

快速付里叶变换及其应用

孙仲康编著 人民邮电出版社



内 容 提 要

本书从概略地回顾付里叶变换及其重要性质开始,依次介绍了离散付里叶级数及离散付里叶变换,讨论了离散付里叶变换的性质,介绍了离散付里叶变换的快速算法,即快速付里叶变换(FFT)。对使用 FFT 时一定会遇到的许多实际问题如运算效率、有限字长影响、加权技术等问题,作了较详细的讨论。最后还介绍了 FFT 在谐波信号及随机信号分析、数字通信、语音分析、匹配滤波、图像处理、数据压缩、倒谱解卷积等方面的应用。本书说理详细、清楚,结合实用,取材新颖,便于自学,是从事通信、雷达、计算机、无线电电子学测量设备及系统、信号、数据、信息处理等方面的工程技术人员及有关高等院校师生的一本有用的自学参考书。

快速付里叶变换及其应用

孙仲康 编著

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本: 787×1092 1/32

1982年11月第一版

印张: 11 20/32 页数: 186

1982年11月河北第一次印刷

字数: 267 千字

印数: 1—9,100 册

统一书号: 15045·总2623—无6199

定价: 1.25 元

前 言

付里叶变换是大家熟知的一种数学工具，它的应用范围十分广泛。在信号及随机过程的分析中、在线性系统的分析中、在天线方向图的分析中以及在光学成像、机械振动等方面的分析研究中都用得着付里叶变换。随着数字电子计算技术的发展，在这些应用领域内借助于数字计算机来进行付里叶变换运算，实现某种数据的事后处理或系统的仿真研究已成为现实。特别是在六十年代中期出现了快速付里叶变换的算法以后，这种数学工具的应用领域就从事后处理扩展到实时处理，直至扩展到成为某些无线电电子系统、电子测量分析系统中的一个组成部分。掌握这一门具有广泛用途和发展前景的新技术是十分必要的。

由于数字计算机只能运算有限长度的、离散的序列，所以真正在计算机上运算的是一种离散付里叶变换，而快速付里叶变换(FFT)只不过是快速运算离散付里叶变换的一种算法。为了建立起付里叶变换、离散付里叶变换之间的关系以及熟悉了解离散付里叶变换的一些重要性质，书中的前三章介绍了有关这方面的内容。第一章“付里叶变换概述”回顾了一下付里叶变换及其性质；第二章“离散付里叶级数及离散付里叶变换”利用付里叶变换及其定理，导出离散付里叶级数，从而定义出离散付里叶变换的一对公式；第三章“离散付里叶变换的性质”介绍一些经常用到的离散付里叶变换的重要性质。这三章的内容是使用数字计算技术实现付里叶变换必要的理论基础。

第四章“离散付里叶变换的快速算法”介绍了快速进行离散付里叶变换运算(FFT)的各种算法。第五章“有限字长的影响”着重介绍数据量化条件下实施 FFT 运算中出现的误差和可能的解决方法。第六章“加权技术”讨论了数据长度有限时出现的泄漏现象,使用加权来抑制泄漏、提高信号的检测和分辨能力并比较了各种形式加权的性能。这三章(四、五、六章)的内容,主要是为了掌握如何使用 FFT 算法以及解决在计算离散付里叶变换中可能出现的一些实际问题而设置的。

第七章“实现 FFT 的硬件和程序”主要介绍实现 FFT 的专用硬件的构成。

第八章“谐波信号及随机信号的分析”。

第九章“快速付里叶变换的应用”主要介绍快速付里叶变换可能的应用,并比较侧重于介绍与通信有关的应用。

书中运用了拉氏变换、 Z 变换、线性连续和离散系统、数字滤波器等方面的有关知识;在某些章节还用到概率论、随机过程的一些知识。编写时假定读者已具备了这些基础知识。

梁锦农、皇甫堪同志对本书初稿认真负责地提出过许多宝贵的和具体的修改意见。王绍霖、李素芝、许织新同志提供了有关的资料。郭九汉、王崑山、杨利军同志描绘了全部插图底稿。这里谨对他们表示感谢。

