复旦大学数学系主编

数学分析

欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编

下　册

上海科学技术出版社

数 学 分 析

下 册

复旦大学数学系主编

欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编

上海科学技术出版社

数学分析(下册)
复旦大学数学系主编
欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷
开本 850×1156　1/32　印张 11.75　字数 311,000
1982年12月第1版　1985年10月第4次印刷
印数 23,001—27,000
统一书号：13119·1036　定价：(科四)1.75元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革．这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从1962年到1965年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验．当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的．

1980年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲．同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则"．按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革．我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材．

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程．这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端．

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的．其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是不可少的．这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据．但是我们还要注意到，在各门基础课程的教材中需要防止片面追求自身的完备化．应当根据每门课程

在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑．使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版．

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科技出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982.4.

编 者 的 话

在最近几年教学实践的基础上，我们编写了这本教材．全书分上、下两册，上册的主要内容是极限论，一元微积分学和数项级数．下册的主要内容是函数项级数，欧几里得空间，多元微分学，含参变量积分和多元积分学．可以作为数学分析课程的教材，我们曾经在复旦大学数学系和上海交通大学工程力学系讲授过，授课学时在 210～240 学时之内．

数学分析的基本内容相对说来都是比较成熟和稳定的经典内容，但至今仍旧是现代科学技术(包括现代数学)所必备的基础．为了培养能够从事现代科学的研究、教学和应用的人才，必须重视这一基础的学习和训练；这是我们编写这本书的一个指导思想．

然而，经典的内容随着科学的发展，其陈述方式和处理方法在不断变化，因此用现代数学的观点来处理这些经典内容，是我们编写这本书的另一个指导思想．

数学分析的基础是实数理论，现有的分析教材大多直接不加证明地承认“单调有界数列必有极限”或“有上界的非空数集必有上确界”，以此为出发点，建立严格的极限论．本书在初等数学的基础上讲授实数系的结构，概括的叙述实数系的代数结构，顺序结构，距离(它是拓扑结构)，然后采用直观的切割的方法讲解实数系的连续性，不把它作为实数的定义，而是告诉学生如何用集合论的语言和顺序关系将直观认识——实数全体象一根不间断的绳子——表达出来，并在这一基础上容易证明有上界的非空数集必有上确界，从而将极限论一步步地展开．

黎曼积分通常是用黎曼和的极限引进的，这是一个非常复杂的极限．在研究可积条件时又引进达布上和 $U(f, P)$ 和下和 $L(f, P)$，然后证明可积的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $[a, b]$ 上的任何划分 P，当相邻两分点间的最大距离小于 δ 时，$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$．在本书中我们不利用极限而仅仅利用

上下确界的概念，通过上、下和引进上、下积分，从而引进黎曼积分，其可积充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在$[a, b]$的一个划分 P，使 $U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$. 这种表达方式在相当多的场合下运用方便，论证简明. 我们又考虑到在应用中黎曼和的极限有其优越之处，所以在本书中还证明了引进定积分的两种方式是等价的.

近年来国外微积分教材在多元微积分的部分作了颇大的改革，我们参考了国外教材的变化，根据这几年来的教学实践，对欧几里得空间，多元微分和积分学作了一些改革：用点集拓扑的观点处理欧几里得空间中的点集论，既保持原有直观，又使其表达更确切，为学生今后深入学习提供直观想象；在微分学，在讲授偏导数、方向导数之后，引进向量值函数的导数，统一处理偏导数，方向导数，雅可比矩阵；在积分学中，利用有向面积引进外积，再利用一点线性空间的知识构造出微分形式，并引进外微分的概念，从形式上统一处理多元积分学中有关内容和场论中的三个基本公式. 这些做法希望能够启发学生综合概括，起到承上启下的作用.

教材改革和基础课教学内容现代化是一件不容易的事，本书所作的努力是否恰当还有待于教学实践来检验，殷切期望广大教师和读者提出宝贵意见.

欧阳光中　朱学炎　秦曾复

1982.4.

目　录

11

函数项级数

11.1 函数空间

前几章里讨论的集合都是由一些实数组成的数集. 从本章开始我们不仅考虑数集,还将考虑由其它元素组成的集合,例如以函数为元素的集合,或者以数组为元素的集合等等.

设 E 是$[a, b]$上所有函数组成的集合,即

$$E=\{f \mid f\ 是[a, b]上的实值函数\},$$

这个集合的元素就是$[a, b]$上有定义的函数.

我们在 E 上建立如下的代数结构:

A. 加法

定义加法为普通意义下的函数相加, 即设 f, $g\in E$, 定义 $f+g\in E$ 如下:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad x\in[a, b],$$

容易验证函数加法满足交换律、结合律,并具有零元和逆元.

