Fanhan Fenxi

吴绍平 编

泛函分析及其应用

Fanhan fenxi jiqi YingYong

浙江大学出版社

泛函分析及其应用

吴绍平　编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书介绍Banach空间中算子方程的可解性理论，共11章，包括：线性算子谱理论、椭圆边值问题广义解、迭代法、拓扑度、分歧、变分方法、发展方程和半群、单调算子理论等。既收入了有关分支的重要定理，又尽量使讨论简明、扼要、自足。读者能由此了解无穷维空间和有穷维空间中可解性理论的本质差别；了解紧性、自伴性、压缩性和单调性在无穷维分析学中的作用。每一章节都有例子说明如何把具体方程放到抽象框架中并应用相应的理论。

对象：对微分方程、泛函分析有兴趣的大学高年级学生、研究生和科研、工程技术人员。

泛函分析及其应用

吴绍平 编

责任编辑 朱谨准

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 850×1168 1/32 印张 8.6875 字数 218千字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数 0001-1500

ISBM 7-308-00636-0/O·085 定价：2.30元

序 言

随着自然科学、工程技术、特别是计算机科学技术的发展，泛函分析已日益渗透到数学的许多分支，特别是微分方程，因而它与力学、物理学、生物学、化学工程和控制论等许多学科理论发生紧密联系。国内外许多大学已把它列为研究生必修课程，越来越多的工程技术方面的研究生和研究人员也感到需要泛函分析的知识。

广义函数的引进，Sobolev空间理论的发展使得各种类型的微分方程都可以放在某个适当选择的函数空间（因而是无穷维空间）中研究。泛函分析的理论与方法和微分方程的硬分析技巧相结合，解决了一大批应用问题，推进了许多问题的研究。泛函分析的定性理论为数值求解提供了许多方法和信息，另一方面高速计算机的发展使得许多复杂的方程可以近似求解，这种近似结果又为理论研究的进一步深入指出了方向。

本书极其简炼地介绍了泛函分析的基本理论、思想和它的几个重要分支，介绍了积分方程、微分方程边值问题、发展方程的现代理论，它包含的许多抽象结果和应用将读者引导到相关领域的前沿，它不仅可作为研究生和高年级学生的教材，对搞应用学科和工程技术的非泛函分析专家们也是值得一读的。

董光昌

1990年5月22日

作者序

近十多年来在许多大学里，泛函分析已作为数学系、应用数学系研究生一个学年的公共课。本书是在作者为第二学期课程准备的讲义基础上写成。在成书时，考虑到大学生和工科研究生的需要，增加了预备知识，补充了一些说明和证明。

本书介绍Banach空间中算子方程的可解性理论，在组织材料时，着力于说明有穷维空间和无穷维空间中可解性理论的本质差别，尽量用例子来说明各种抽象概念引进的必然性。使读者能了解在无穷维空间中处理线性和非线性算子方程的基本思想、理论和方法，特别是紧性、自伴性、压缩性和单调性在无穷维分析学中的重要作用。它既收入了有关分支的重要定理使读者能窥见这些分支的核心，又尽量使讨论简明、扼要、自足。书中采用一些典型例子来说明如何把具体方程放到适当的抽象框架中以便应用相应的抽象理论来讨论它的可解性。

作者感谢董光昌先生审阅了书稿并提出了许多宝贵意见，本书第九章、第十章是在他的建议下增加的。

作者感谢L.Nirenberg教授允许我引用他在Courant研究所讲课的笔记。

此时作者也想起了已故的导师关肇直先生，是他引导我一直注意泛函分析的应用。

吴绍平

1990年4月于浙江大学

基本符号

$\mathbf{R}^1$　实数域

$\mathbf{R}^n$　n 维欧氏空间

$\mathbf{R}^1_+$　非负实数

$\mathbf{C}$　复数域

ϕ　空集

$\mathbf{N}$　正整数

$\mathrm{Im}\lambda$　λ 的虚部

$\mathrm{Re}\lambda$　λ 的实部

$\bar{\lambda}$　λ 的复共轭数

$\cup$　集合的并

$\cap$　集合的交

$\backslash$　集合的差

$\bar{\Omega}$　集合的闭包

$\dot{\Omega}$　集合的内部

$\partial\Omega$　集合的边界

目 录

第一章　有界线性算子

§1　基本知识

为了读者方便，在这一节里我们先叙述一些基本概念和结果，他们大部分可以在大学泛函分析教材中找到，特别可参阅[1,2,3]。

定义1.1　称线性空间X是赋范空间，如果对其中每个元u给出实值函数$\|u\|$具有下列性质：

(i) $\|u\|\geqslant 0$，其中等号成立当且仅当$u=0$；

(ii) $\|\alpha u\|=|\alpha|\|u\|$，这里$\alpha\in\mathbf{C}$；

(iii) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$。

如果X中任一Cauchy列$\{u_n\}$($\|u_n-u_m\|\to 0$，当$m,n\to\infty$)都有极限$u\in X$，称X在所给范数下完备。完备的赋范空间称为Banach空间。

