高等结构力学丛书之一

Ganxi Jiegou Wending

杆系结构稳定

刘光栋　罗汉泉

人民交通出版社

越本科教材的范围，提供广泛的结构力学分支学科，让学生去涉猎，使学生学后而知不足，这样学生就会在教师的诱导和鼓舞下，更加自觉地去挤时间钻研较高深理论的积极性，并写出有一定水平的论文来。因此，我们编写的这套丛书亦可供培养学生自学能力之用。

如上提出的三个目的和两个作用，是我们的主观愿望，目的是否能达到，作用是否有成效，有待于今后的长期教学实践来检验。

本丛书中各个结构力学分支将单独成册，初步安排陆续出版15卷，将来再根据结构力学的新进展进行扩编。

由于工作需要，脱稿时间仓促，更重要的是限于水平，缺点和错误在所难免，望海内外同行专家不吝赐教，批评指正。

王朝伟

1986年1月

内 容 提 要

本书介绍杆件及杆系结构稳定性理论的基本概念和分析方法。书中先介绍稳定问题的分类和判别平衡稳定性的几个准则（能量准则、静力准则、动力准则及初始缺陷准则），然后讨论压杆在弹性极限内和弹性极限外稳定问题的各种分析方法，杆系结构（连续压杆、桁架和刚架等）临界荷载的计算方法，压弯杆件的临界荷载计算，薄壁杆件弯扭屈曲和梁侧向屈曲时的临界荷载计算；为了配合电子计算机的应用，专辟了一章介绍计算稳定问题的有限单元法，并附平面杆系结构面内屈曲问题的计算机程序；此外，还介绍了动力荷载作用下稳定问题的计算。

本书可作为高等院校土建、桥梁、水利等专业的研究生、本科生的教学用书，也可供这些专业的工程技术人员和科研人员参考使用。

高等结构力学丛书之一

杆系结构稳定

刘光栋　罗汉泉

责任编辑：谢仁物

插图设计：高静芳

正文设计：乔文平

封面设计：袁　毅

责任校对：张　捷

人民交通出版社出版发行

（北京和平里东街10号）

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：11.375　字数：295千

1988年9月　第1版

1988年9月　第1版　第1次印刷

印数：0001—5,160册　定价：4.85元

02-173-162-5

ISBN7-114-00070-7
U·00058

统一书号：15044·1918

出版说明

我社组织编写的“高等结构力学丛书”，包括（暂定名）：结构力学基础、拱结构的稳定与振动、曲线梁、结构动力学、随机振动、杆系结构稳定、板结构、壳结构、薄壁杆件、弹性工程力学、结构塑性分析、非线性结构分析、高层建筑结构分析、复合材料结构力学和结构优化设计等共15卷，将于1987年开始陆续出版。

参加丛书编写的教授、专家，都有较深的理论造诣和较丰富的教学或工程实践经验。丛书内容丰富，论述系统，可作为某学科的专业基础课或其他学科的选修课教材，可供有关专业的科研和工程技术人员参考使用，也可作为培养大学本科高年级学生智能的自学读物。

高等结构力学丛书

结构力学基础	王朝伟、李廉锟
拱结构的稳定与振动	项海帆、刘光栋
曲线梁	姚玲森
结构动力学	杨茀康
结构随机振动	陈英俊、甘幼琛、于希哲
杆系结构稳定	刘光栋、罗汉泉
板结构	黄与宏
壳结构	薛大为
薄壁杆件	陆楸、汤国栋
弹性工程力学	何福照
结构塑性分析	熊祝华
非线性结构分析	万虹、梅占馨
高层建筑结构分析	李君如、詹肖兰、欧阳炎
复合材料结构力学	蔡四维
结构优化设计	李炳威

序

结构力学是固体力学的一个分支。任何工程结构物的设计和建造，都会遇到结构力学问题。进入20世纪后，随着生产的发展和科学技术的进步，结构物的形式更加多样，受力体系更加复杂，这就要求有相应的理论分析方法和实用而有效的计算手段，编写高等结构力学丛书的着眼点即在于此。丛书在介绍力学的基本理论方面，重点突出了弹性理论和塑性理论。20世纪中期以后，复合材料结构和高层结构以及非线性结构的分析研究，取得了可喜的成果。随着电子计算机的广泛应用，在结构分析中普遍采用矩阵法，并进一步建立了有限元法。有了有限元法的分析方法和电子计算机的计算工具，人们便可以对工程结构物的设计由先设定结构方案，后进行综合考虑多方面的因素，以求得最优结构方案的设计，即所谓的结构优化设计。如上所述的有限元法和结构优化设计使结构力学走向计算机化，通称计算结构力学，从而开拓了新的结构力学领域。