B. 数乘

设 α 是实数, $f\in E$, 定义数乘 $\alpha f\in E$ 如下:

$$(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x), \quad x\in[a, b],$$

它满足: $1\cdot f=f$, $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$; 同时数乘和加法满足以下规则:

$$(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f,$$

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g.$$

在上述代数结构下, E 是一线性空间*. 此外,在 E 中还可以定义普通意义下的乘法. 设 f, $g\in E$, 定义 $fg\in E$ 为

* 关于线性空间的知识,读者可参考有关高等代数的教材.

$$(fg)(x)=f(x)g(x),\ x\in[a,\ b],$$

它满足乘法交换律、结合律以及加法与乘法的分配律.

例如,设

$C[a,\ b]$是$[a,\ b]$上所有连续函数组成的集合,

$C_B[a,\ b]$是$[a,\ b]$上所有有界连续函数组成的集合,

$M[a,\ b]$是$[a,\ b]$上所有有界函数组成的集合.

在这三个集合上,分别建立上述加法和数乘的代数结构后,它们就都成为线性空间.

为了讨论收敛性,我们还要建立函数f和g之间的所谓"距离"以及在这距离下的收敛性.我们考虑$M[a,\ b]$或$C[a,\ b]$.设$f\in M[a,\ b]$(或$f\in C[a,\ b]$),定义f的范数$\|f\|$是

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in[a,\ b]\},$$

称它是上确界范数.容易验证它具有和绝对值相仿的三个最基本性质,即

1° 对任何f, $\|f\|\geqslant 0$; $\|f\|=0$当且仅当$f=0$.

2° 对任何实数α及任何f,

$$\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|.$$

3° 三角形不等式成立,即对任何f和g,有

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

在$M[a,\ b]$或$C[a,\ b]$中引进范数以后,就说在$M[a,\ b]$或$C[a,\ b]$上建立了一个拓扑结构,或者称$M[a,\ b]$或$C[a,\ b]$是赋范线性空间.

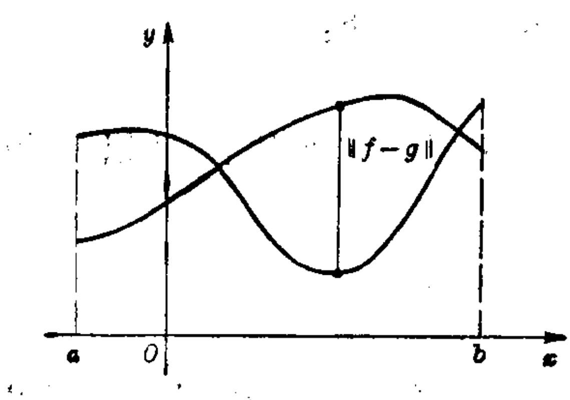

图 11-1

利用范数,定义函数f和g之间的距离为$\|f-g\|$(图11-1),即

$$\begin{aligned}f\text{和}g\text{的距离}&=\|f-g\|\\&=\sup\{|f(x)-g(x)|\,|\,x\in[a,\ b]\}.\end{aligned}$$

在上述距离意义下,设函数序列$\{f_n\}\subset M[a,\ b]$,又设$f\in M[a,\ b]$,如果

$$\|f_n-f\|=\sup\{|f_n(x)-f(x)|\,x\in[a,b]\}\to 0\quad(n\to\infty),$$
就称 $\{f_n\}$ 在上述距离意义下收敛于 f. 用 ε-N 的叙述方法，也就是对任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$\|f_n-f\|<\varepsilon.$$

这种意义的收敛在分析中起什么作用呢？这正是本章要讨论的问题.

11.2 函数项级数的一致收敛性

设 $u_n(x)\,(n=1, 2, \cdots)$是定义在某实数集 E 上的函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

是函数项级数. 又称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$$

是级数的 n 次部分和.

当 x 取定 E 中的某一值 x_0 时，就对应一个数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots.$$

如果此数项级数收敛，就称函数项级数在 x_0 收敛，x_0 称为级数的收敛点，否则就称它在 x_0 点发散. 如果对 E 中的每一点 x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 都收敛，就称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛点的全体所成的集，称为级数的收敛域. 这种收敛是对 E 中每一点来考虑的，所以也叫点态收敛. 显然，讨论一个函数项级数的点态收敛，实质上还是数项级数的问题，理论上没有新的发展. 但有一点值得指出，如果对所有的 $x\in E$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和是 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\quad 或\quad S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

那末，$S(x)$是 E 上的一个函数，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域就是和函数 $S(x)$的定义域. 这里给出了函数的一种新的表达形式，它往往

不是初等函数.