编 者

目 录

第一章 付里叶变换概述	(1)
第一节 付里叶级数	(1)
第二节 付里叶变换	(3)
第三节 奇异函数的付里叶变换	(7)
第四节 复函数的变换	(11)
第五节 付里叶变换的定理	(16)
第六节 卷积定理	(19)
第七节 相关定理	(26)
第八节 周期性函数的付里叶变换	(29)
第九节 二维付里叶变换	(34)
第二章 离散付里叶级数(DFS)及离散付里叶变 换(DFT)	(36)
第一节 离散时间信号——序列	(36)
第二节 序列的卷积	(40)
第三节 离散时间序列与离散频谱序列	(46)
第四节 采样定理及叠混现象	(48)
第五节 离散付里叶级数	(51)
第六节 离散付里叶级数与有限长度序列的Z变换	(56)
第七节 离散付里叶变换(DFT)	(60)
第三章 离散付里叶变换的性质	(63)
第一节 离散付里叶变换举例	(63)
第二节 离散付里叶变换的几个性质	(65)
第三节 离散付里叶反变换的两种形式	(73)
第四节 奇偶性及对称性质	(75)

第五节	复序列的离散付里叶变换	(77)
第六节	离散付里叶变换作频谱分析	(79)
第七节	离散付里叶变换相当于一组滤波器	(80)
第八节	圆周卷积	(85)
第九节	用离散付里叶变换求线性卷积	(89)
第十节	频域卷积定理和能量定理	(95)
第十一节	离散相关定理	(98)
第十二节	二维离散付里叶变换	(100)
第四章	离散付里叶变换的快速算法	(106)
第一节	引言	(106)
第二节	变换矩阵的因式分解	(107)
第三节	按时间抽取的 FFT 算法	(111)
第四节	按频率抽取的 FFT 算法	(124)
第五节	离散付里叶反变换的计算	(129)
第六节	$Cooley-Tukey$ 的一般算法	(129)
第七节	提高 FFT 运算效率的一些方法	(140)
第八节	滤波方法实施离散付里叶变换	(153)
第九节	$Chirp-Z$ 变换算法	(158)
第十节	二维快速付里叶变换	(163)
第五章	有限字长的影响	(166)
第一节	量化的影响	(167)
第二节	离散付里叶变换运算中量化的影响	(180)
第三节	定点 FFT 运算中量化误差的影响	(183)
第四节	浮点 FFT 运算中量化误差的影响	(190)
第五节	FFT 中系数量化的影响	(197)
第六章	加权技术	(200)
第一节	频谱泄漏	(200)
第二节	加权及其作用	(203)
第三节	加权序列的性能指标	(210)

第四节	典型的加权序列	(218)
第五节	各种加权的性能比较	(240)
第七章	实现FFT的硬件和程序	(244)
第一节	FFT专用硬件的概况	(244)
第二节	FFT顺序处理机	(247)
第三节	流水线FFT处理机	(254)
第四节	双路基-2流水线处理机	(259)
第五节	高基数流水线FFT处理机	(267)
第六节	FFT的FORTRAN程序	(277)
第八章	谐波信号及随机信号的分析	(284)
第一节	频谱分析	(284)
第二节	相关函数的估计	(289)
第三节	功谱密度函数的估计	(297)
第九章	快速付里叶变换的应用	(317)
第一节	时分多路复用及频分多路复用间的变换	(317)
第二节	语音频谱的短时间分析	(328)
第三节	匹配滤波中FFT的应用	(335)
第四节	图像数据压缩中FFT的应用	(342)
第五节	倒谱解卷积及其应用	(347)
参考资料		(356)
附 录		(359)

第一章 付里叶变换概述

第一节 付里叶级数

一个周期信号 $f(t)$ ，当满足一定条件时，可以用一个付里叶级数来表示：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \quad (1-1)$$

式中，
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n \omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n \omega t dt$$

这里 T 为周期， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ ，而 f 为基波频率。

还有其他的付里叶级数表达形式，其中的余弦表达式为：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega t + \varphi_n) \quad (1-2)$$

而复系数的指数表达式为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j n \omega t} \quad (1-3)$$

这里,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (1-4)$$

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \dots \quad (1-5)$$

不同表达式中各个系数之间的关系式如下:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= C_n \cos \varphi_n = D_n + D_{-n}, \\ b_n &= C_n \sin \varphi_n = j(D_n - D_{-n}) \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{b_n}{a_n}, \quad n \geq 1 \\ D_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n \geq 1 \\ D_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n \geq 1 \\ C_n^2 &= a_n^2 + b_n^2 = 4D_n D_{-n}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