范数是我们熟悉的向量长度概念的推广。

定义1.2　称线性空间X是内积空间，如果对任意一对有序元$x,y\in X$，都有复(实)值函数$\langle x,y\rangle$具有下列性质：

(i) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；

(ii) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$；

(iii) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；

(iv) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，等号成立当且仅当$x=0$。

当$\langle x,y\rangle$是复(实)值时，称X为复(实)内积空间。

易见$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$满足定义1.1中范数性质。如果$X$在此范数下完备，称为完备的内积空间或Hilbert空间，常用H表示。

内积是向量点积概念的推广，因而二个元之间的内积确定了二个元之间的“夹角”。

定义1.3 (i) 设H为定义1.2给出的内积空间。称元x与元y垂直，如果$\langle x,y\rangle=0$，记为$x\perp y$；

(ii) 空间H中子集$M=\{e_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$称为直交规格化组，如果

$$\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases},\quad \alpha,\beta\in\Lambda;$$

(iii) 直交规格化组M称为空间H的直交规格化基，如果(ii)成立并且$\overline{\operatorname{span} M}=H$，这里$\operatorname{span}M$表示$M$中元的有穷线性组合，$\overline{M}$表示集合$M$的闭包。

在线性代数中大家已经熟悉n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$：$x=(x_1,\cdots,x_n)$，其中内积$\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$，$\bar{y}_i$是$y_i$的复共轭。易见向量组$\{e_i=(0,\cdots0,1,0,\cdots0),i=1,\cdots,n\}$是$\mathbf{R}^n$中直交规格化基。$\mathbf{R}^n$的无穷维推广是$l^2$空间：$x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$且$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$。其中内积$\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i$。它的直交规格化基是$\{e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),i=1,\cdots\}$，这是一个可分Hilbert空间，具有可数直交规格化基。

常见的无穷维空间有$C[0,1]$（$[0,1]$上连续函数全体）和$L^p(0,1)$（$(0,1)$上p次可积函数全体），其中范数分别为$\|x\|_c=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$和$\|x\|_p=\left\{\int_0^1|x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$；特别$L^2(0,1)$为Hilbert空间，它的内积为$\langle x,y\rangle=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$. 这个空间也是可分的。易证集合$M=\{e^{2\pi inx},n=0,1,\cdots\}$是$L^2(0,1)$中直交规格化基。

引理1.4 设H是一个Hilbert空间，其中内积记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$，由

此诱导出范数$\|\cdot\|$。则

(i) （Schwartz不等式）$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|$；

(ii)（极化恒等式）

$$\langle x,\ y\rangle=\begin{cases}\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x-iy\|^2-i\|x+iy\|^2\} & \text{（复值）}\\ \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\} & \text{（实值）；}\end{cases}$$

(iii)（平行四边形等式）

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

反之若(iii)成立，$\|\cdot\|$必是由内积诱导，这个内积由(ii)给出。

设M是Hilbert空间H中子集，令

$$OC[M]=\{y\in H,\ \langle y,x\rangle=0,\ \forall x\in M\}\tag{1}$$

易见$OC[M]$是空间H的闭子空间。

引理1.5 设M是Hilbert空间H中非空闭凸子集，则对任意元$x\notin M$，唯一存在元$y\in M$使得

$$\|x-y\|=\inf\{\|x-z\|,\ z\in M\}\tag{2}$$

记$d(x,M)=\|x-y\|$，称为元x到集合M的距离。

证明 $x\notin M$蕴含$d=\inf\limits_{z\in M}\|x-z\|>0$。存在$z_n\in M$使$d\leqslant\|x-z_n\|\leqslant d+1/n$，由平行四边形公理，得

$$\begin{aligned}\|z_n-z_m\|^2&=\|z_m-x-(z_m-x)\|^2=2\|z_n-x\|^2+2\|z_m\\&\quad-x\|^2-4\|x-(z_m+z_n)/2\|^2\\&\leqslant2\|z_n-x\|^2+2\|z_m-x\|^2-4d^2\to0\end{aligned}$$