对于函数项级数，我们不能停留在点态收敛问题上，因为它只要用前已讲过的数项级数知识就可以解决，而且它只涉及到代数运算的可能性. 对于一个函数来说，很自然地我们主要应该解决其分析运算，也就是诸如极限、微分和积分运算的可能性问题. 说得具体些，设 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$在 E 上连续，并且在 E 上 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛于 $S(x)$，那末 $S(x)$是否连续？又如果每一个 $u_n(x)$在 E 上可导，那末 $S(x)$是否也可导，且使

$$S'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

成立？如果只是点态收敛，这些问题都不能得到肯定的回答. 我们即将给出这种情形的具体例子.

与数项级数相仿，给定一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$x\in E$，就可以得到一个对应的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$，$x\in E$. 反过来，给定一个函数序列 $\{S_n(x)\}$，$x\in E$，可以作出一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$x\in E$，使得此级数的部分和函数序列正好就是给定的 $\{S_n(x)\}$，这只要取 $u_1(x)=S_1(x)$，$u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ $(n=2, \cdots)$就可以做到. 这样一来，研究函数项级数与研究函数序列，在本质上是一致的. 而研究函数序列常常会带来很多方便.

[例 1] 考察函数列 $S_n(x)=x^n$, $n=1, 2, \cdots$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

显然，每一个 $S_n(x)$在[0, 1]连续，但极限函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在[0, 1]不连续. 这个例子同时还说明，在[0, 1]上，每一个 $S_n(x)$可导，但 $S(x)$不可导.

[例 2] 设 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n=1, 2, \cdots$, x 为任何实数.

显然 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ $x\in(-\infty, +\infty)$.

于是 $f'(x)=0$, 但是

$$f'_n(x)=\sqrt{n}\cos nx \nrightarrow f'(x)\ (n\to\infty),\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

例如,当 $n\to+\infty$ 时,

$$f'_n(0)=\sqrt{n}\to+\infty\neq f'(0)=0.$$

[例 3] 考察序列 $f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$, $n=1, 2,$

对任何 x, 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\ x\in[0,\ 1].$$

从而 $\int_0^1 f(x)dx=0$, 但

$$\int_0^1 f_n(x)dx=1-e^{-n^2}\to 1\quad(n\to\infty).$$

这表明虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in[0,\ 1]$,

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx.$

因而说明了积分的极限与极限的积分，即使两者都是有限的，也未必相等.

这就使我们产生一个很自然的问题,在什么条件下,才能使我们一开始提出的那几个问题得到肯定的结论. 为此，我们引进一种新的收敛概念,它比点态收敛要强一些.

函数列 $\{S_n(x)\}$ 或函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上点态收敛于 $S(x)$, 就是: 对任意 $\varepsilon>0$, 在每一点 $x\in E$, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时,成立

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

$\left(\text{对于级数,此式还可写成 } |r_n(x)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon\right)$. 这种 N 一般不仅依赖于 ε, 而且也与 x 有关，可记为 $N(\varepsilon,\ x)$. 也就是说，即使对于相同的 ε, 在不同点 x, 对应的 N 一般是不同的. 或者说,级数在 E 中各点虽然都收敛，但其收敛速度不一定是均匀的，步调并不一致. 如果能找到与点 x 无关，而仅与 ε 有关的 N, 那末这样的序列 $\{S_n(x)\}$, 不仅在 E 上点点收敛，而且步调一致. 这

种收敛，我们就称它是一致收敛(或均匀收敛)．其严格定义如下：

定义 1 设有函数序列 $\{S_n(x)\}$，$x\in E$，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在仅依赖于 ε 的正整数 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对 E 上一切 x 成立，就称 $\{S_n\}$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$．

如果 $\{S_n(x)\}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列，显然上述定义就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$，不过在级数情形，上面的不等式还可写成

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

一致收敛有时还可采用下面的方式定义，运用起来常较方便．

定义 2 记 $\|S_n-S\|=\sup\{|S_n(x)-S(x)|\,|\,x\in E\}$ (就是上节引进的范数)．如果

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-S\|=0,$$

就称 $\{S_n\}$ 在 E 上一致收敛于 S．

这两个定义等价性的证明留给读者作为习题．

[例 4] 序列 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ 在实数集 R 上一致收敛于 $S(x)=0$．

先用定义 1，由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

因而只要取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ 即可．

从这个函数列的图形(图 11-2)可以看出，只要 N 充分大，从第 N 项以后，每一条曲线 $y=S_n(x)$ 整个落在 $-\varepsilon<S(x)<\varepsilon$ 这一带状区域内，这正是一致收敛的几何解释．

我们再用定义 2 来说明，此时

$$\begin{aligned}\|S_n-S\|&=\sup\{|S_n(x)-S(x)|\,|\,x\in R\}\\&=\sup\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\,\middle|\,x\in R\right\}=\frac{1}{2n}\to0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$