本丛书在“结构力学基础”一卷里对杆系结构的经典理论先作概括性的论述，而后重点讲述分析杆系结构的矩阵方法和在电子计算机上实现该法的程序设计问题；在“高层建筑结构分析”一卷里也是在论述经典理论之后，主要讲述程序设计问题。经典的杆系结构和拱结构各设专卷讲述其稳定与振动；板壳结构中也都包括稳定与振动的论述。关于振动加“随机振动”，另有专卷论述。当代工程中遇到的曲线梁和薄壁杆件问题，亦有专卷论述。当代的复合材料结构和非线性结构的分析，以及结构优化设计，也都各列专卷。至于“有限元法”则另编一书以资配合。

对结构力学专业和各类结构工程专业的研究生来说，上述广泛范围内的结构力学分支有些是必修的专业基础课程，如板、壳

结构（包括稳定与振动），和结构的塑性分析和张量分析在弹性力学中的应用等课程中的一至二门；有些是不同专业的专门课程，如曲线梁、复合、高层、优化、非线性和随机振动等课程中的一门（根据研究方向所需的非力学课程不在此列）；还有些是需要开列出来由学生选修的课程。当然，反映当代力学计算方法的有限元法，包括加权残数法及其计算机程序设计也应是必修的。若采用各个分支的专著作教材，学时是不够的，适当精简以适应研究生学习的需要是我们编写这套丛书的第一个目的。

结构力学按专业来划分可分为：房屋结构力学、桥梁结构力学、隧道结构力学、飞机结构力学、车辆结构力学、船舶结构力学和水工结构力学等等。而这些不同专业的结构力学都有共同的基本理论。为各个专业的结构力学奠定共同的理论基础是我们编写这套丛书的第二个目的。

随着时代的推移，新的结构形式将不断涌现。工程师们为创造新的结构形式，往往需要广泛的结构力学知识，熟悉新结构的受力图式和掌握分析方法。为工程技术人员提供参考资料是我们编写这套丛书的第三个目的。

当今大学本科的结构力学教材所涉及的范围仅仅局限于杆系结构，有些内容需要提炼和概括以便增加课外阅读学时数；同时也有些内容（如稳定与振动）则需要抽出来单独设课。这是当前结构力学内容改革的趋向。丛书对杆系结构中的基本内容作了提炼和概括的尝试，以供学生参考；对于专题的内容则抽出来单独编辑成册，虽内容较深，但可供教师因材施教，培养拔尖学生之用。

既要传授知识，也要培养智能，这是当今高等学校的教学工作中应该大力提倡的。培养学生自学能力是培养智能的一个重要方面。我们安排学生自学，除必须给学生有足够的课外学时数外，最根本的一条就是要调动学生自学的主动性和积极性。为了做到这一点，除教师的引导和启发外，还必须恰当地提供自学的内容。根据本人30年代学习结构力学时的经验，我认为最好是超

目　　录

第一章　判断平衡稳定性的准则

本章先介绍第一类失稳和第二类失稳的基本概念，然后比较详细地讨论判断平衡稳定性的各种准则。

第一节　第一类失稳(分枝点失稳)和第二类失稳(极值点失稳)

图1-1(a)所示为两端铰支的轴心受压理想直杆，其两端作用有逐渐增大的轴向压力P。当P小于欧拉(Euler)临界值$P_E=\dfrac{\pi^2EI}{l^2}$时，杆件保持其直线平衡状态。此时，若由于任何干扰（例如由于微小水平力的作用）使杆件发生微小的弯曲，当干扰消失之后，杆件将回复到原来的直线平衡位置而不能占有其他位置。当P达到欧拉临界值时，如果由于某种原因使杆件发生微小的弯曲，则在使其弯曲的原因消失后，杆件将不能回到其原来的直线平衡位置而将保持新的曲线形式的平衡（图1-1(b)）。也就是说，当$P=P_E$时，杆件可能出现性质不同的新的平衡形式。此时，杆件不仅发生轴向压缩，而且也发生弯曲了。

