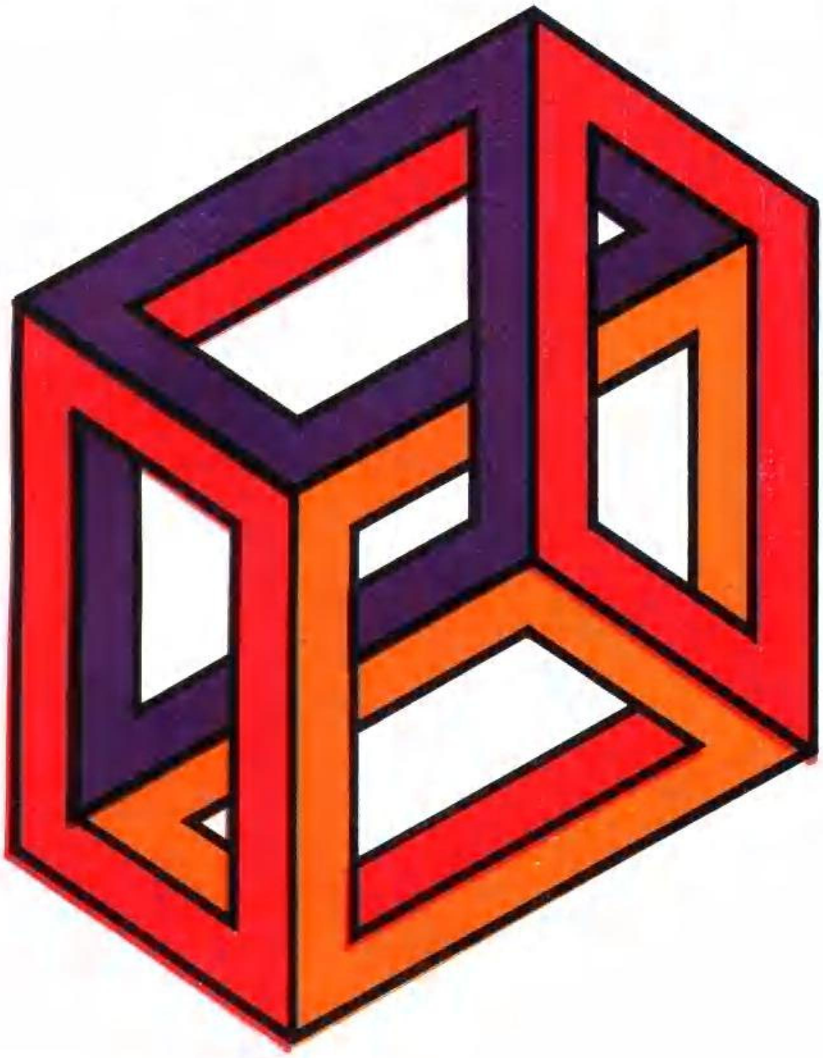
工程数学

数学物理方程 特殊函数

[修订版]

杨应辰 成如翼 徐明聪 编



工 程 数 学

数学物理方程 特殊函数

（修 订 版）

杨应辰 成如翼 徐明聪 编

国防工業出版社

内容简介

本书是西北工业大学、北京航空航天大学、南京航空学院等院校数学教研室合编的《工程数学》七个分册之一。本分册包括数学物理方程、特殊函数两部分。数学物理方程部分介绍方程的建立和定解条件的提法、行波法、驻波法、积分变换法、点源影响函数法以及二阶线性方程的化简与分类，并介绍定解问题的适定性概念。各种方法的物理背景均作了较详的叙述。特殊函数部分介绍Γ函数、B函数、贝塞尔函数、勒让德函数与切比雪夫多项式。书中各部分均附有适量习题，并附有习题答案。

本书可作为高等工科院校教材，也可供电视大学、业余大学作教材，还可供科技人员参阅和自学者自学。

工程数学

数学物理方程 特殊函数

（修订版）

杨应辰 戚如翼 徐明聪 编

责任编辑 陈子玉

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张12 1/4 322千字

1991年1月第一版 1991年1月第一次印刷 印数：0,001— 3,000册

ISBN 7-118-00546-0/O·42 定价：9.70元

再版说明

《工程数学》(修订版）包括：《概率论与数理统计》、《矢量分析与张量计算》、《复变函数》、《线性代数》、《计算方法》、《拉普拉斯变换与傅里叶变换》、《数学物理方程 特殊函数》。