因为M是凸集，$(z_n+z_m)/2\in M$，再由M的闭性，存在元$y\in M$，$z_n\to y$，于是$\|y-x\|=d$。

唯一性易得。

推论1.6 设M是H的闭子空间，对任意元 $x\in H$，必唯一存在元$y\in H$使 $\|x-y\|=d(x,M)$，并且$z=x-y$垂直于M：$\langle z,h\rangle=0$，$\forall h\in M$。

证明 从$\|x-y\|=\inf\limits_{M}\|x-z\|$得

$$\|x-y\|^2\leqslant\|x-y+th\|^2,\ \forall h\in M,\ t\in\mathbf{R}^1$$

从右端展开可得

$$|t|^2\|h\|^2+2\mathrm{Re}\langle x-y,th\rangle\geqslant 0$$

由 t 任意，从上式得$\langle x-y,h\rangle=0$。

于是空间H有直交分解，这对我们研究Hilbert空间及其上线性算子带来很大方便。

定理1.7 设H_1是 Hilbert 空间H的闭子空间， 则空间H有直交分解$H=H_1\oplus OC[H_1]$，即任意元$x\in H$可唯一地表为 $x=x_1+x_2$，$x_1\in H_1$，$x_2\in OC[H_1]$。

定理1.8 设$M=\{x_i\}_1^n$是 Hilbert 空间H中线性无关组，则存在H中直交规格化组$\{x_i\}_1^n$使得$\operatorname{span}\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{e_i\}=\operatorname{span}\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，（$n\leqslant\infty$）。

证明 取$e_1=x_1/\|x_1\|$，由x_2与e_1线性无关，元$y=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1\neq 0$且$y\perp e_1$。记$e_2=y/\|y\|$，易见$\{\overline{e_1,e_2}\}=\{x_1,x_2\}$。按此方法继续即可得所需$e_i$。

通常称这一直交化过程为Gram-Schmidt过程。

线性空间的维数是它所含有的最大线性无关向量组的个数，通常称之为代数维数。当空间具有可数稠子集时称空间为可分的。如空间l^p，$L^p(1\leqslant p<\infty)$，$C[a,b]$等等；而空间 l^∞（有界数列全体，元 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 的范数为$\|x\|=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant\infty}|x_i|$）是不可分的，因为$l^\infty$中坐标仅取 0 或 1 的所有元集合是不可数的。

对于可分Hilbert空间由 Gram-Schmidt 过程可得它的直交规格化基。当空间不可分时，建立直交规格化组的半序（由包含关系给出），由Zorn辅理可得最大直交规格化组存在，它就是所求的直交基，详见[4]。

定理1.9 设Hilbert空间H有直交规格化基$\{e_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$，则对每个$x\in H$有直交展开

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha \tag{3}$$

且
$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2 \quad \text{(Parseval等式)} \tag{4}$$

(3)和(4)式中和数至多可数多项不为零。反之如果有(4)式成立，则$S=\{e_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$必是空间$H$的直交规格化基。如果有数集$\{c_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$使$\sum|c_\alpha|^2<\infty$，则$\sum c_\alpha e_\alpha$收敛于空间$H$中某元。

证明 (i) 任取Λ中有限集$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$则

$$\|x\|^2=\|x-\sum_{j=1}^n\langle x,e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\|^2+\sum_{j=1}^n|\langle x,e_{\alpha_j}\rangle|^2$$

于是
$$\sum_{j=1}^n|\langle x,a_{\alpha_j}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2 \quad \text{(Bessel不等式)} \tag{5}$$

由此知对每一$n>0$，仅有有穷个j使$|\langle x,e_{\alpha_j}\rangle|^2\geqslant 1/n$，则对每个$x\in H$，至多可数个$\langle x,e_\alpha\rangle$不为零。

(ii) 设$S=\{e_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}$是$H$中基。对每个$x\in H$，$\varepsilon>0$存在$n\in\mathbf{N}$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$，$c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{C}$使$\|x-\sum_{j=1}^n c_je_{\alpha_j}\|^2<\varepsilon$，另一方面有

$$0\leqslant\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\leqslant\|x\|^2-\sum_{j=1}^n|\langle x,e_{\alpha_j}\rangle|^2$$

$$=\|x-\sum_{j=1}^n\langle x,\ e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\|^2\leqslant\|x-\sum_{j=1}^n c_je_{\alpha_j}\|^2<\varepsilon$$