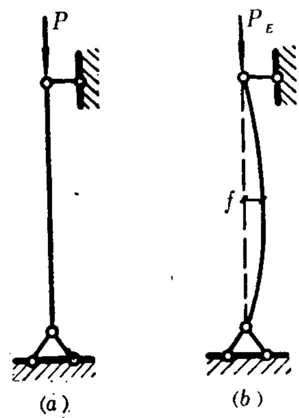

图 1-1

上述杆件由直线平衡形式转到新的曲线平衡形式的这一过程，可用图 1-2 中的荷载-挠度曲线OAB来表示。因为杆件有可

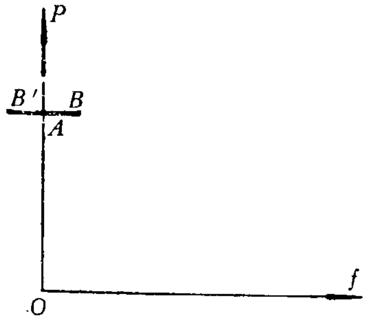

图 1-2

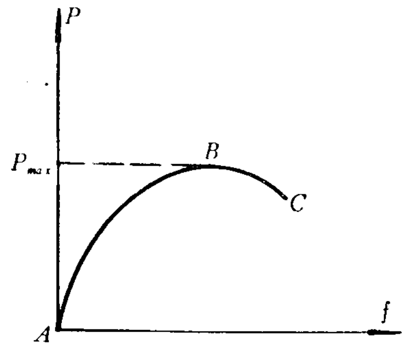

图 1-3

能朝相反的方向弯曲，图中也绘出了与线段 AB 相对的线段 AB'。在 A点发生的现象，称为杆件的第一类失稳或称为杆件的屈曲。由于在 A点出现平衡状态的分枝，所以在一些文献中把第一类失稳称为分枝点失稳。与 A点相应的荷载值 P_E 称为屈曲荷载或平衡分枝荷载。

第一类失稳的现象，不只发生于直杆轴心受压的情况，在其他结构中也同样可以出现。例如，承受静水压力的圆弧拱的屈曲、在结点承受集中荷载的刚架的屈曲和承受平面内荷载的理想平直梁的侧向屈曲等。

除了第一类失稳的情况外，还有所谓第二类失稳或极值点失稳。在这类问题中，平衡状态不发生分枝现象，即平衡形式不发生质变，但当荷载达到极限荷载 P_{max}(图1-3)后，荷载必须逐渐下降才能维持内、外力的平衡，如 BC 段所示。P_{max} 称为构件的失稳极限荷载，在有些文献中，则称之为压溃荷载。

屈曲荷载（平衡分枝荷载）和失稳极限荷载（压溃荷载）可统称为临界荷载。与临界荷载相应的状态称为临界状态。在到达临界状态之前的平衡状态，称为前屈曲平衡状态。在超过临界状态之后的平衡状态则称为后屈曲平衡状态。

以上，按照结构在逐渐加载的过程中平衡形式是否发生质变

这一观点，将结构的失稳区分为第一类失稳和第二类失稳。此外，还可以按照另外的观点将结构的失稳问题分为：

（1）保守系统失稳与非保守系统失稳；

（2）线性小挠度失稳与非线性大挠度失稳；

（3）弹性极限内失稳与弹性极限外失稳；

（4）静力失稳与动力失稳；

（5）完善结构的失稳与非完善结构的失稳；

（6）局部失稳与整体失稳，等等。

值得指出，不管是第一类稳定问题还是第二类稳定问题，都与通常所说的强度问题有着严格的区别。在稳定问题中，要求找出与临界荷载相对应的临界状态（有时还要求研究后屈曲平衡状态），结构的稳定计算必须根据其变形状态来进行，故它是一个变形问题；而在强度问题中，是要找出结构在稳定平衡状态下的最大应力，故为应力问题。结构强度问题的研究可保证实际的最大应力不超过材料的某一强度指标，而研究结构稳定的主要目的在于防止不稳定平衡状态的发生。