本书修订版是以原书为基础，再根据近年教学实践经验改编而成的。全书仍分数学物理方程与特殊函数两部分。特殊函数部分为徐明聪编的原稿。数学物理方程部分变动较大，是由杨应辰和成如翼同志执笔，共同商定修改的。除了一般行文上多有改述之外，安排上将原第四、第二、第三章改为新的第二、第三、第四章。内容上有以下几方面的变动与补充：第一章增加了一个附录——波动的积分方程的推导。第二章介绍波函数的平均值定理，并用它来统一解决特征问题、第三问题、以及波的反射问题，进一步介绍通量定理而顺利地解决更一般的混杂问题以及受迫波动方程的定解问题，当然包括自由波动方程的多种定解问题，从而导出杜哈美尔原理（限于篇幅，未能处理一般的双曲型方程的各种定解问题)。对于空间波动初值问题的解也补充了更详明的积分表达式。第三章首先对分离变数法给予了更明确的物理背景，总的安排仍保持初版中的形式，即先介绍几个较简单的求驻波解系的问题，作为解决定解问题的预备问题，待初学者初步熟悉如何求驻波解系之后，再去介绍如何构造定解问题的解。对于非齐次方程非齐次边界条件问题，在这次修订中作了系统的处理。第四章仅作了个别文字上的补充。第五章对点源影响函数的流体力学来源给了更细致的介绍，并在附录中补充了球内、球外诺伊曼问题的解以及热传导方程的基本解。第六章中对多于两个自变量的线性常系数方程的化简的阐述也更为确切而易于掌握了。

本书的再版承南京航空学院王步仁同志作了细致的审订，西北工业大学杨曙同志也提了不少宝贵意见，我们在此表示衷心的感谢。

编　者

第一版前言

本书是西北工业大学、北京航空航天大学、南京航空学院等院校数学教研室合编的《工程数学》教材之一。全套教材共分七册出版：《矢量分析》、《复变函数》、《积分变换》、《线性代数》、《计算方法》、《数学物理方程与特殊函数》、《概率论与数理统计》。

本册包括数学物理方程和特殊函数两部分。数学物理方程部分介绍数学物理学中偏导数方程定解问题的一些最常用的解法——驻波法、积分变换法、行波法、点源影响函数法，以及二阶线性方程的化简、分类和定解问题的适定性概念。对各种解法都着重阐明其物理背景，揭示出它们的来龙去脉。特殊函数部分包括Γ函数、B函数、贝塞尔函数、勒让德函数、切比雪夫多项式。这一部分主要是为数学物理方程部分的需要而编写的。

读者阅读本书内容可根据具体情况予以取舍。书中各部分皆附有适量习题，并附有习题答案。阅读本书只需要具备高等数学基础知识。

本册数学物理方程部分由北京航空学院杨应辰编写，特殊函数部分由北京航空学院徐明聪编写，两部分均由南京航空学院王步仁主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。对在本书编写过程中给予大力支持以及提供宝贵意见的所有同志，我们在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　录

数学物理方程

特殊函数

数学物理方程

数学物理方程

数学物理方程

数学物理方程

第一章　典型方程与典型问题

自然科学和工程技术中，种种运动的变化发展过程与平衡现象各自遵守一定的规律。这些规律都是呈现在客观的时间和空间中，因此所研究的物理量一般都是多自变数的函数，而描述这些规律通常用关于某个或某些未知多元函数的数学方程或方程组。它们不但含有未知多元函数，而且含有未知多元函数的偏导数（或以微分的形式出现），或含有它的积分，或兼而有之。其中含有未知多元函数及其偏导数（也可以仅含有偏导数）的方程称为**偏导数方程**（**或偏微分方程**）。描述物理规律的偏导数方程也称为**数学物理方程**。

例 1　二维自由静电、磁场的力函数 u 和位函数 v 满足复变函数论中的柯西-黎曼（Cauchy-Riemann）方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$

流体的平面定常不可压缩的无旋流的研究，也可归结为求解此方程组。

例 2　若从例 1 的方程组消去其中一个未知函数，则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

或

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

例 3　描述钢琴或古筝之类乐器的弦振动现象的数学形式是一维波动方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