得(4)式，因而(3)式成立。

(iii) 如果(4)式成立。任意 $x\in H$，令$\{\alpha_i\}$是使得$\langle x,e_\alpha\rangle\neq 0$的那些$\alpha\in\Lambda$的某一子例，则

$$\|x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\|^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{n}|\langle x,e_{\alpha_j}\rangle|^2\to 0$$

即有$x\in\overline{\{e_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}}$，也即$\overline{\{e_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}}=H$，因而$S$为$H$的直交基。

(iv) 如果$\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|c_\alpha|^2<\infty$，同(i)中论证，其中至多可数项不为零，记其为$\{c_{\alpha_j}\}$。令$y_n=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}e_{\alpha_j}$，则$y_n$是Cauchy列($n>m$)，且

$$\|y_n-y_m\|^2=\sum_{m+1}^{n}|c_{\alpha_j}|^2\to 0\quad(\text{当}n,m\to\infty)$$

于是存在$y\in H$，$y=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}c_\alpha e_\alpha$。

推论1.10 元列$x_n\to y$ ($\|x_n-y\|\to 0$) 当且仅当对每个e_α，$\langle x_n,e_\alpha\rangle\to\langle y,e_\alpha\rangle$。

对一般Banach空间，没有直交基的概念，我们仅有代数基（最大线性无关元组）。由于它和Banach空间中的拓扑（范数）没有关系，因此用途不大，为此引进Schauder基的概念。

定义1.11 设X是Banach空间，点列$\{x_n\}_{n\in N}$称作X的基本列，如果任意点$x\in\overline{\text{span}\,\{x_n,n\in\mathbf{N}\}}$总有唯一的数列$\{a_n\}_{n\in N}$使得级数$\sum\limits_n a_nx_n$收敛到$x$。基本序列$\{x_n\}$称作空间$X$的 Schauder 基，如果$\overline{\text{span}\,\{x_n,n\in\mathbf{N}\}}=X$。

此时每个$x\in X$有唯一分解$x=\sum\limits_n a_nx_n$，数列a_n称作x在基$\{x_n\}$上的坐标。通常将x_n规格化：$\|x_n\|=1$，$\forall n\in\mathbf{N}$。

显然，如果 Schauder 基存在，空间必可分。但并不是每个可分Banach空间都有Schauder基存在，直到近年这还是一个引人注意的课题[5]。

定义1.12 设X是赋范空间。X上连续线性泛函数的全体记作X^*，它按通常的线性运算和泛函数的范数构成一个赋范空间，称为空间X的共轭空间。当$X=(X^*)^*$时，称X为自反空间；当$X=X^*$时，称X为自共轭空间。

Hahn-Banach 定理保证空间X上有足够多连续线性泛函数存在，它有几种不同的形式：

定理1.13 (i) 设X是实线性空间，X_1是它的实线性子空间，在X_1上给出了线性泛函数f_1，满足$f_1(x)\leqslant p(x)$，$\forall x\in X_1$，这里$p(x)$是X上次可加 ($p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$)、正齐性 ($\alpha\geqslant 0$, $p(\alpha x)=\alpha p(x)$)泛函数，则X上必存在连续线性泛函数$f(x)$满足

$$f(x)\leqslant p(x),\quad x\in X;\quad f(x)=f_1(x),\quad x\in X_1;$$

(ii) 设X是赋范线性空间，对任意$x_0\in X$且$x_0\neq 0$必存在X上连续线性泛函数f满足$f(x_0)=\|x_0\|$，$\|f\|=1$；

(iii) 设X是赋范线性空间，M是X的线性子空间，f是M上的连续线性泛函数，则存在X上的连续线性泛函数$F(x)$满足$F(x)=f(x)$，当$x\in M$且$\|F\|=\|f\|$。

定理1.14(Riesz表现定理) 设H是一个Hilbert空间，则H是自反空间，即H上连续线性泛函数可表为$f(x)=\langle x,y\rangle$，且$\|f\|=\|y\|$。

空间$C(a,b)$的共轭空间是$V_0(a,b)$：(a,b)上右连续并且在a端成零的有界变差函数全体。进一步$C(a,b)$上连续线性泛函数有表现

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad \forall x\in C(a,b),\quad 而g\in V_0(a,b),且\|f\|=\|g\|_0,$$