第二节　判断平衡稳定性的最根本的准则

为引出判断平衡稳定性的最根本的准则，现考察一刚性小球在光滑面上的三种不同位置（三处的切线都是水平的），如图 1-4 所示。其中图(a)为向下凸的曲面，图(c)为向上凸的曲面，图(b)则表示极限情况即曲面为一水平面。在三种情况下，小球虽然都处于平衡状态，但它们对应的平衡特征却是不相同的。如果

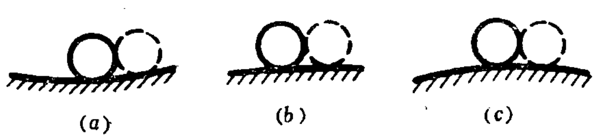

图 1-4

由于某一微小干扰使小球稍微偏离其平衡位置（如虚线所示），然后让其自由，则在第一种情况下小球将在中点位置附近摆动（由于小球摆动的表面不可能是理想光滑的，小球摆动的幅度将逐渐减小，最后恢复到原来的平衡位置），而在第三种情况下小球将立即离开其原平衡位置继续运动。这就是说，在第一种情况下平衡是稳定的，而第三种情况则是不稳定的。至于图(b)所示的第二种情况，小球的任意位置都是平衡的，这种平衡形式称为中性平衡或随遇平衡，它是介于稳定平衡与不稳定平衡之间的一种过渡状态（临界状态）。

于是，可引出判断平衡状态是否稳定的最根本的准则如下：

假设对处于平衡状态的体系施加一微小干扰，当干扰撤去后，如体系能恢复到原来的平衡位置，则该平衡状态是稳定的；反之，若体系偏离原来的平衡位置愈来愈远，则该平稳位置是不稳定的；如体系停留在新的位置不动，则该平衡状态是随遇的。

以上述最根本的准则为基础，从不同平衡状态的能量特征可得到判断平衡稳定性的能量准则；从稳定平衡和随遇平衡的动力特征可得到判断平衡稳定性的动力准则；而从随遇平衡的静力特征便可得到判断平衡稳定性的静力准则。

下面分别对于体系（小球）的不同平衡状态的能量特征，稳定平衡和随遇平稳的动力特征，以及随遇平衡的静力特征作一简单说明。

(1)在位于凹面内的稳定平衡情况下，若由于任一外因使小球偏离平衡位置，则其外力势能将增加，故知相应于稳定平衡位置的外力势能为最小。在位于凸面的不稳定平衡情况下，小球偏离平衡位置时将使外力势能减小，故知对应于不稳定平衡形式的外力势能为最大。在图1-4(b)所示随遇平衡情况下，使小球偏离原来的平衡位置将不引起外力势能的改变。

(2)在稳定平衡的情况下，小球受微小干扰后将在中点位置附近摆动，其摆动的频率随着表面曲率半径的增大而减小。当曲率半径趋近于无限大时（此时小球处于随遇平衡状态），小球摆

动的频率将趋近于零。

（3）从静力平衡的观点出发，如果小球在某一位置是平衡的，而在与其无限接近的相邻位置也是平衡的，则小球处于随遇平衡状态。

关于刚体平衡的稳定性的概念，也完全适用于弹性体系，区别仅在于：图1-4所示小球的平衡稳定性仅与所在曲面的形状有关（与小球的质量无关），而弹性体系的平衡稳定性则还与所作用荷载的大小有关。

第三节　能量准则及能量法

对于轴心受压的理想直杆，当其受微小扰动从初始的直线平衡状态向弯曲状态过渡时，应变能将增加，同时作用于其上的外力将作功。

若应变能的增量大于外力功的增量，显然当扰动去除后体系将恢复到初始平衡位置，因而体系所处的平衡状态是稳定的。反之，当外力功的增量大于应变能的增量时，体系所处的平衡状态是不稳定的。在随遇平衡下，应变能的增量应等于外力功的增量。如果外力系是保守力系（外力所作的功只决定于荷载作用点的初始位置和最终位置而与作用点移动的路径无关），则可引出外力势能和体系总势能的概念，这时能量准则可用体系的总势能来表示。

