$、$x_2=y$、$x_3=z$，ρ为介质密度。

2.　通过位移表示的形式(拉梅方程)

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,u+\mu\Delta u_i+\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\mathrm{div}\,u+\mathrm{grad}\,\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\mathrm{grad}\,u_i\right)+\rho F_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}$$

$$(i=1,2,3),\tag{1.1.2}$$

式中u_i，F_i分别表示u和F在坐标x_i方向的分量，λ、μ为拉梅系数。

对于均匀弹性介质有：

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u+\mu\Delta u+\rho F=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\tag{1.1.3}$$

通常可以取 $F=0$，式(1.1.3)也可写成另一形式：

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\bar{\theta}-2\mu\,\mathrm{rot}\,\omega+\rho F=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\tag{1.1.4}$$

式中$\bar{\theta}=\mathrm{div}\,u$，$\omega=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,u$.

3.　通过体积膨胀量表示的形式

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\bar{\theta}+\mathrm{div}(\rho F)=\rho\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial t^2},\tag{1.1.5}$$

或

$$\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\nabla^2\Theta+\mathrm{div}(\rho F)=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\rho\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2},\tag{1.1.5a}$$

式中$\Theta=(3\lambda+2\mu)\bar{\theta}$，$\nu$为泊松比，$E$为杨氏模量。假定体力场是保守的，或是常力，即$\rho F=\mathrm{grad}\,\Omega$，其中$\Omega$为势函数，满足$\nabla^2\Omega=0$，则有

$$\nabla^2\bar{\theta}=\frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\Theta=\frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2},\tag{1.1.6}$$

式中$v_P=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$为弹性纵波速度。

4.　通过应力表示的形式(拜脱拉密-米奇尔方程)

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{div}\,\rho F)+2\frac{\partial\rho F_x}{\partial x}=\frac{2(1+\nu)\rho}{E}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{(1-\nu)E}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2};\tag{1.1.7}$$

$$\nabla^2\sigma_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial\rho F_z}{\partial y}+\frac{\partial\rho F_y}{\partial z}\right)=\frac{2(1+\nu)\rho}{E}\frac{\partial^2\sigma_{yz}}{\partial t^2}.$$

其它应力分量所满足的方程式与此类似。为了简化，本书一概用σ_α代表$\sigma_{\alpha\alpha}$，$\alpha=x,y,z,\cdots$。

5\. *通过势函数表示的形式*

任意位移矢量u可分解为：

$$u=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{rot}\psi.\tag{1.1.8}$$

$$\mathrm{div}u=\nabla^2\varphi=\Phi,\quad \mathrm{rot}u=\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\psi=\psi.\tag{1.1.8a}$$

将式(1.1.8a)代入式(1.1.4)可得：

$$v_P^2\,\mathrm{grad}\,\Phi-v_S^2\mathrm{rot}\Psi+F=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\tag{1.1.9}$$

式中　$v_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$为弹性横波速度。

在边界面Σ上应力的表达式为：

$$\frac{\sigma_n}{\rho}=(v_P^2-2v_S^2)\Phi n+v_S^2 n\times\Psi+2v_S^2(n\,\mathrm{grad})u,\tag{1.1.9a}$$

式中σ_n为边界面上的应力矢量，n为边界面Σ的法向单位矢量并且指向外边。

通常可以忽略体力F，此时式(1.1.9)可化为两个方程：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\Phi&=\mathrm{div\,grad}\,\Phi=\frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\\ \Delta\Psi&=\mathrm{rot\ rot}\ \Psi=\frac{1}{v_S^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.10}$$

由式(1.1.10)、(1.1.8a)可以得出：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi&=\frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\\ \Delta\psi&=\frac{1}{v_S^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\end{aligned}\right\}\tag{1.1.11}$$

式中$a=1/v_P$，$b=1/v_S$，为P、S波的慢度。

由式(1.1.8)可知，为了确定位移u，只需要把φ规定为任意时间函数$f(t)$的精确度、即$\varphi+f(t)$；而ψ则可定到任意势函数$\mathrm{grad}\chi$的精确度内，即$\psi+\mathrm{grad}\chi$. 式(1.1.11)中ψ所满足的补充条件为：

$$\mathrm{div}\psi=\Delta\chi=b^2\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}.$$