例 4 无热源的热导体中，温度Φ的分布$\Phi(x, y, z, t)$满足方程：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)$$

例 5 气体动力学中，一维非定常等熵流的气体密度ρ，流速u都是一维空间坐标x和时间t的二元函数，它们满足由连续方程和动量方程所组成的方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=0\end{cases}$$

其中$c=c(\rho)>0$为音速。

例 6 $$\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

例 7 $$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=1$$

例 8 $$u=u_x^2+u_y^2+u_z^2$$

例 9 $$yz_x+xz_y=z^n+f(x, y)$$

其中n为已知常数，f为已知函数。形式虽然简单，也往往具有丰富的几何意义，可供借鉴。

关于偏导数方程的**解**、**阶**、**线性**、**非线性**、**齐次**、**非齐次**、**常系数**、**变系数**等术语的含义与常微分方程中相应的术语相同。例如，函数

$$u=\varphi(x)$$

其中$\varphi(x)$是x的任意函数，这是例 6 的方程的全部解（本章§1.3 再作说明）。特别如函数

$$w=xy$$

$$w=xy+c_1x+c_2y$$

其中c_1、c_2为任意常数，它们都是例 7 的方程的解，但不是它

的全部解（本章§1.3再作说明）。

例1、5的方程组都是一阶的。例6、8、9的方程也是一阶的。例2、3、4、7的方程是二阶的。

若方程是未知多元函数及其各阶偏导数的一次方程，则称为**线性方程**。否则，称为**非线性方程**。例1的方程组、例2、3、4、6、7的方程都是线性的，而且是常系数的。例9的方程仅当$n=1$或0时是线性的，但是变系数的。例8的方程是非线性的。

若非线性方程中未知多元函数的所有最高阶偏导数都是线性的，而其系数不含有未知多元函数及其低阶偏导数，则称为**半线性方程**。例9的方程当$n\geqslant 2$时是半线性的。

若非线性方程中未知多元函数的所有最高阶偏导数都是线性的，而其系数含有未知多元函数或其低阶偏导数，则称为**拟线性方程**。例5的方程组是一阶拟线性方程组。

例1的线性方程组，例2、3、4、6的方程都是齐次的，例7的方程是非齐次的，例9的方程仅当$n=1$且$f\equiv 0$时是线性齐次的，而$f\not\equiv 0$时是线性非齐次的。

本课程主要研究两类问题：建立描述同一类物理现象的共同规律的偏导数方程以及某个特定物理现象所符合的特定条件的数学形式，即确定定解条件；介绍解决数学物理方程问题的一些常用的解法，且只着重于这些方法的实际背景及其应用，而不追求过多的论证，也不去阐述这一数学领域的全貌。我们着重讨论一些富有实际意义的、数学物理学中常遇到的二阶线性常系数方程。在两个自变数的情况，其一般形式是

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,\ y)$$

其中a_{11}、a_{12}、a_{22}、b_1、b_2、c均为已知常数，$f(x,\ y)$为已知函数。上述例2、3、7的方程是它的特例。此外，也研究一些多于两个自变数的情况。

虽然第一章里介绍的方程与定解条件都是由特定的问题导出的，但它们都会出现在各种不同的科学领域里。所以研究它们的

各种定解问题，既有代表性，又有广泛的应用范围。

§1.1 物理模型与典型方程的建立

（一）弦振动方程

1．自由振动方程

设有一根拉紧的均匀柔软细弦，其线密度（单位长度的质量）为常数 ρ，取其平衡状态的位置 AB 所在直线为 x 轴，称为弦的纵向，垂直于 x 轴的方向称为弦的横向。

假设在某种扰动下，x 轴上的 AB 弦产生振幅极为微小的横振动，而弦上每一点都只作垂直于 x 轴的运动，即无纵向运动。图 1-1 所示为弦在横振动过程中某一时刻 t 的形状。