系数 a_n 、 b_n 、 C_n 、 D_n 反映离散频谱线的幅度和相位,并都可在 $-\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2}$ 区间内求积分得出。由于 $f(t)$ 是周期为 T 的周期性函数,实际上可以在 $f(t)$ 的任意一个整周期内求积分,即积分周期可以自 $t_1 \rightarrow t_1 + T$,而 t_1 是任意的时刻。

上述付里叶级数展开式成立的条件是函数 $f(t)$ 应满足狄义赫利(Dirichlet)条件,即:周期性函数 $f(t)$ 在一个周期内只有有限个极值点,只有有限个第一类间断点(在这种间断点处左、右极限存在),而其余各处都是连续的,这时付里叶级数展开式为:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = f(t) \quad (\text{连续处});$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\ = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] \quad (\text{间断点处}) \quad (1-7)$$

在分析带有阶跃变化的周期性函数（如锯齿形波、方波、三角形波等）时，要使用这个展开式。

第二节 付里叶变换

由复系数表达的付里叶级数公式(1-3)和(1-5)可以看出：基波角频率 ω 及谱线间隔 $\Delta\omega$ 都是 $\frac{2\pi}{T}$ 。

令

$$\Delta\omega = 2\pi \Delta f, \quad \Delta f = \frac{1}{T} \quad (1-8)$$

则

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\Delta\omega t} \\ D_n = \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt, \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-9)$$

假如一个信号是非周期性的，可以把它看作为一个周期 T 趋于无穷大的周期性信号；这种信号的基频 ω 及谱线间隔 $\Delta\omega$ 都将变成无穷小而趋近于零。显然，这时组成频谱的谱线越来越密集，从而使离散谱线过渡到连续频谱；而由于 $\Delta f \rightarrow 0$ ，各次谐波的付里叶系数 D_n 都将趋于零值，从而无法反映出各个频率分量不同的幅度和相位。在这种情况下，为了反映信号内的频

率成份及其分布，不能采用付里叶级数，而需使用付里叶积分的方法。

作比值

$$\frac{D_n}{\Delta f} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i(n\Delta\omega)t} dt \quad (1-10)$$

当 $T \rightarrow \infty$, $\Delta f \rightarrow 0$ 时，上述比值的分子分母都趋近于零，可求其极限值，得：

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D_n}{\Delta f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i(n\Delta\omega)t} dt \quad (1-11)$$

式中 D_n 可记成 $D(n\Delta\omega)$ 。假如上述极限值存在，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(n\Delta\omega)t} dt < \infty \quad (1-12)$$

则可得 $f(t)$ 的付里叶变换 $F(\omega)$ 的公式为：

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D(n\Delta\omega)}{\Delta f} &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{D(\omega)}{\Delta f} \triangleq F(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \quad (1-13)$$

在 $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ 时，谱线将密布整个 ω 轴，因此式(1-13)中令 $\omega = n\Delta\omega$ ，而

$$D_n = D(n\Delta\omega) = D(\omega) \quad (1-14)$$

从定义的 $F(\omega)$ 公式可以看出，它并不像 a_n 、 b_n 、 C_n 、 D_n 等系数那样能够直接反映出不同 ω 的频率分量的幅度及相位，而只是反映出在频率 ω 上的比值 $\frac{D(\omega)}{\Delta f}$ 的极限值，或称之为频谱密度值。

同样在付里叶级数公式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i(n\Delta\omega)t}$$

中，把 $D_n = F(n\Delta\omega) \cdot \Delta f$ 代入可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t} \cdot \Delta f \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t} \Delta\omega \end{aligned} \quad (1-15)$$

令 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 求其极限，这时求和公式就可用积分公式来表达，即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-16)$$

上式就是从 $F(\omega)$ 求原函数 $f(t)$ 的付里叶反变换公式。

付里叶正变换和反变换构成一个付里叶变换对，其典型表达式如下：

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (I) \\ (1-17) \end{array}$$

这里的符号 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示正、反付里叶变换。为了在不同场合下应用方便起见，付里叶变换对还可以写成其它的表达形式，如

$$\left. \begin{aligned} G(f) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (II) \\ (1-18) \end{array}$$