在不影响u值的情况下可令$\chi=0$，即得$\mathrm{div}\psi=0$. 边界面上的应力表达式为：

$$\sigma_n=\lambda\nabla^2\varphi n-\mu n\times\nabla^2\psi+2\mu(n\,\mathrm{grad})u.\tag{1.1.12}$$

由式(1.1.10)、(1.1.11)可以看出，v_P是体积膨胀量的传播速度，v_S是粒子旋转(剪切)运动的传播速度。

6\. *考虑温度效应的运动方程*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mu\nabla^2 u+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,u-\beta K\nabla T+\rho F, \tag{1.1.13}$$

式中$\beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$是常压体积膨胀系数、$K$为体积膨胀(压缩)模量。

1.1.2 曲线坐标系中的弹性力学方程组与基本关系式

1. 普遍情况

考虑一般的曲线坐标系(α, β, γ)与直角坐标系(x, y, z)间的变换给出:

$$dS^2=\frac{d\alpha^2}{h_1^2}+\frac{d\beta^2}{h_2^2}+\frac{d\gamma^2}{h_3^2}=H_1^2d\alpha^2+H_2^2d\beta^2+H_3^2d\gamma^2,$$

$$dV=H_1H_2H_3d\alpha d\beta d\gamma,\quad H_i=h_i^{-1}\qquad (i=1,2,3),$$

$$h_1^2=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\cdots,$$

$$H_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2\cdots,$$

dS为单元弧长，dV为单元体积，即:

$$dS^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

$$dV=dxdydz;$$

对任意函数f有:

$$\mathrm{grad}\,f=h_1\frac{\partial f}{\partial\alpha}i_1+h_2\frac{\partial f}{\partial\beta}i_2+h_3\frac{\partial f}{\partial\gamma}i_3,$$

式中i_1, i_2, i_3是α, β, γ方向上的单位矢量，而对于任意矢量$\mathbf{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$则有:

$$\mathrm{div}\mathbf{Q}=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2h_3Q_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1h_3Q_2)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1h_2Q_3)\right],$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{Q}=\begin{vmatrix} H_1i_1 & H_2i_2 & H_3i_3\\ \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial\beta} & \frac{\partial}{\partial\gamma}\\ H_1Q_1 & H_2Q_2 & H_3Q_3\end{vmatrix}.$$

(1) 应变分量

$$\left.\begin{aligned}
e_\alpha=e_{\alpha\alpha}&=h_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+h_1h_2u_\beta\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+h_1h_3u_\gamma\frac{\partial H_1}{\partial\gamma},\\
e_\beta=e_{\beta\beta}&=h_2\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+h_2h_3u_\gamma\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}+h_1h_2u_\alpha\frac{\partial H_2}{\partial\alpha},\\
e_\gamma=e_{\gamma\gamma}&=h_3\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+h_1h_3u_\alpha\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}+h_2h_3u_\beta\frac{\partial H_3}{\partial\beta};\\
e_{\beta\gamma}&=\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3u_\gamma)+\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2u_\beta),\\
e_{\gamma\alpha}&=\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1u_\alpha)+\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_3u_\gamma),\\
e_{\alpha\beta}&=\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2u_\beta)+\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1u_\alpha).
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.14}$$

设矢量n的方向余弦为l、m、n，则

$$e_n=e_\alpha l^2+e_\beta m^2+e_\gamma n^2+e_{\beta\gamma}mn+e_{\gamma\alpha}nl+e_{\alpha\beta}lm.$$

（2）体积膨胀及基本单元的旋转

$$\bar{\theta}=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_1h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_2h_1}\right)\right];$$

$$2\omega_\alpha=h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)\right];$$

$$2\omega_\beta=h_3h_1\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)\right];$$

$$2\omega_\gamma=h_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\ \frac{u_\beta}{h_2}-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right].$$