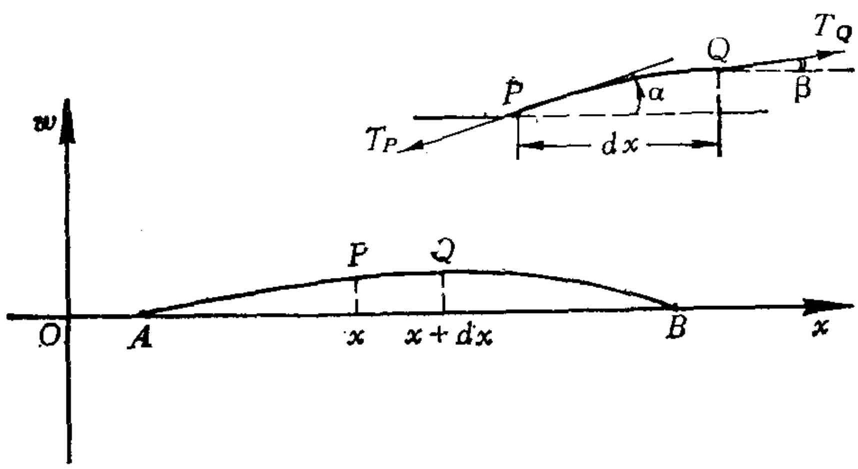


图 1-1

设 w 为弦上横坐标为 x 的点的横向位移. 再假定振动只发生在 xw 平面内。在同一时刻 t，弦上各点的横向位移是不同的；在不同的时刻，弦上横坐标为 x 的点的横向位移也是不同的。所以，横向位移 w 是 x、t 的函数，记作 $w=w(x,\ t)$，并假定函数 w 有二阶偏导数。

任取微段 $\widehat{PQ}$，端点 P、Q 的横坐标分别为 x、$x+dx$. 相邻小段之间互有拉力，称为张力。因为弦是柔软的，所以它不抗弯。张力是沿弦的切线方向。张力要比细弦自身的重力大得多，因此可以略去细弦自身的重力。不计空气阻力，且无其他外力作用。

这时，微段$\widehat{PQ}$左端只有张力T_P沿点P处的切线而指向左，右端只有张力T_Q沿点Q处的切线而指向右。由于无纵向运动，因此微段$\widehat{PQ}$的张力的纵向合力应等于零。微段$\widehat{PQ}$的张力的横向合力是微段产生横向加速度运动的力。设α、β分别为切向张力T_P、T_Q与水平线所成的锐角，则由牛顿(Newton)第二定律得

$$\begin{cases} T_Q\cos\beta - T_P\cos\alpha = 0 & (1.1.1) \\ T_Q\sin\beta - T_P\sin\alpha = \rho ds\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} & (1.1.2) \end{cases}$$

由于振动是极其微小的，因此$\alpha \ll 1$，$\beta \ll 1$。所以

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_P = \mathrm{tg}\alpha \ll 1$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_Q = \mathrm{tg}\beta \ll 1$$

在略去二次项$\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2$的精确度下，

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_P\right)^2}} \approx 1$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_Q\right)^2}} \approx 1$$

由式(1.1.1)有

$$T_P = T_Q$$

所以，弦上各点处的张力都相等。即张力与点的坐标x无关。根据虎克(Hooke)定律，张力的大小由弦的伸长率决定，但微段$\widehat{PQ}$的弧长为

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx dx$$

在所取的精确度下，可以认为弧长ds不随时间t而伸长，因此

张力的大小也不随时间 t 而变。于是，弦中张力与 x 、t 都无关，它是常量，记作 T。由于

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha, \quad \sin\beta \approx \mathrm{tg}\beta$$

因此式（1.1.2）可以化为

$$\rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x}\right) \approx T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx \tag{1.1.3}$$

简化后得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

设 $a^2 = T/\rho$，则

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.1.4}$$

其中 a^2 的量纲是

$$\left[\frac{\text{力}}{\text{质量/单位长度}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg \cdot m/s^2}}{\mathrm{kg/m}}\right] = [\mathrm{m^2/s^2}]$$

即 a 具有速度的量纲。这一结果的意义将在行波法中变得显而易见。

这就是**弦的自由振动方程**，也叫做**一维自由波动方程**，或简称**波动方程**。

2．受迫振动方程

若在弦振动过程中，弦上有外载荷，其外力密度（单位长度上所受的力）为 $F(x, t)$，其方向与弦的振动方向平行，则式（1.1.2）的等号左端应加上一项微段 $\overparen{PQ}$ 所受的外力 Fdx。相应地，式（1.1.3）应修改为

$$\rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx + Fdx$$

简化后得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{F}{\rho}$$

设 $a^2 = T/\rho$，$f(x, t) = F(x, t)/\rho$，则