这种表达形式除指数项符号相反以外，正、反变换式之间互相对应，故为常用的一类表达形式。还有如下表达形式，即：

$$\left. \begin{aligned} E(\omega) &= \mathcal{F}\{e(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt \\ e(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{E(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (III) \\ (1-19) \end{array}$$

以上这三种表达形式是可以互相转换的，若给出 $g(t)$ 及 $G(f)$ ，则可得 I、II 类表达式为：

I 类: $f(t)=g(t), \quad F(\omega)=G\left(f=\frac{\omega}{2\pi}\right)$

II 类: $e(t)=g\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}}\right), \quad E(\omega)=G\left(f=\frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}}\right)$

下面举例列出一个 $g(t)=e^{-\pi t^2}$ 的不同表达形式的付里叶变换式。

I 类表达		I 类表达		II 类表达	
$g(t)$	$G(f)$	$f(t)$	$F(\omega)$	$e(t)$	$E(\omega)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$	$e^{-\frac{1}{2}t^2}$	$e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$

一个非周期性信号 $f(t)$ 存在付里叶变换也是有条件的。这条件概括起来说就是：函数 $f(t)$ 应该是绝对可积的，亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \tag{1-20}$$

这个条件在实际物理问题中往往是可以满足的。例如每个实际波形 $f(t)$ 都有一个频谱，如式(1-20)得不到满足，就求不出频谱了。但是，在用一些简单的数学表达式来表达物理量时，有些表达式实际上不满足上述付里叶变换的存在条件。例如

- 1 ——— 恒定直流，
- $\sin t$ ——— 纯粹交流，
- $1(t)$ ——— 阶跃函数。

这些函数的绝对值的积分就都不是有限值。不过这些波形在物理上是不可能存在的。因为，不可能存在一个从无穷远的时间以

前就出现的恒定直流或纯粹交流，也不可能存在一个能维持到无穷大时间的恒定阶跃波形 $1(t)$ 。但是，这些假想的波形在研究信号的过程中，却经常用到。为了发挥付里叶变换的作用，也需要把它推广应用到这些奇异的和周期性的函数上去。

第三节 奇异函数的付里叶变换

利用狄拉克函数 $\delta(t)$ （或称脉冲函数、 δ 函数）就可以把付里叶变换推广应用到上述奇异的和周期性的函数上去。

δ 函数

通常可以用下列三种形式来定义 δ 函数：

(1) 由下列方程定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0, \quad \text{当 } t \neq 0 \quad (1-21)$$

(2) 由下列极限定义：

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \quad (1-22)$$

这里的 $f_n(t)$ 满足下列关系，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0, \quad \text{当 } t \neq 0.$$

例如 $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{n}}} e^{-nt^2}$ ，见图1—1。查定积分表容易证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1. \text{ 当 } t \neq 0 \text{ 时，容易证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} = 0, \text{ 故}$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}.$$

(3) 由下列性质定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (1-23)$$

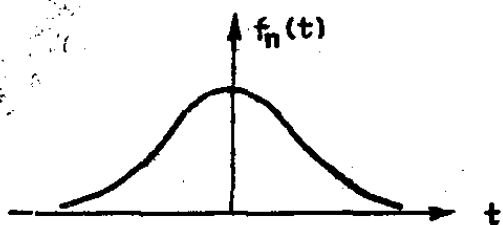


图 1-1

无论使用哪种定义，把 δ 函数看作为一般的函数是没有意义的，它仅仅是人为地定义出来的一种分析工具而已。例如上述第(3)种定义不能解释为“ $\delta(t)$ 及 $f(t)$ 两个函数的乘积

在无穷区间内求积分，从而得出数值 $f(0)$ 来”，而应该解释成“任意函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处的函数值 $f(0)$ ，可以由称之为“广义函数”的 $\delta(t)$ 用式(1-23)来加以规定”。所以，这里是引用 $\delta(t)$ 作为确定函数 $f(t)$ 的一个数值 $f(0)$ 的一种“过程”。 $\delta(t)$ 本身没有独立的意义，它是由函数 $f(t)$ 的一个规定数值 $f(0)$ 所定义的。依同理可得 $\delta(t-t_0)$ 的定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (1-24)$$