因l，m，n是表面Σ的外法线方向余弦，则

$\Omega_n=\omega_x l+\omega_y m+\omega_z n$是基本单元的旋转在表面$\Sigma$上的法向分量。

（3）拉梅运动方程

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)h_1\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\alpha}-2\mu h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)\right]+\rho F_\alpha=\rho\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)h_2\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\beta}-2\mu h_1h_3\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)\right]+\rho F_\beta=\rho\frac{\partial^2u_\beta}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)h_3\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\gamma}-2\mu h_2h_1\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)\right]+\rho F_\gamma=\rho\frac{\partial^2u_\gamma}{\partial t^2}.
\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

（4）胡克定律

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_\alpha=\lambda\bar{\theta}+2\mu e_\alpha,\ \sigma_\beta=\lambda\bar{\theta}+2\mu e_\beta,\ \sigma_\gamma=\lambda\bar{\theta}+2\mu e_\gamma\\
&\sigma_{\beta\gamma}=\mu e_{\beta\gamma},\ \sigma_{\gamma\alpha}=\mu e_{\gamma\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta}=\mu e_{\alpha\beta};\ \sigma_{jj}=\sigma_j,\ j=\alpha,\ \beta,\ \gamma
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.16}$$

（5）弹性势函数$W(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$

$$2W=(\lambda+2\mu)\bar{\theta}^2+\mu(e^2_{\beta\gamma}+e^2_{\alpha\gamma}+e^2{}_{\alpha\beta}-4e_\gamma e_\beta-4e_\gamma e_\alpha-4e_\alpha e_\beta).$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_\alpha}=\sigma_\alpha,\quad\frac{\partial W}{\partial e_\beta}=\sigma_\beta,\quad\frac{\partial W}{\partial e_{\beta\gamma}}=\sigma_{\beta\gamma}.\cdots$$

2．圆柱坐标$(R,\ \theta,\ z)$

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta;\ H_R=1;\ H_\theta=R,\ H_z=1;$$

$$dS^2=dR^2+R^2d\theta^2+dz^2,\ dV=RdRd\theta dz.$$

（1）应变分量

$$\left.\begin{aligned}
&e_R=\frac{\partial u_R}{\partial R},\ e_\theta=\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},\ e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z};\\
&e_{\theta z}=\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z},\ e_{zR}=\frac{\partial u_R}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial R},\\
&e_{R\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_R}{\partial\theta}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.17}$$

（2）体积膨胀及基本单元的旋转

$$\bar{\theta}=\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial R}(Ru_R)+\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$2\omega_R=\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_z}{\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial z},\quad 2\omega_\theta=\frac{\partial u_R}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2\omega_z=\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial R}(Ru_\theta)-\frac{1}{R}\ \frac{\partial u_R}{\partial\theta}.$$

(3) 运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_R}{\partial R}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial\sigma_{R\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{Rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_R-\sigma_\theta}{R}+\rho F_R=\rho\ \frac{\partial^2u_R}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial\sigma_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2}{R}\sigma_{R\theta}+\rho F_\theta=\rho\ \frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial\sigma_{Rz}}{\partial R}+\frac{1}{R}\ \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{R}\sigma_{Rz}+\rho F_z=\rho\ \frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.18}$$

3. 球坐标(r, θ, φ)

$x=r\sin\theta\cos\varphi$; $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$; $H_r=1$, $H_\theta=r$, $H_\varphi=r\sin\theta$.

(1) 应变分量

$$\left.\begin{aligned}
&e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_\theta=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\\
&e_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r},\\
&e_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\\
&e_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r},\\
&e_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_r}{\partial\theta}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.19}$$

(2) 体积膨胀及基本单元的旋转

$$\left.\begin{aligned}
&\bar\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ (r^2u_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(ru_\theta\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(ru_\varphi),\right.\\
&\omega_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(ru_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(ru_\theta)\right],\\
&\omega_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ru_\varphi\sin\theta)\right],\\
&\omega_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ (ru_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right].
\end{aligned}\right\}$$

(3) 运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta\\
&\qquad-\sigma_\varphi+\sigma_{r\theta})\operatorname{ctg}\theta+\rho F_r=\rho\ \frac{\partial^2u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta\\
&\qquad+3\sigma_{r\theta}]+\rho F_\theta=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi}\\
&\qquad+2\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta)+\rho F_\varphi=\rho\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.20}$$

4. 抛物坐标(u, v, θ)