这里$\|g\|_0=\bigvee_a^b g(x)$。

空间$L^p(a,b)$的共轭空间是$L^q(a,b)$，这里q是p的共轭数：$1/p+1/q=1, 1\leqslant p<\infty$；$L^p(a,b)$上连续线性泛函数有表现$f(x)=$

$\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$，$y\in L^q(a,b)$，

定义1.15 设A是赋范线性空间X到Y的有界线性算子，如果存在Y^*到X^*的线性算子A^*使得对任何$h\in Y^*$，$x\in X$有

$$(A^*h)(x)=h(Ax) \tag{6}$$

则称A^*是A的共轭算子。

如果用$(\cdot,\cdot)$表示X和X^*之间的“对偶积”，即记$f(x)=(x,f)$，当$x\in X$，$f\in X^*$。则(6)式可写成

$$(x,\ A^*h)_{(X,X^*)}=(Ax,\ h)_{(Y,Y^*)} \tag{6'}$$

用$\mathscr{L}(X,Y)$表示从X到Y的有界线性算子全体在范数$\|A\|=\sup\limits_{\|x\|<1}\{\|Ax\|/\|x\|\}$下形成的赋范空间。

定义1.16 设X是赋范线性空间。(i) 序列$\{x_n\}\subset X$称为强收敛于$x_0\in X$，如果$\|x_n-x\|\to 0$，记作$x_n\to x_0$；称为弱收敛于$x_0\in X$，如果对每个$f\in X^*$，有$f(x_n)\to f(x_0)$，记作$x_n\rightharpoonup x_0$；

(ii) 设Y是赋范线性空间，算子列$A_n\in\mathscr{L}(X,Y)$．称A_n一致收敛到算子$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，如果$\|A_n-A\|\to 0$；称A_n强收敛到算子$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，如果对每个$x\in X$，$\|A_nx-Ax\|\to 0$；称A_n弱收敛到$A\in\mathscr{L}(X,Y)$，如果对每个$x\in X$，$f\in X^*$有$f(A_nx)\to f(Ax)$。

定理1.17(Banach) 设X,Y都是Banach空间，A是X到Y上的有界线性算子，并且是双方一对一满射，则逆算子A^{-1}是有界的。

定理1.18（开映象） 设A是Banach空间X到Y的有界线性算子，如果$AX=Y$，则A是开映象：把X中开集映到Y中开集。

定理1.19（共鸣定理 Banach-Steinhaus**）** 设X是Banach空间，Y是赋范线性空间，有界线性算子族$\{T_\tau,\tau\in\Lambda\}$从$X\to Y$，如果对每个$x\in X$有

$$\sup_{\tau}\|T_\tau x\|<\infty$$

则数集$\{\|T_\tau\|,\tau\in\Lambda\}$是有界的。

简言之，T_τ的点点有界蕴含范数一致有界。

定义1.20 设X是线性空间，其上给出的二个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$称为等价，如果存在$c_1>0, c_2>0$使得

$$c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2,\quad \forall x\in X \tag{7}$$

如果(7)式中仅右端成立，称范数$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$。

定理1.21 设X是线性空间，按其上给出的二个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$都成为Banach空间，并且$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$，那么$\|\cdot\|_2$也必弱于$\|\cdot\|_1$，从而$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价。

证明 利用Banach定理1.17。

推论1.22 有穷维线性空间上任意二个范数等价。

§2 紧集和弱紧集

熟知$\mathbf{R}^n$空间中每个有界闭集必有收敛子列，与此等价的命题还有“区间套定理”等。这是$\mathbf{R}^n$上分析学基础。在无穷维 Hilbert 空间，有界闭集不再具有这个性质。为此我们引进

定义2.1 赋范空间X中子集M称为是相对紧的，如果M中任何点列必有在X中收敛的子列。集合M称为是紧的，如果上述收敛子列的极限必在M中。

引理2.2(Riesz引理) 设E是赋范线性空间X的真闭子空间。则任给$\varepsilon>0$且$\varepsilon<1$，必存在X中单位向量e：$\|e\|=1$使得$\operatorname{dist}(e, E)>\varepsilon$。

证明 从$E\subsetneqq X$，有点$x_0\in X\setminus E$使$\operatorname{dist}(x_0,E)=d>0$。因此在$E$中存在点$x'$使$\|x'-x_0\|>d$，$\|x'-x\|<d/\varepsilon$，取$e=(x'-x_0)/$