又得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t+t_0) dt = f(t_0) \quad (1-25)$$

奇异函数的付里叶变换

利用 δ 函数的性质，可以求出一些奇异函数的付里叶变换对来。

例(1)：若 $f(t)=\delta(t)$ ，根据式(1-23)所示的 δ 函数的性质，可得它的付里叶正变换为：

$$F(\omega) = \mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega 0} = 1$$

而由付里叶反变换式，可得如下 δ 函数的又一表达式：

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

因此有付里叶变换对：

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (1-26)$$

对于时延的 δ 函数，容易得出下列的变换对：

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (1-27)$$

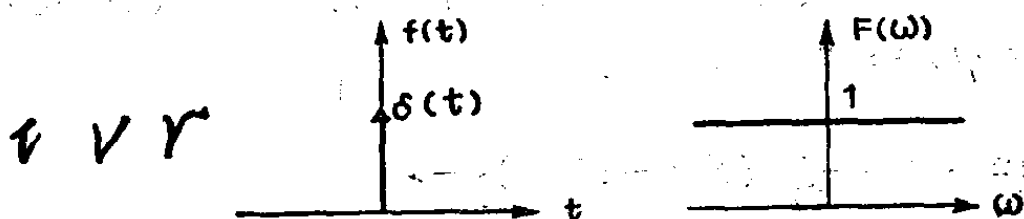


图 1-2

例〈2〉：若 $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ ，可得其正变换为：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

因此有付里叶变换对：

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (1-28)$$

显然对于 $f(t) = 1$ ，可得变换对为：

$$1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \quad (1-29)$$

例〈3〉 若 $f(t) = \cos \omega_0 t$ ，利用例〈2〉的结果可得：

• 由 δ 函数的表达式 $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$ ，可直接写出：

$$2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} dt$$

改 ω 为 $\omega - \omega_0$ ，即可证明 $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$



图 1-3

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1-30)$$

同样地, 若 $f(t) = \sin \omega_0 t$, 可得:

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) \quad (1-31)$$

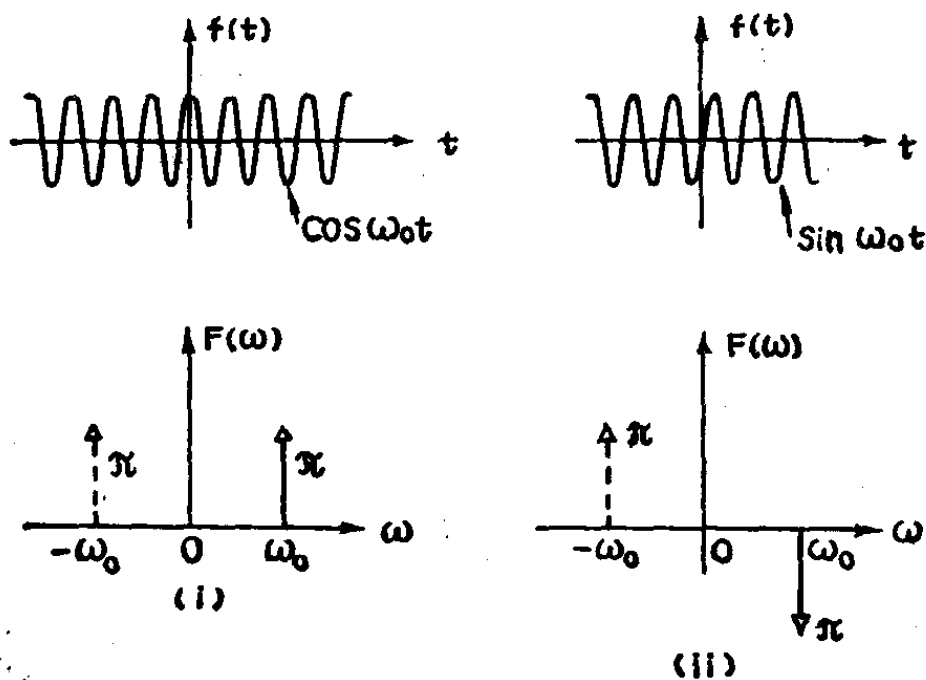


图 1-4

例(4) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. 这是一个周期性的 δ 脉冲序列。因为它是周期性函数, 可以表成付里叶级数, 即