根据总势能驻值原理，当体系处于平衡状态时，其总势能Π的一阶变分为零，即

$$\delta\Pi=\delta(U+V)=0 \tag{1-1}$$

其中，U为体系的弹性势能（即应变能），V为外力势能。

利用式（1-1），可确定体系的平衡位置，但不能判断该平衡位置是稳定的还是不稳定的。关于平衡状态的稳定性，一般可由总势能的二阶变分的正、负号来判定。如果

$$\delta^2\Pi>0$$

则所考察的体系的平衡形式是稳定的；如果

$$\delta^2\Pi<0$$

则所考察的平衡形式是不稳定的；如果

$$\delta^2\Pi=0$$

则所考察的平衡形式是随遇的（注：这时平衡形式是稳定的还是不稳定的，须根据$\delta^3\Pi$ 或更高阶变分的正负号来确定）。

下面以具有弹性支座的刚性压杆为例来说明。

图 1-5 所示为一下端弹性固定、上端自由的单自由度体系，弹簧的转动刚度（使弹簧支座发生单位转角所需要的力矩）为 c。设体系转动了一个角度 θ 并处于平衡状态，如图中实线所示。

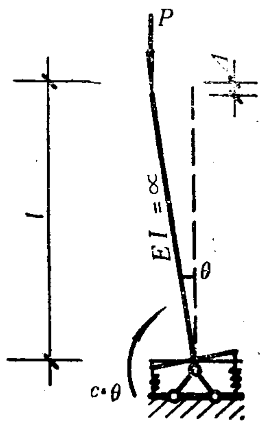

图 1-5

为研究平衡状态的稳定性，首先要建立总势能的表达式。

其外力势能为

$$V=-P\Delta=-Pl(1-\cos\theta)$$

弹簧支座的弹性势能为

$$U=\frac{1}{2}c\theta^2$$

故体系的总势能为

$$\begin{aligned}\Pi&=U+V\\&=\frac{1}{2}c\theta^2-Pl(1-\cos\theta)\end{aligned}\tag{1-2}$$

总势能的一阶和二阶变分分别为

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=(c\theta-Pl\sin\theta)\delta\theta\\&=c(\theta-\lambda\sin\theta)\delta\theta\end{aligned}\tag{1-3}$$

$$\delta^2\Pi=c(1-\lambda\cos\theta)\delta\theta^2\tag{1-4}$$

其中

$$\lambda = \frac{Pl}{c} \tag{1-5}$$

令 $\delta\Pi = 0$，并注意到 $\delta\theta$ 是任意的，则可得到体系的平衡方程为

$$\lambda\sin\theta - \theta = 0 \tag{1-6}$$

故有

$$P = \frac{c\theta}{l\sin\theta} \tag{1-7}$$

或写成

$$\theta = \frac{\sin\theta}{P_{kp}/P} \tag{1-8}$$

其中

$$P_{kp} = \frac{c}{l} \tag{1-9}$$

由式(1-6)，并注意到 $\sin\theta \leqslant \theta$，可知：

(1)当 $\lambda < 1$ 时，只有 θ 为零的解才能满足平衡方程；

(2)当 $\lambda = 1$ 时，也只有 θ 为零的解才能满足平衡方程；

(3)当 $\lambda > 1$ 时，除有 θ 为零的解外，还有另外两个解。例如，当 $\lambda = 1.2$ 时，这两个解为 $\theta = 1.03$ 和 $\theta = -1.03$。在图1-6(a)

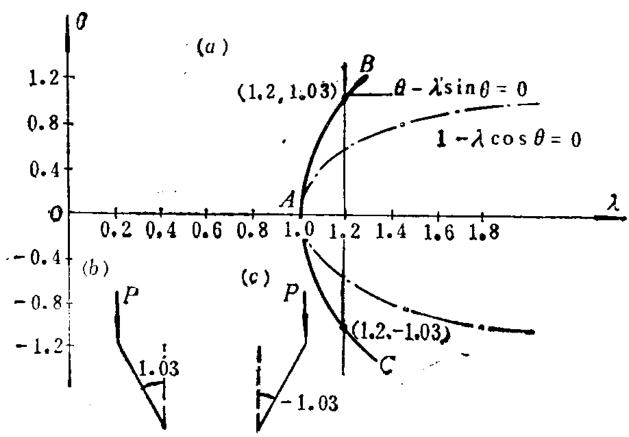

图 1-6